

Nel seguito, si definiranno i principi che permettono di individuare il regime di pressione interstiziale nel continuo fluido di porosità, in condizioni idrostatiche, di flusso stazionario (che si ripete identicamente nel tempo) e transitorio (variabile nel tempo).

Tenuto conto del principio delle tensioni efficaci di Terzaghi:

$$\sigma = \sigma' + u$$

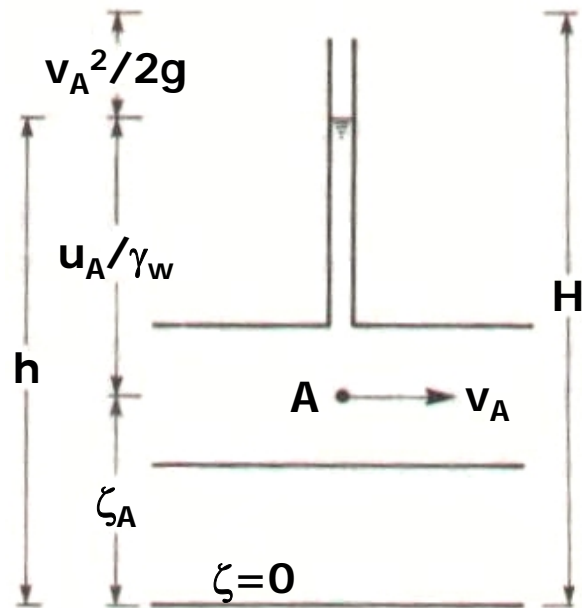
La conoscenza delle  $\sigma$  e delle  $u$ , permetterà di individuare il regime di tensione efficaci ( $\sigma'$ ):

$$\sigma' = \sigma - u$$

**ossia:**

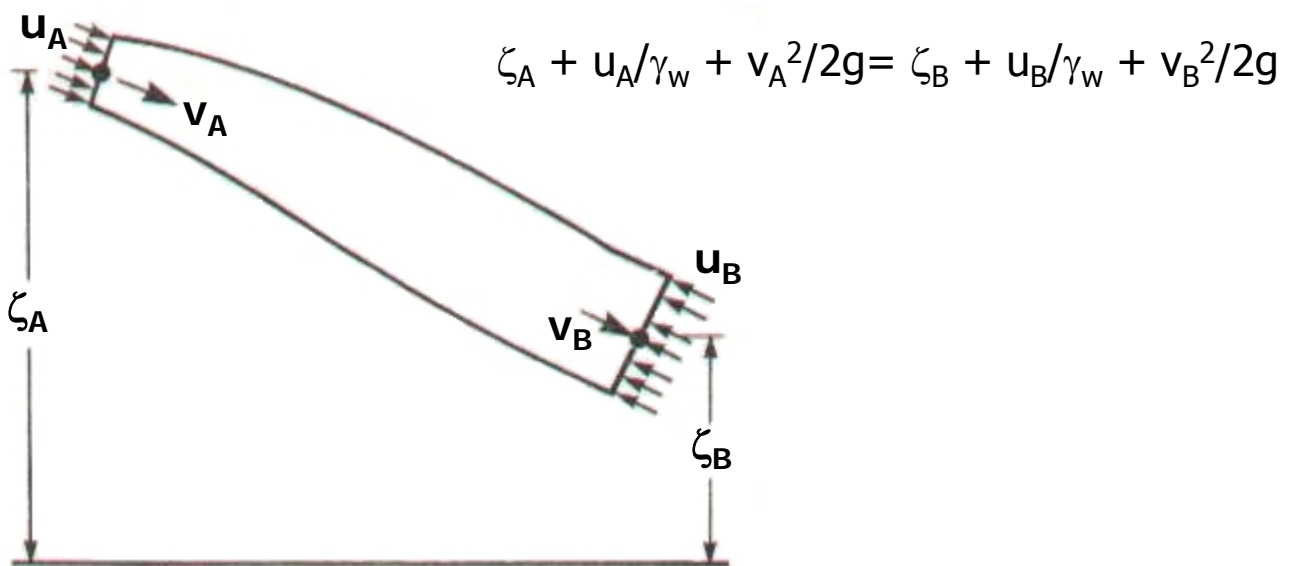
**DI VALUTARE IL REGIME DI TENSIONE DA CUI HA ORIGINE  
LA RISPOSTA MECCANICA DEI TERRENI**

Per un elemento di volume fluido di peso unitario i termini energetici possono essere espressi sotto forma di altezze:



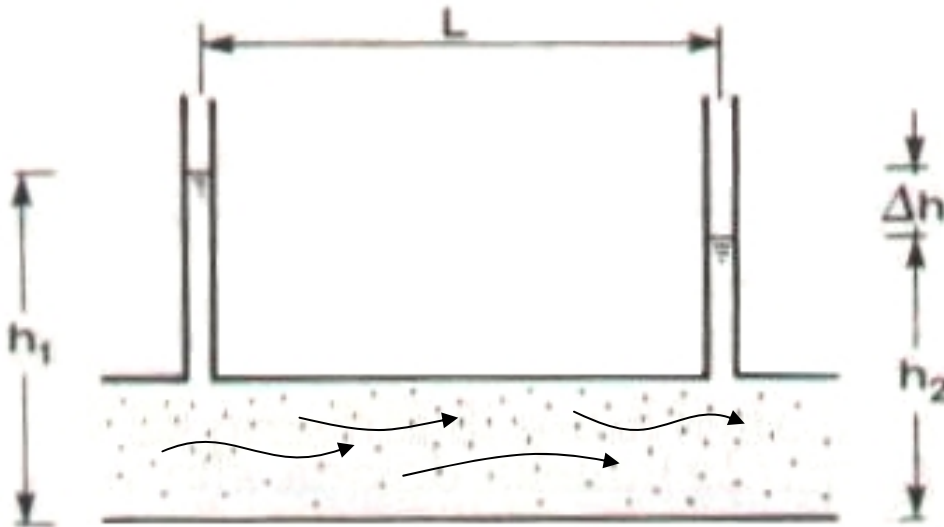
- $\zeta$  è la **quota geometrica** ed è misurata rispetto ad un piano arbitrario di riferimento;
- $u/\gamma_w$  è l'**altezza piezometrica** ed è misurata in termini di pressioni relative (ossia,  $u_{atm} = 0$ ),  $\gamma_w$  è il peso specifico del fluido (tipicamente acqua);
- $v^2/2g$  è l'**altezza cinetica**, con  $v$  velocità con cui si muove il volume elementare e  $g$  accelerazione di gravità;
- $h$  è la **quota piezometrica**  $= \zeta + u/\gamma_w$
- $H = \zeta + u/\gamma_w + v^2/2g$  è il **carico idraulico**

Per un liquido perfetto e incompressibile in moto stazionario:



Nei liquidi reali si verificano perdite di carico per effetto delle resistenze al moto.

Le resistenze al moto di filtrazione nei mezzi porosi sono elevate ed aumentano al diminuire delle dimensioni dei pori.



**LA VELOCITA' DELL'ACQUA NEI TERRENI È DELL'ORDINE DI  $10^{-2} \div 10^{-12}$  m/s. PERTANTO L'ENERGIA CINETICA È DELL'ORDINE DI  $10^{-5} \div 10^{-25}$  m.**

Senza commettere errori di rilievo si può assumere che l'energia associata ad una particella liquida sia:

$$h = \zeta + u/\gamma_w$$

La perdita di carico per unità di lunghezza (o gradiente idraulico) è:

$$j = \frac{\Delta h}{L}$$

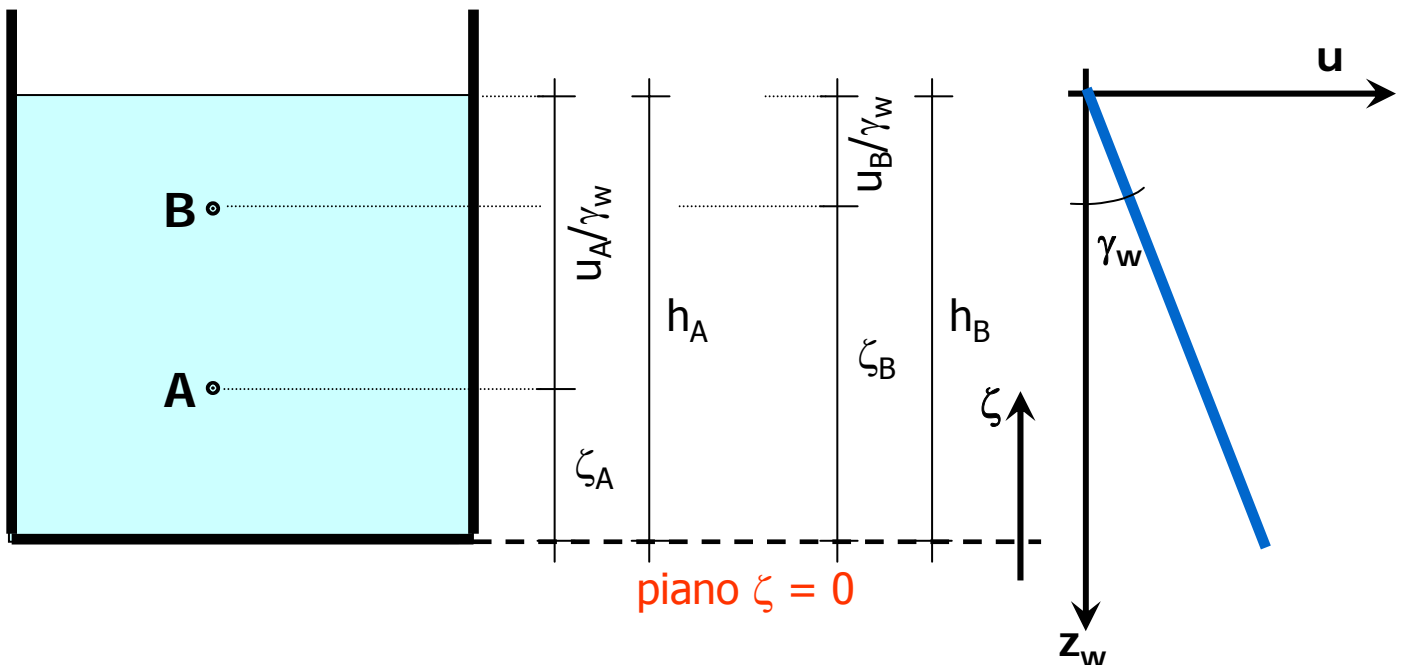
## Acqua in quiete (Condizioni idrostatiche)

La velocità  $v$  è nulla, la  $h$  è costante ed in modo del tutto rigoroso vale la relazione:

$$H = h = \zeta + u/\gamma_w$$

ossia:

$$u = (h - \zeta) \cdot \gamma_w$$



In condizioni idrostatiche vale la legge di Stevino:

$$u = \gamma_w \cdot z_w$$

D'altra parte in condizioni idrostatiche la  $z_w$  [profondità misurata a partire dal punto con pressione dell'acqua nulla (cioè, dal pelo libero della falda idrica)] è sempre pari a  $(h - \zeta)$ . Il peso specifico dell'acqua si considera in genere costante e pari a  $1 \text{ t/m}^3$  ( $1 \text{ g/cm}^3$ ;  $10 \text{ kN/m}^3$ ).

Al di sopra del pelo libero della falda si ha una zona nella quale l'acqua risale per capillarità (e quindi ha  $u < 0$ ).

Nei terreni il fenomeno è complesso perché:

- i canalicoli capillari hanno dimensioni variabili;
- le vicissitudini idrauliche del deposito possono essere molto complesse;
- la percolazione di acque di pioggia e l'evaporazione modificano di continuo le condizioni.

### **Altezze di risalita capillare in terreni naturali (Silin-Beckchurin, 1958)**

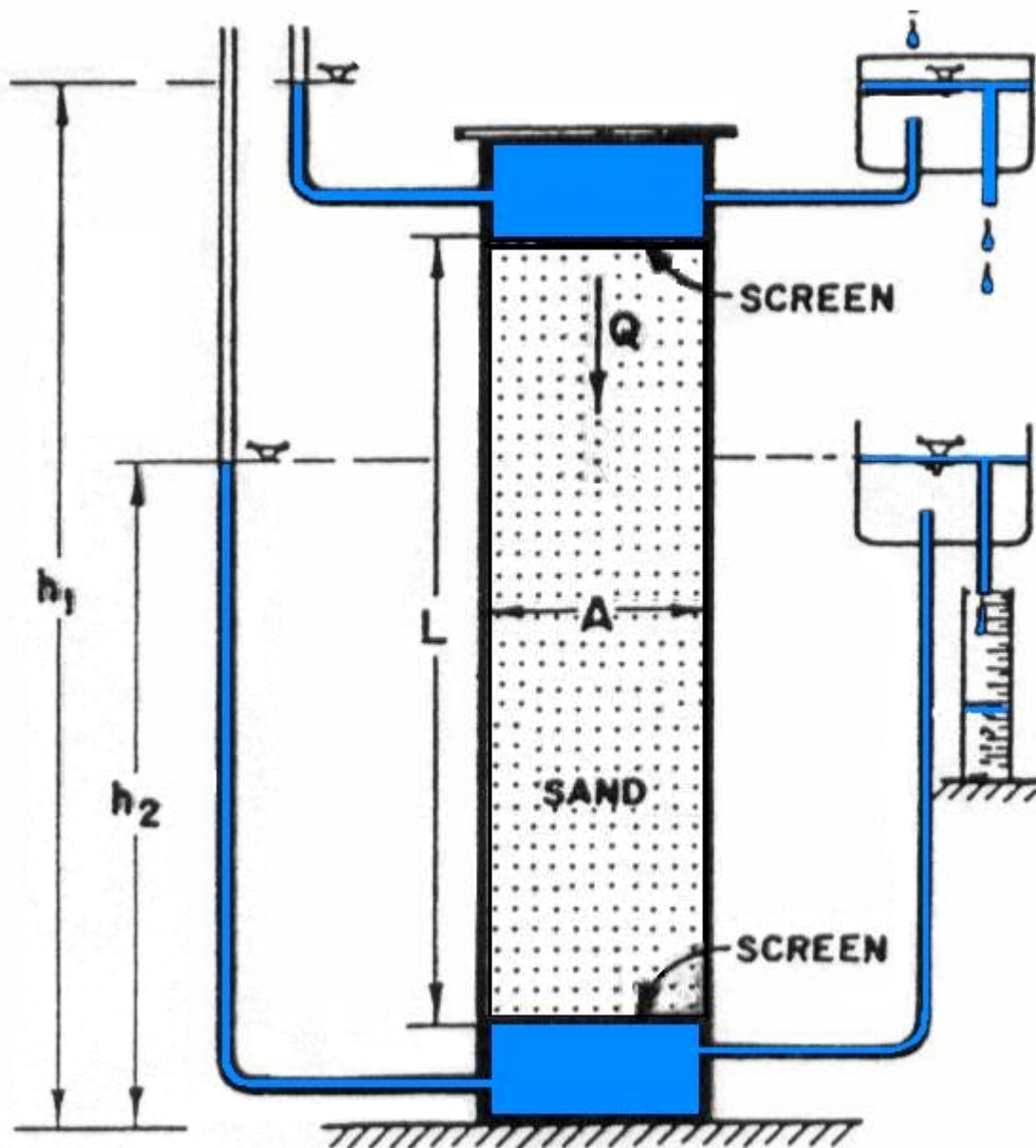
<b>Terreno</b>	<b><math>h_c</math> (cm)</b>
Sabbia grossa	2-5
Sabbia media	12-35
Sabbia fine	35-70
Limo	70-150
Argilla	200-400 e oltre

**IL PRINCIPIO DELLE TENSIONI EFFICACI DI TERZAGHI È  
VALIDO NEL CASO DI TERRENI SATURI D'ACQUA.  
IN PARTE DELLE ZONE DI RISALITA CAPILLARE E  
SUPERIORMENTE, DOVE I TERRENI SONO PARZIALMENTE  
SATURI, IL PRINCIPIO NON VALE: OCCORRE INTRODURRE  
ULTERIORI VARIABILI DI STATO TENSIONALE ED UN  
APPROCCIO PER TERRENI NON SATURI  
(NON TRATTATO NEL CORSO)**

## Acqua in moto (Legge di Darcy)

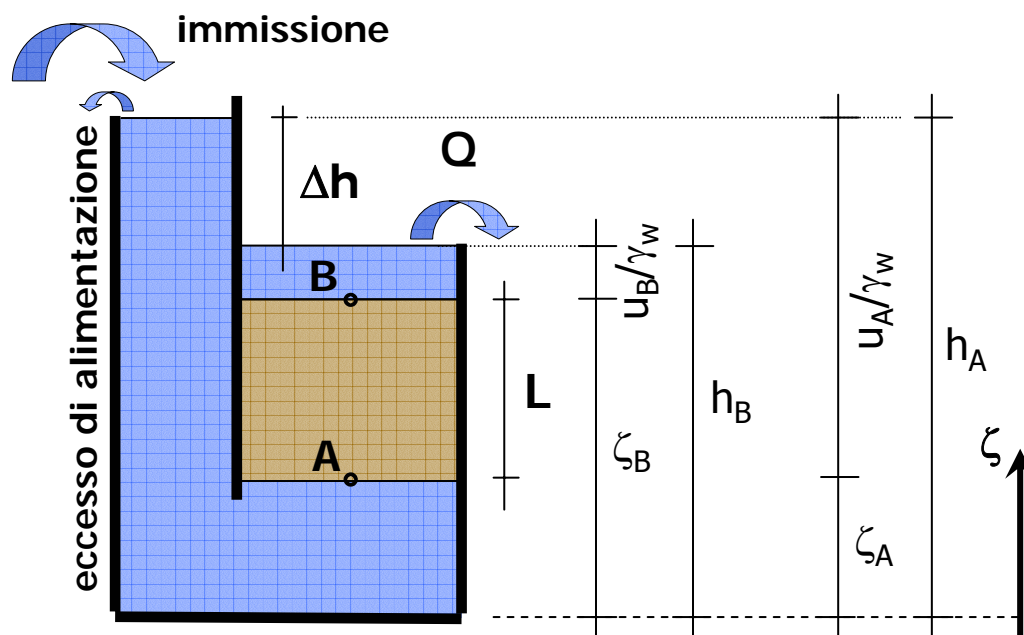
Nel 1856, valutando le portate di acqua che attraversavano filtri verticali di sabbia, Darcy trovò la famosa legge:

$$Q = k \cdot A \cdot (h_1 - h_2) / L$$



La legge che regola il flusso dell'acqua (o altro liquido) nei terreni può essere riferita al semplice schema in figura:

$$q = \frac{Q}{A} = k \cdot \frac{\Delta h}{L} = k \cdot j$$



- $k$  = permeabilità [ $L \cdot T^{-1}$ ];
- $Q$  = portata [ $L^3 \cdot T^{-1}$ ];
- $\Delta h$  = salto energetico [ $L$ ];
- $L$  = spessore del campione (percorso di filtrazione) [ $L$ ];
- $A$  = sezione trasversale del campione [ $L^2$ ];
- $j$  =  $\Delta h/L$  = cadente piezometrica [-];
- $q$  = velocità di filtrazione [ $L \cdot T^{-1}$ ].

Legge empirica di Hazen:  $k = 100 \div 150 (D_{10})^2$  [ $cm/s$ ]

- due terreni a diversa granulometria possono avere permeabilità che differiscono di molti ordini di grandezza
- $k$  diminuisce sensibilmente in caso di presenza, anche minima, di materiale fine

---

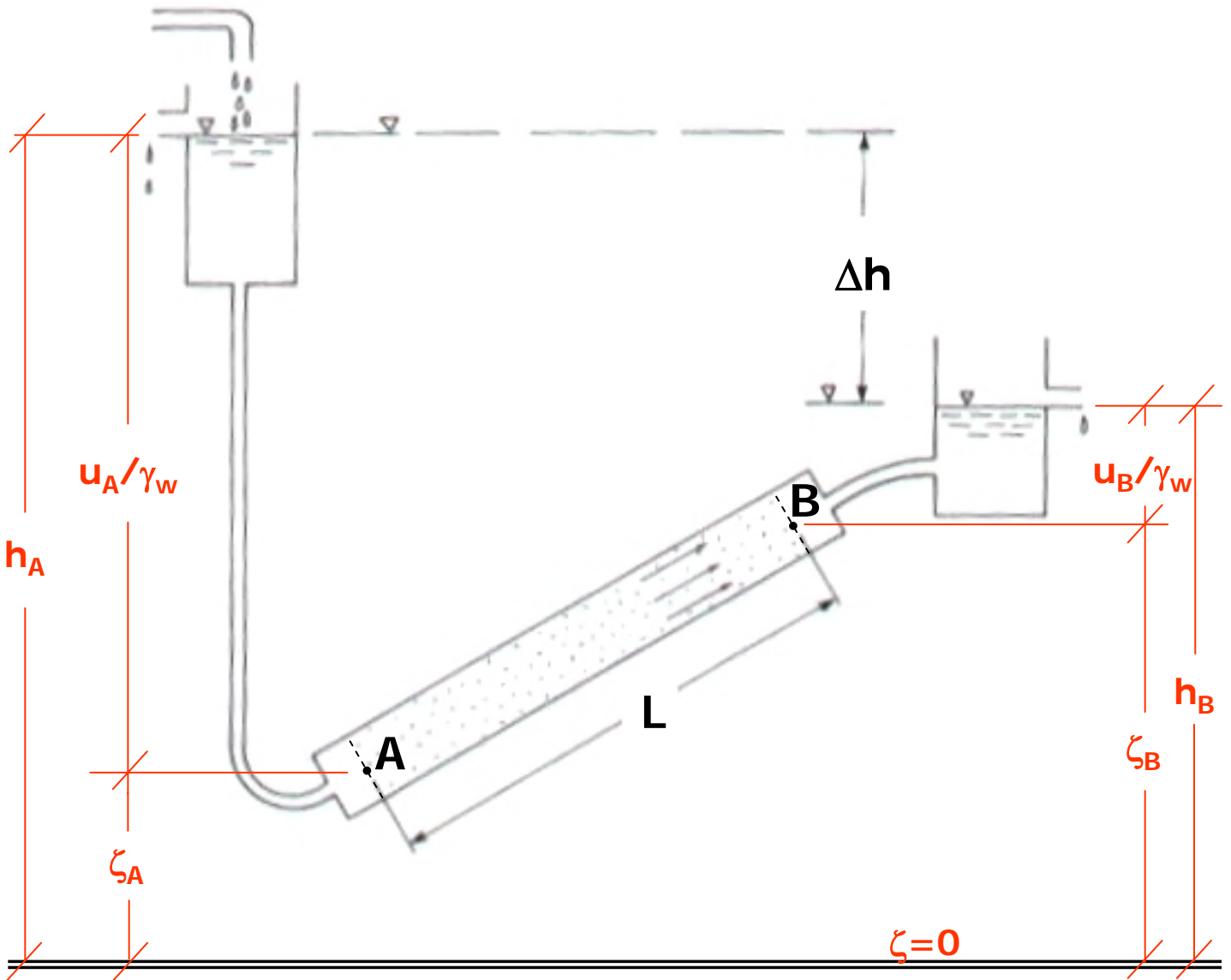
<b>tipo di terreno</b>	<b>k (m/s)</b>
Ghiaia pulita	$10^{-2} - 1$
Sabbia pulita – Sabbia e ghiaia	$10^{-5} - 10^{-2}$
Sabbia molto fine	$10^{-6} - 10^{-4}$
Limo	$10^{-8} - 10^{-6}$
Argilla omogenea in falda	$< 10^{-9}$
Argilla sovraconsolidata fessurata	$10^{-8} - 10^{-4}$

---



La legge di Darcy può essere estesa al flusso attraverso una colonna inclinata di materiale poroso:

$$Q = k \cdot A \cdot (h_A - h_B) / L$$



$$Q = k \cdot A \cdot \Delta h / L$$

$$q = Q/A = k \cdot j$$

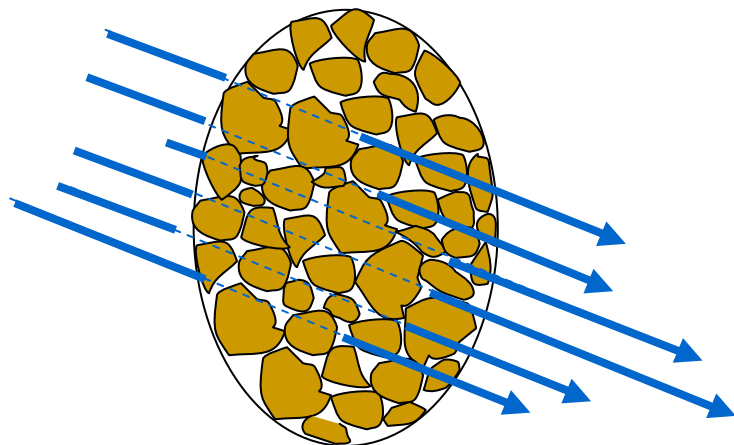
$q$ , velocità di filtrazione, rappresenta la velocità media che il fluido avrebbe se attraversasse l'intera sezione di area  $A$ .

È quindi una velocità fittizia.

In realtà la velocità media del fluido si ottiene dividendo la portata per l'effettiva sezione di efflusso  $A^*$ :

$$n = \frac{V_v}{V} \cong \frac{A^*}{A} \Rightarrow v^* = \frac{Q}{A^*} = \frac{q}{n}$$

[con  $n$  si indica la porosità del terreno]

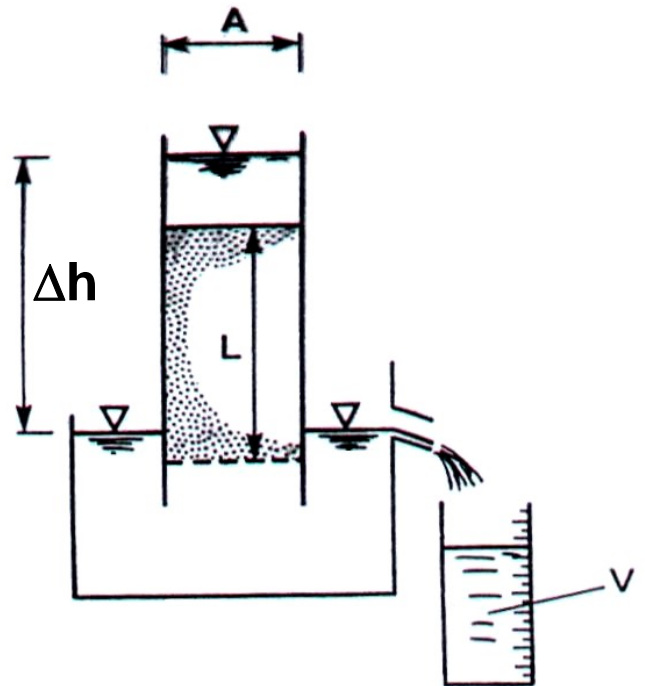


## Determinazione sperimentale del coefficiente di permeabilità

Prove a carico costante

$$V_w = A \cdot q \cdot \Delta t = A \cdot k \cdot \frac{\Delta h}{L} \cdot \Delta t$$

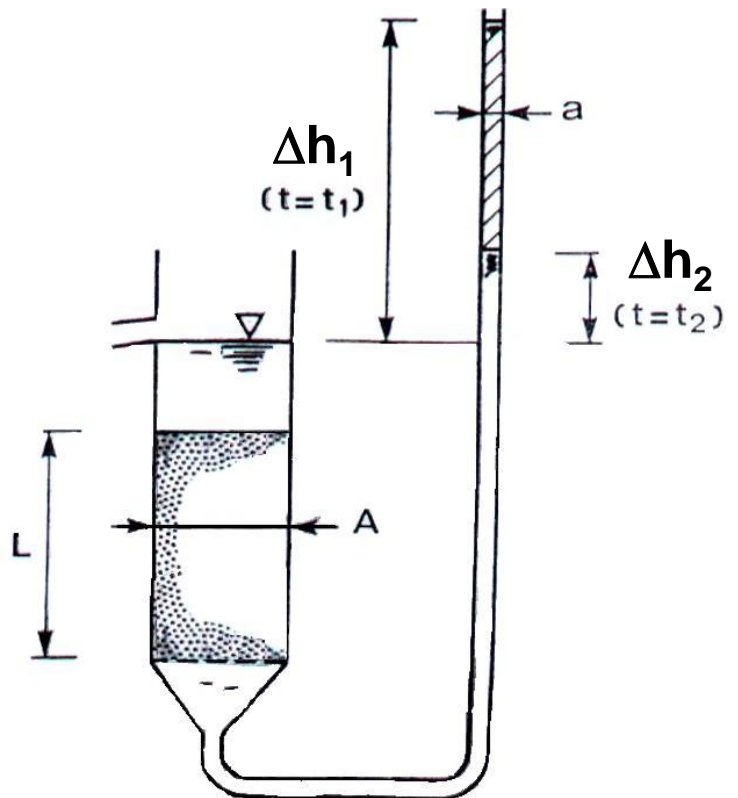
$$\Rightarrow k = \frac{V_w \cdot L}{\Delta h \cdot A \cdot \Delta t}$$



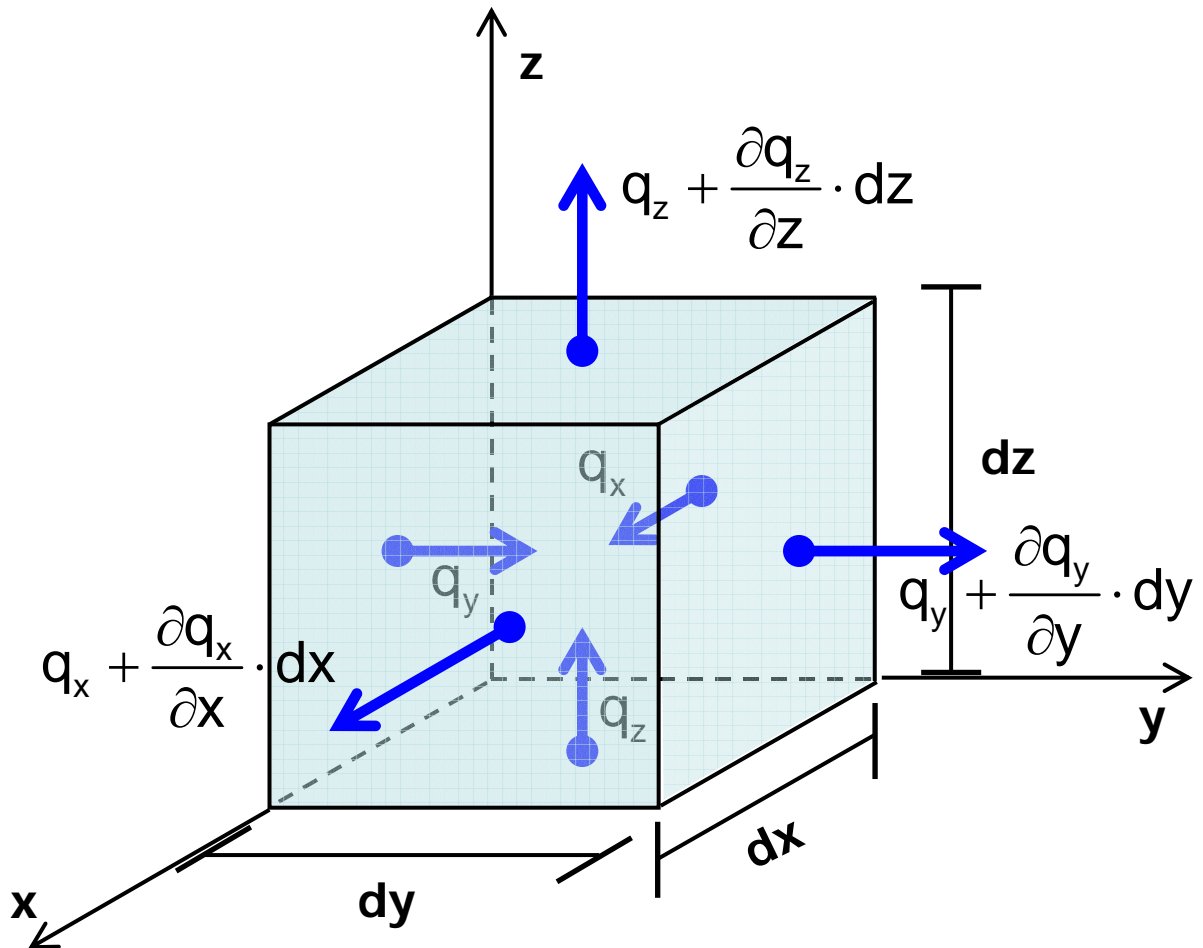
Prove a carico variabile

$$-a \cdot d\Delta h = Q \cdot dt = A \cdot \frac{\Delta h}{L} \cdot k \cdot dt$$

$$\Rightarrow k = \frac{a \cdot L}{A \cdot (t_2 - t_1)} \cdot \ln \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}$$



## Equazione di continuità per il flusso stazionario

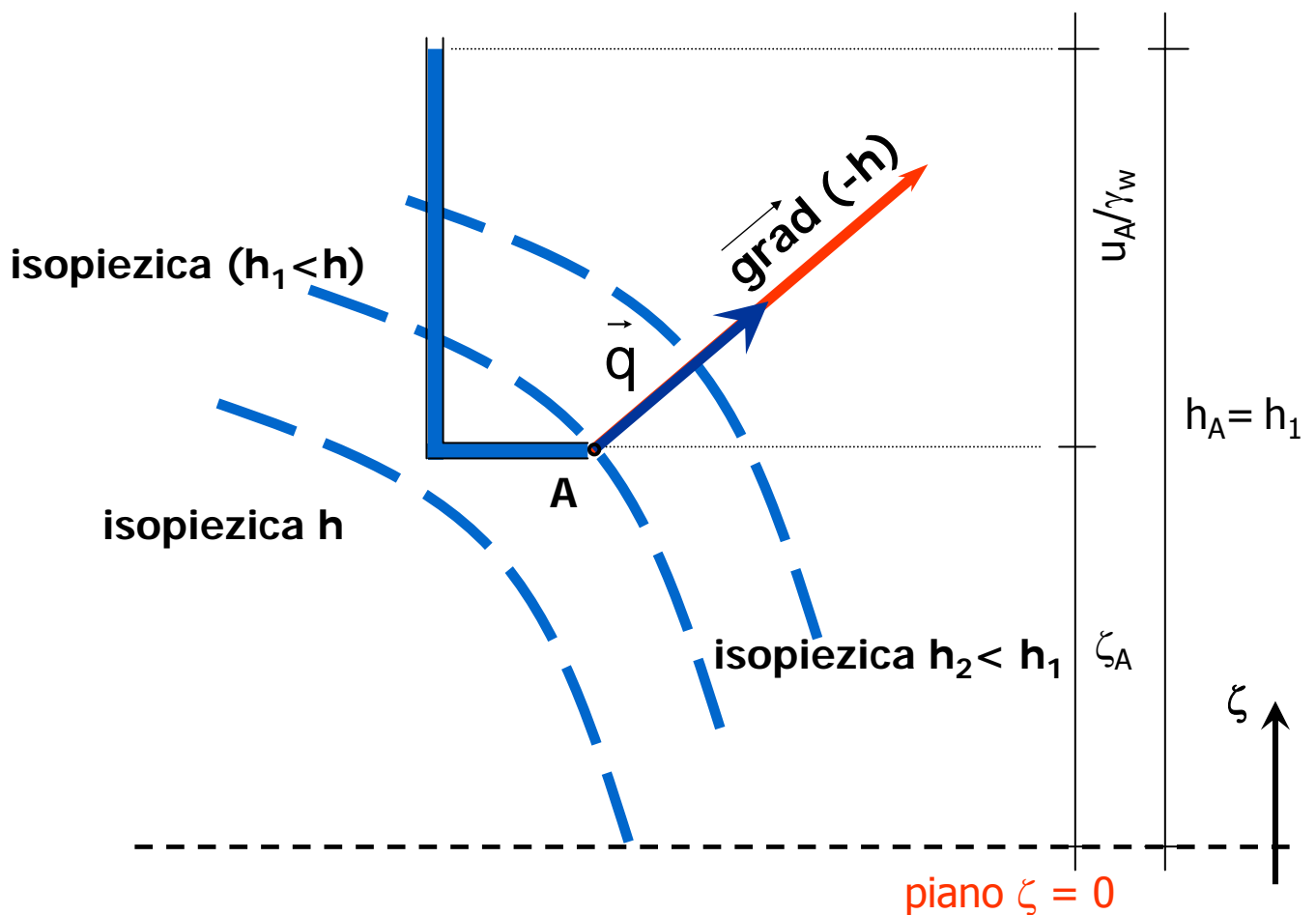


$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \text{div}(\vec{q}) = 0$$

La legge di Darcy può essere generalizzata.

In un mezzo poroso saturo ed isotropo nei confronti della permeabilità essa si scrive:

$$\vec{q} = -k \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial h}{\partial z} \hat{k} \right) = k \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(-h)$$



**IN UN MEZZO POROSO ISOTROPO LE LINEE DI FLUSSO E LE ISOPIEZICHE SONO ORTOGONALI**

Utilizzando la scrittura in forma scalare della legge di Darcy generalizzata ed ipotizzando che il mezzo sia anche omogeneo nei confronti della permeabilità si ricava:

$$\begin{aligned}
 q_x &= -k \cdot \frac{\partial h}{\partial x} & \Rightarrow & \frac{\partial q_x}{\partial x} = -k \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\
 q_y &= -k \cdot \frac{\partial h}{\partial y} & \Rightarrow & \frac{\partial q_y}{\partial y} = -k \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \\
 q_z &= -k \cdot \frac{\partial h}{\partial z} & \Rightarrow & \frac{\partial q_z}{\partial z} = -k \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

perciò in un mezzo isotropo ed omogeneo si ha:

$$\operatorname{div}(\vec{q}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 (h) = 0 \quad [1]$$

La [1] è l'EQUAZIONE DI LAPLACE, modello matematico dei moti di filtrazione in condizioni stazionarie in mezzi omogenei ed isotropi.

Le equazioni differenziali alle derivate parziali, come quella di Laplace, descrivono quello che accade in un punto del dominio nel quale si svolge un dato fenomeno (filtrazione, nel caso dell'equazione di Laplace).

Tali equazioni sono i modelli matematici di una classe di fenomeni e non contengono in sé alcuna informazione su un problema specifico della classe.

Un'equazione differenziale ammette infatti infinite soluzioni.

**Per ottenere la soluzione che riguarda un caso particolare bisogna fornire altre relazioni (condizioni al contorno, nel caso dell'equazione di Laplace)**

La legge di Darcy può essere ulteriormente generalizzata al mezzo non omogeneo ed anisotropo:

$$q_x = -k_{xx}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - k_{xy}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} - k_{xz}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$q_y = -k_{yx}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - k_{yy}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} - k_{yz}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$q_z = -k_{zx}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - k_{zy}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} - k_{zz}(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

Da questo caso si possono far discendere quelli di mezzo non omogeneo ed anisotropo con x, y e z direzioni principali di permeabilità:

$$q_x = -k_x(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$q_y = -k_y(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$q_z = -k_z(x, y, z) \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

e di mezzo non omogeneo ed isotropo, per cui si ha:

$$k_x(x, y, z) = k_y(x, y, z) = k_z(x, y, z) = k(x, y, z)$$

Ad ognuno di questi casi corrisponde una diversa equazione del moto di filtrazione in condizioni stazionarie, che si ottiene sviluppando l'equazione di continuità.



## FLUSSO STAZIONARIO moto unidirezionale

$$\nabla^2(h) = 0$$

Nei caso di flusso unidirezionale l'equazione indicata trova una soluzione in forma chiusa. Infatti, detta  $z$  la direzione del flusso essa si specializza in:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial z} = c \Rightarrow h = d + c \cdot z$$

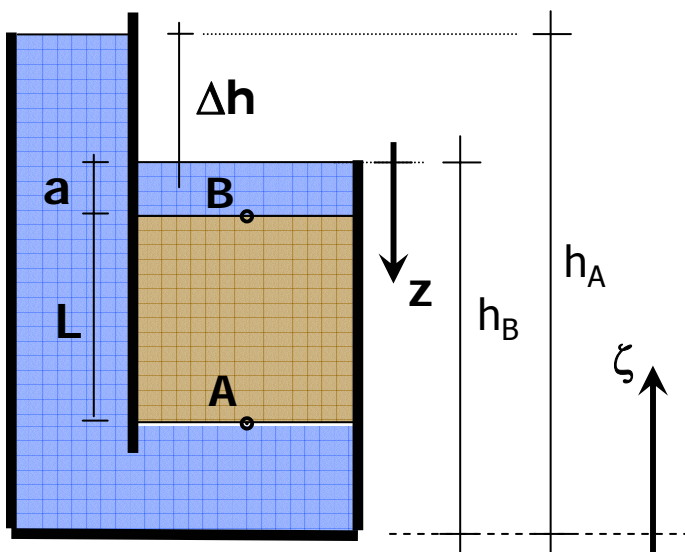
Le costanti  $c$  (= cadente piezometrica) e  $d$  vanno specializzate caso per caso, in funzione delle condizioni idrauliche al contorno.

Inoltre, essendo:  $u = (h - \zeta) \cdot \gamma_w$

in cui  $\zeta$  varia linearmente con  $z$ , anche la  $u(z)$  è lineare:

$$u = \underline{d} + \underline{c} \cdot z$$

Ovviamente, anche le costanti  $\underline{c}$  e  $\underline{d}$  vanno specializzate in funzione delle condizioni idrauliche al contorno.



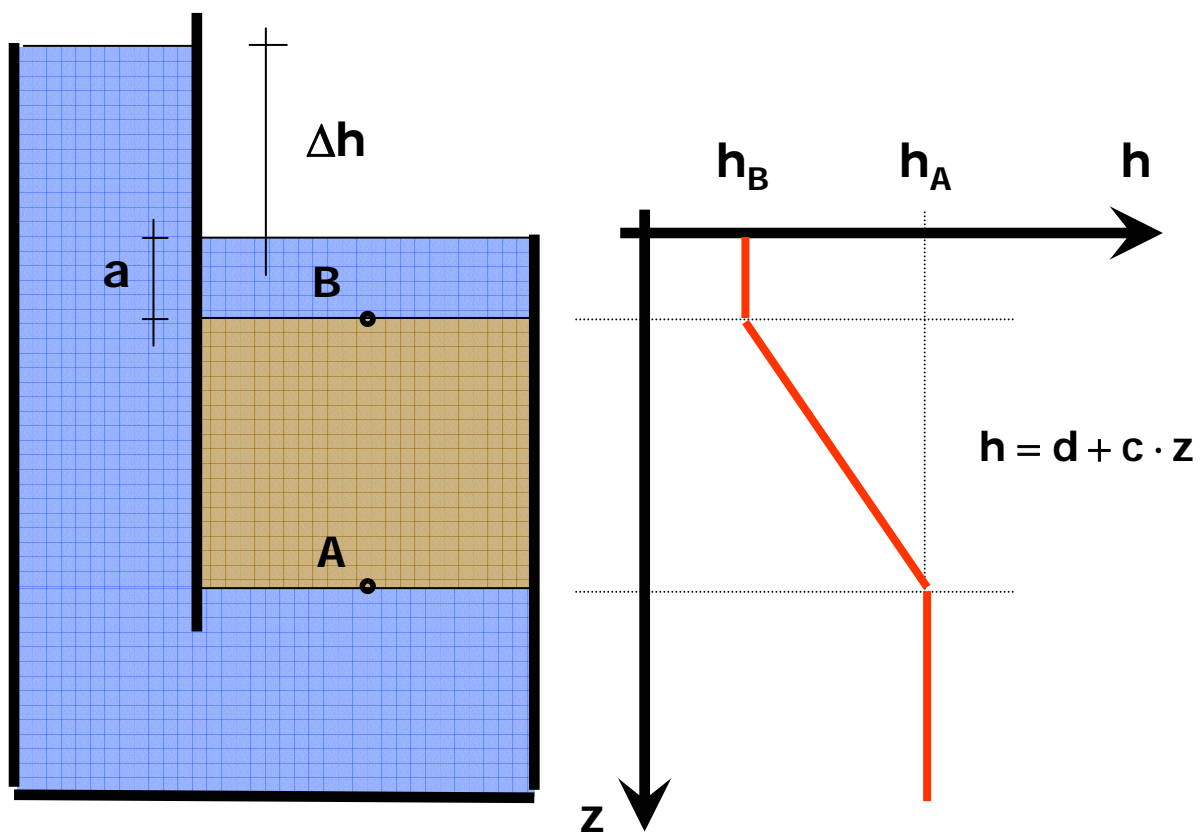
Nel caso in figura:

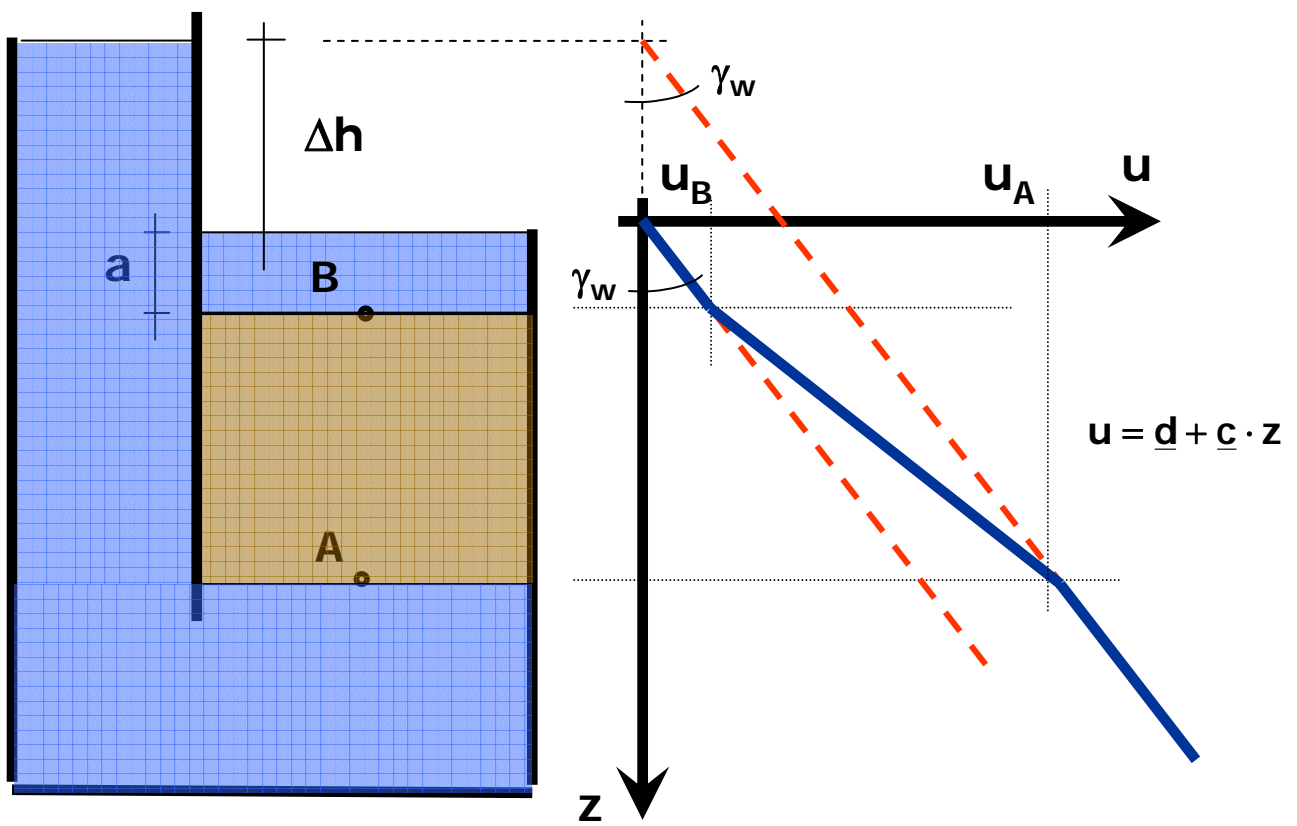
$$h = h_B \text{ per } z = a$$

$$h = h_A \text{ per } z = L + a$$

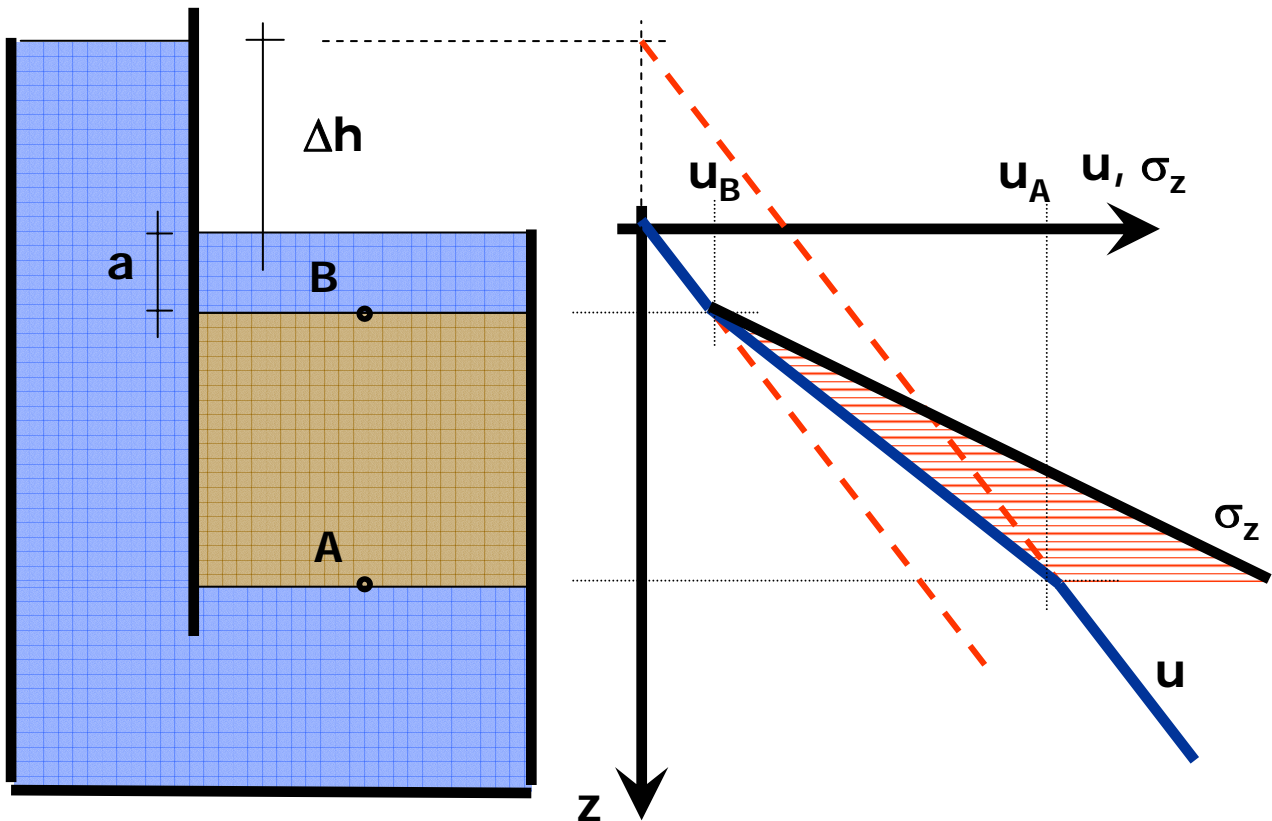
$$u = \gamma_w \cdot a \text{ per } z = a$$

$$u = \gamma_w \cdot (a + \Delta h + L) \text{ per } z = L + a$$





## SIFONAMENTO



$$\sigma_z = \gamma_w \cdot a + \gamma_{\text{sat}} \cdot (z - a)$$

$$u = \gamma_w \cdot z + \gamma_w \cdot \frac{\Delta h}{L} \cdot (z - a) = \gamma_w \cdot z + \gamma_w \cdot j \cdot (z - a)$$

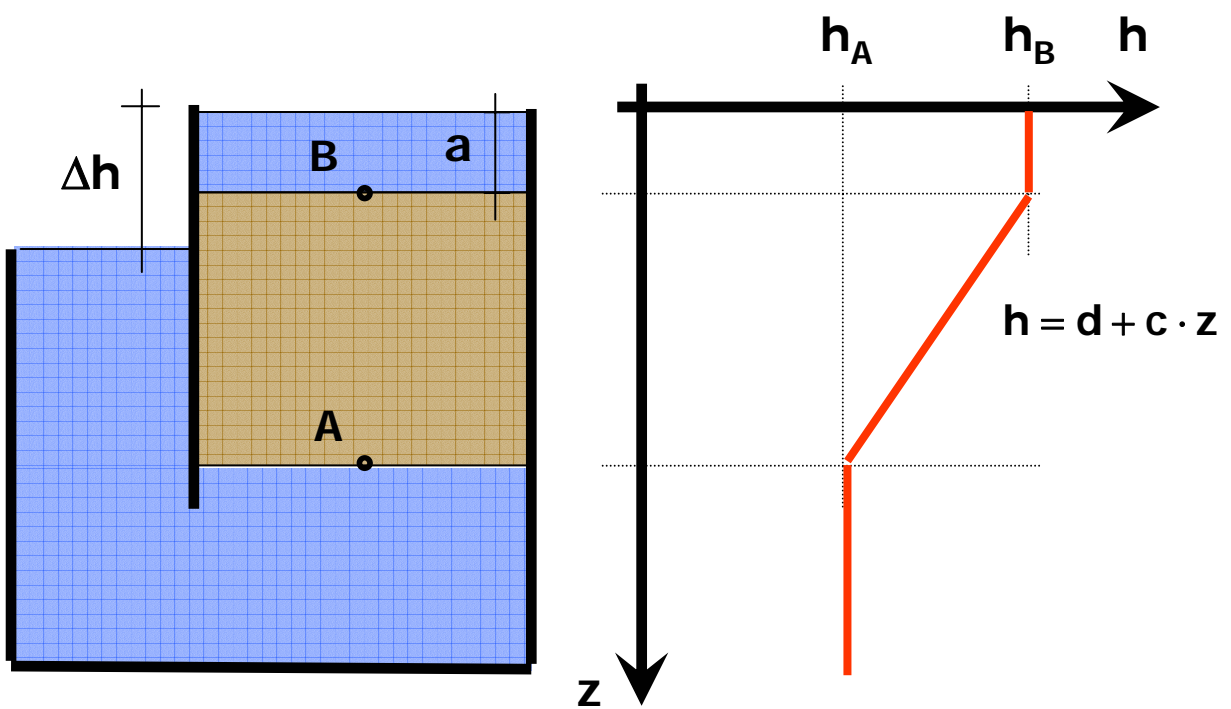
$$\begin{aligned} \sigma'_z &= \sigma_z - u = \gamma_w \cdot a + \gamma_{\text{sat}} \cdot (z - a) - \gamma_w \cdot z - \gamma_w \cdot j \cdot (z - a) = \\ &= (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) \cdot (z - a) - \gamma_w \cdot j \cdot (z - a) \end{aligned}$$

Le tensioni efficaci si annullano quando:

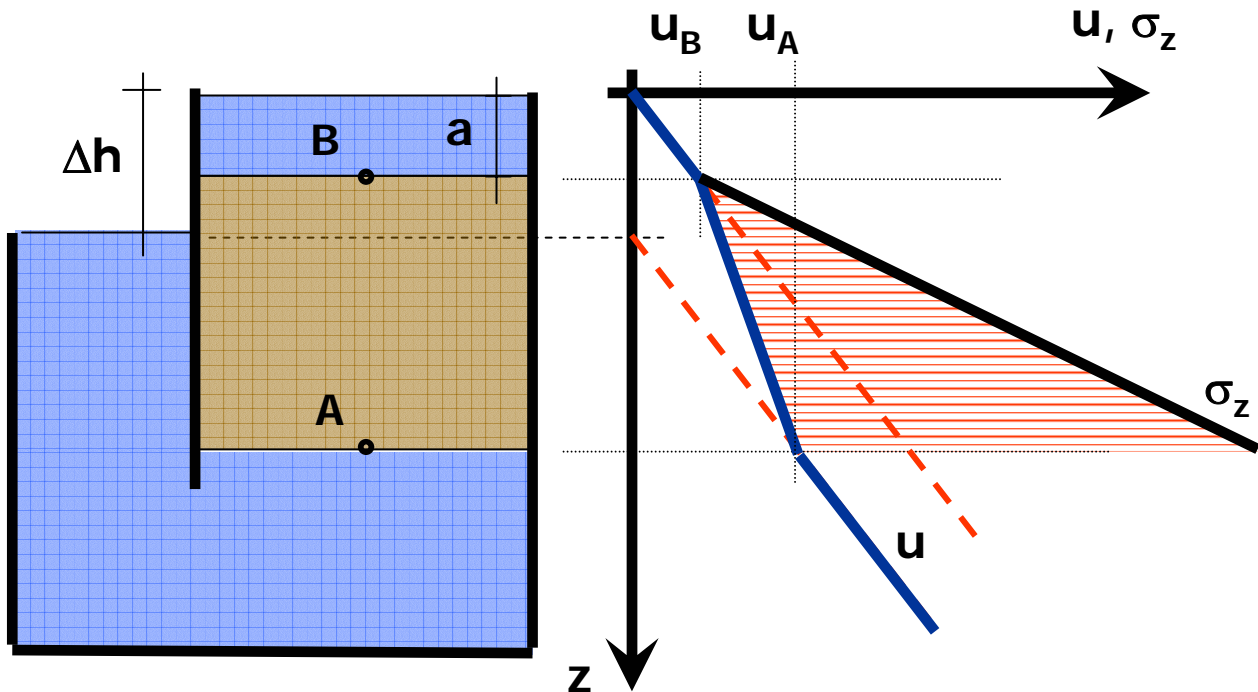
$$(\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) \cdot (z - a) - \gamma_w \cdot j_c \cdot (z - a) = 0$$

pertanto:

$$j_c = \frac{(\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w)}{\gamma_w} = \frac{\gamma'}{\gamma_w}$$



## SUBSIDENZA



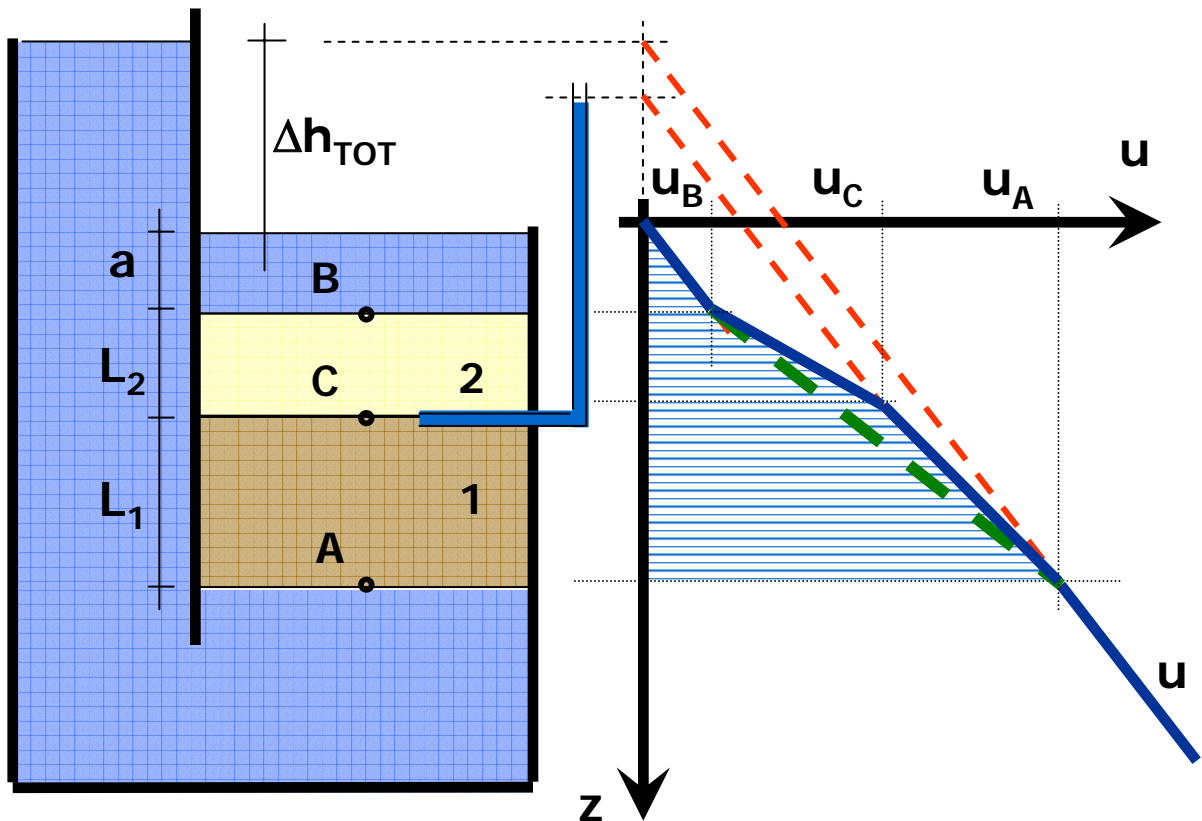
$$\sigma_z = \gamma_w \cdot a + \gamma_{\text{sat}} \cdot (z - a)$$

$$u = \gamma_w \cdot z - \gamma_w \cdot \frac{\Delta h}{L} \cdot (z - a) = \gamma_w \cdot z - \gamma_w \cdot j \cdot (z - a)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_z &= \sigma_z - u = \gamma_w \cdot a + \gamma_{\text{sat}} \cdot (z - a) - \gamma_w \cdot z + \gamma_w \cdot j \cdot (z - a) = \\ &= (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) \cdot (z - a) + \gamma_w \cdot j \cdot (z - a) \end{aligned}$$

Al crescere di  $\Delta h$  le tensioni efficaci aumentano per cui non può aversi sifonamento. Si ha, invece, l'effetto di subsidenza.

$$k_2 < k_1$$



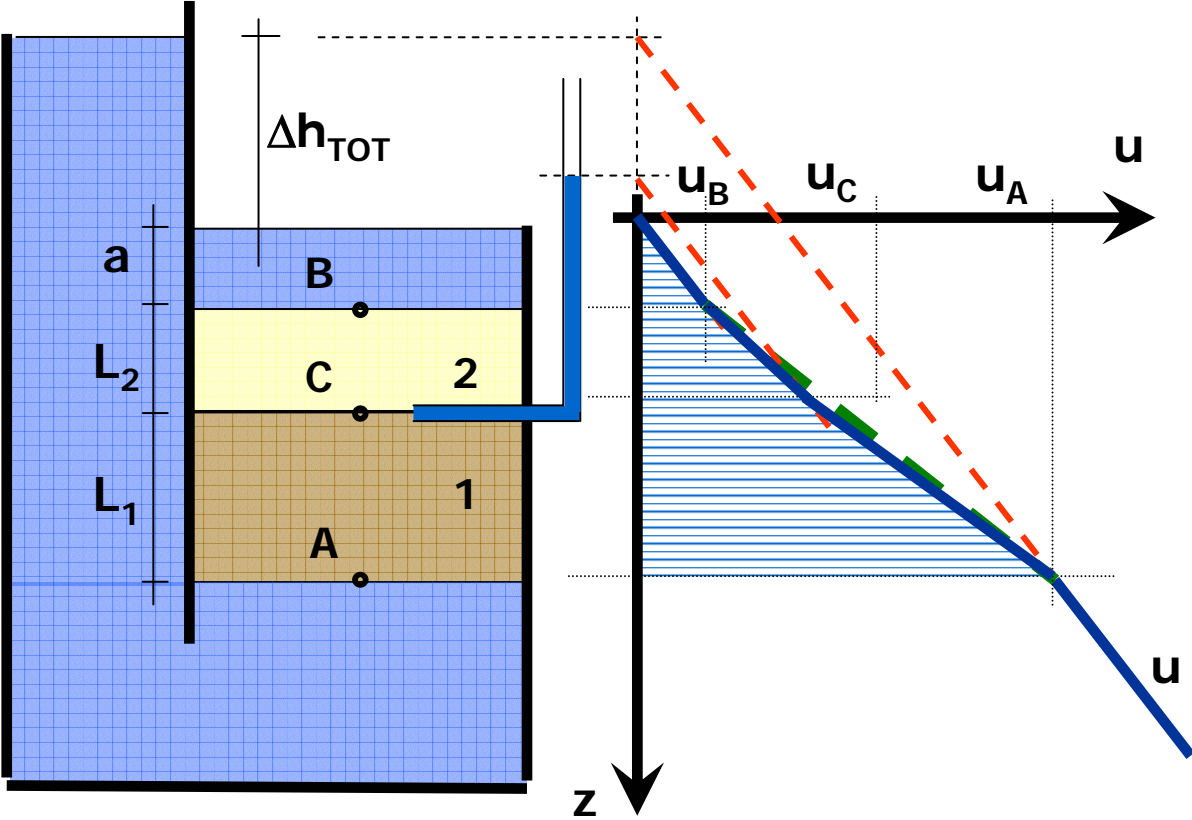
$$q_1 = q_2 = k_1 j_1 = k_2 j_2; \quad k_1 \frac{\Delta h_1}{L_1} = k_2 \frac{\Delta h_2}{L_2}; \quad \frac{k_1}{k_2} \frac{\Delta h_1}{L_1} L_2 = \Delta h_{\text{TOT}} - \Delta h_1$$

$$\Delta h_1 = \Delta h_{\text{TOT}} / \left( \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{L_2}{L_1} + 1 \right); \quad \Delta h_2 = \Delta h_{\text{TOT}} / \left( \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{L_1}{L_2} + 1 \right)$$

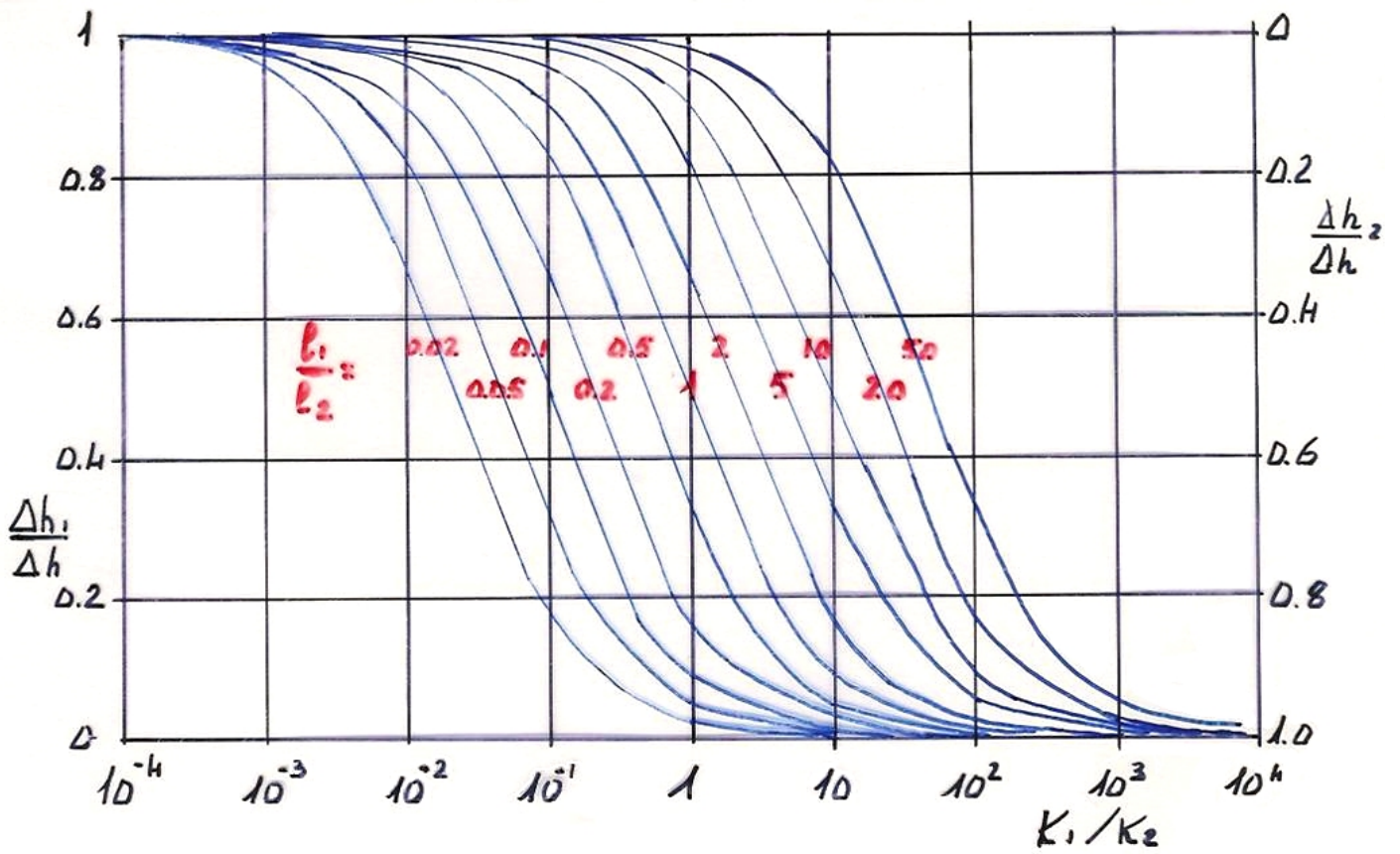
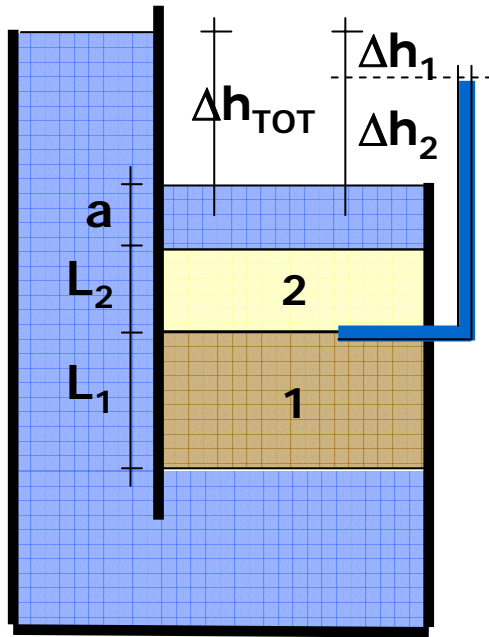
$$\frac{k_2}{L_2} \ll \frac{k_1}{L_1} \Rightarrow \Delta h_2 \approx \Delta h_{\text{TOT}}; \quad \Delta h_1 \approx 0$$

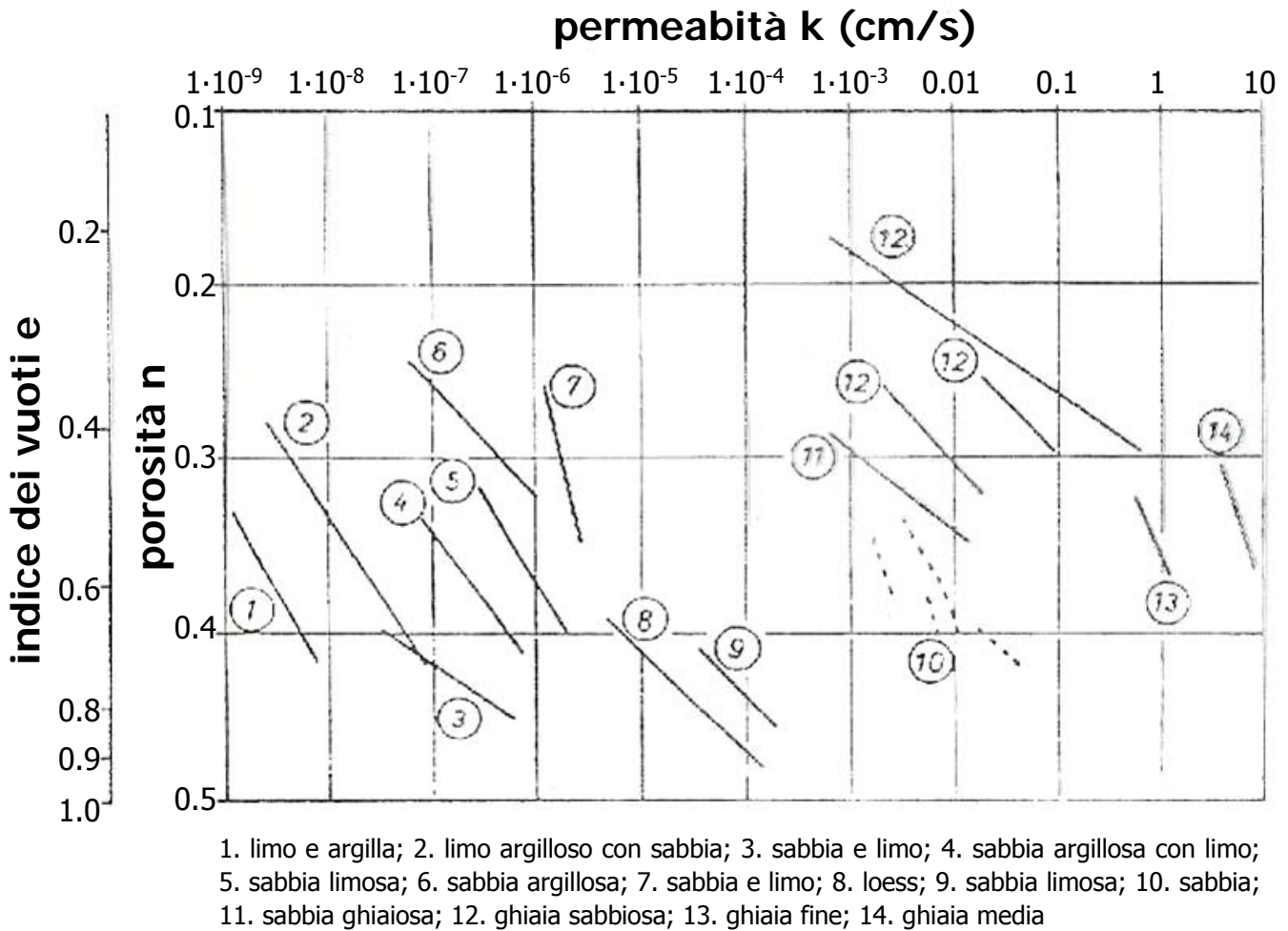
$$j_2 = \frac{\Delta h_2}{L_2} = j_c \Rightarrow \text{sifonamento}$$

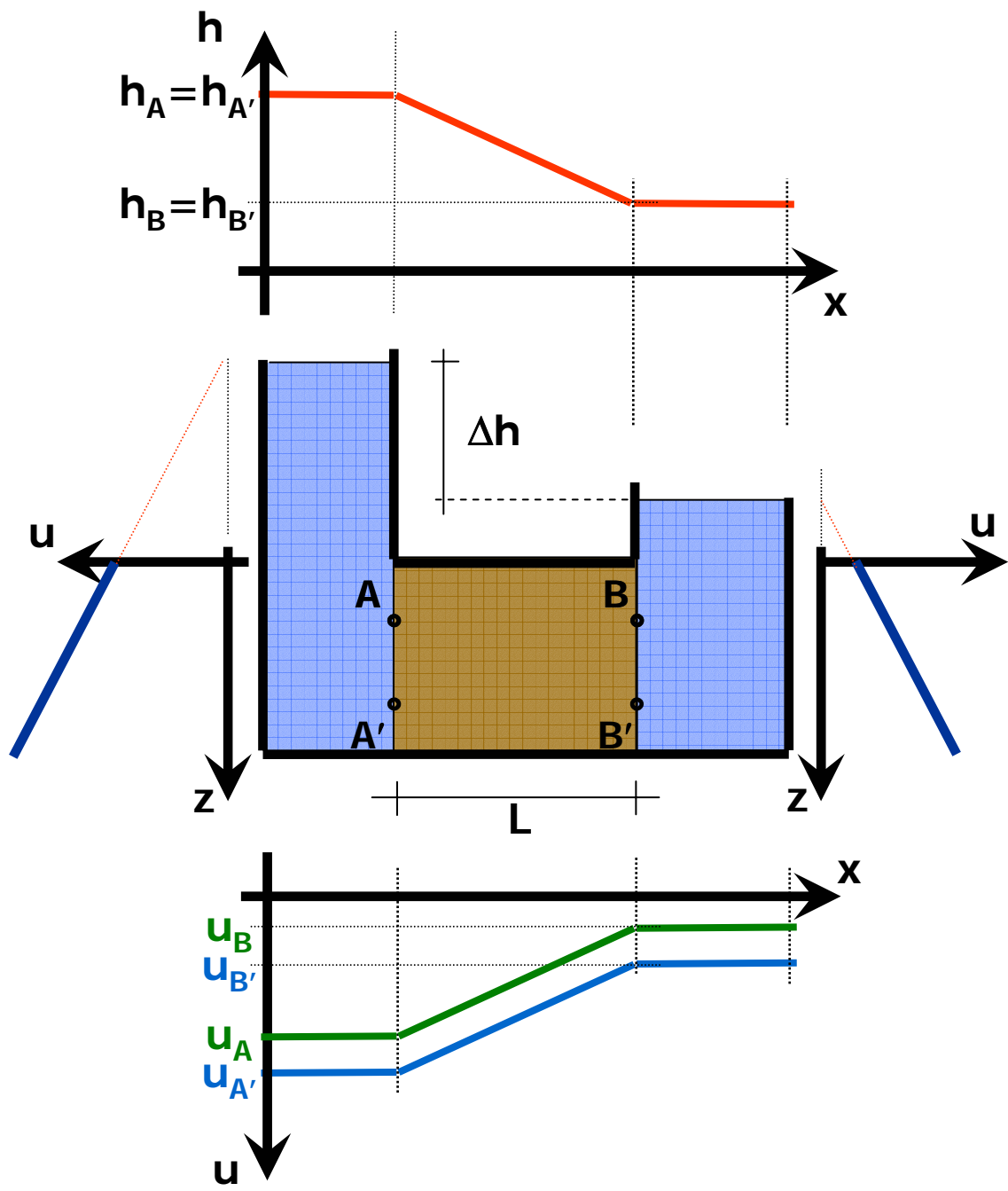
$$k_2 > k_1$$





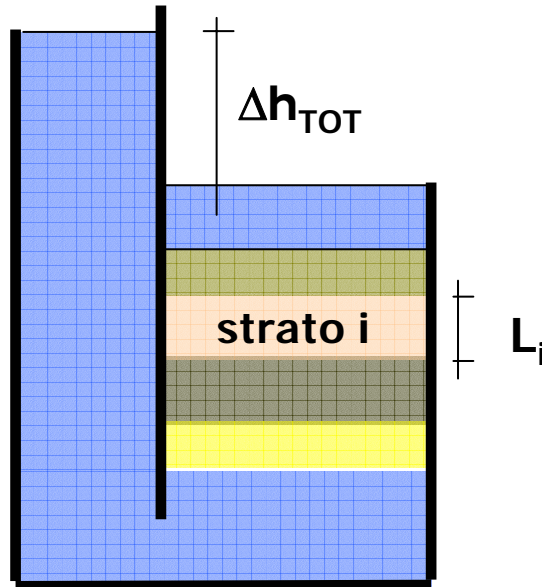






$$\frac{Q}{A} = q_x = k_x \cdot \frac{\Delta h}{L} = k_x \cdot j_x$$

## PERMEABILITÀ EQUIVALENTE DI STRATI ETEROGENEI IN SERIE



$$q_i = k_i \cdot \frac{\Delta h_i}{L_i} = q; \quad \Delta h_i = q \cdot \frac{L_i}{k_i}$$

$$\Delta h_{TOT} = \sum_{i=1}^n \Delta h_i = q \cdot \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i}$$

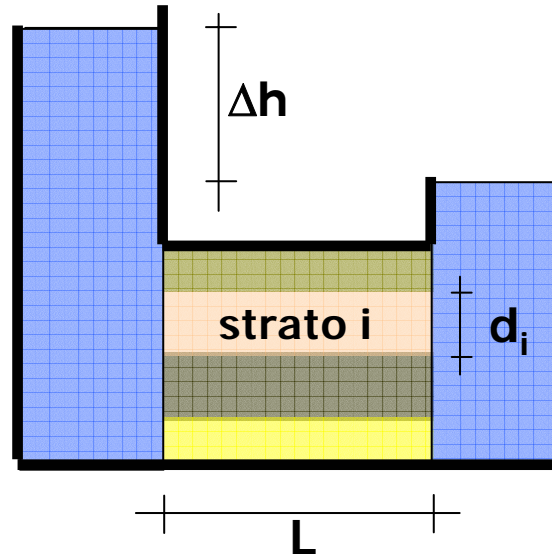
$$\underline{k} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{\sum_{i=1}^n L_i / k_i}$$

$$q = \underline{k} \cdot \frac{\Delta h_{TOT}}{\sum_{i=1}^n L_i}; \quad \Delta h_{TOT} = \frac{q}{\underline{k}} \cdot \sum_{i=1}^n L_i$$

Ad esempio con 2 strati di uguale spessore e permeabilità  $k_1=10^{-1}$  cm/s e  $k_2=10^{-5}$  cm/s si ottiene:

$$\underline{k} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$$

## PERMEABILITÀ EQUIVALENTE DI STRATI ETEROGENEI IN PARALLELO



$$Q_i = k_i \cdot \frac{\Delta h}{L} \cdot d_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{\Delta h}{L} \sum_{i=1}^n k_i \cdot d_i$$



$$\underline{k} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n d_i}$$

$$Q = \underline{k} \cdot \frac{\Delta h}{L} \sum_{i=1}^n d_i$$

Ad esempio con 2 strati di uguale spessore e permeabilità  $k_1=10^{-1}$  cm/s e  $k_2=10^{-5}$  cm/s si ottiene:

$$\underline{k}=0.5 \cdot 10^{-1} \text{ cm/s}$$

## FLUSSO STAZIONARIO

### moto nel piano

$$\nabla^2(h) = 0$$

Nel caso di moti piani di filtrazione (di notevole interesse per le opere geotecniche a notevole sviluppo lineare) l'equazione di Laplace non trova una soluzione in forma chiusa. Infatti, detto  $(x, z)$  il piano del moto essa si specializza in:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

La soluzione può essere ottenuta, per esempio, discretizzando il dominio in  $N$  nodi ed applicando procedure alle differenze finite.

Di fatto si esprimono le derivate di  $h$  in un generico punto mediante i valori nei punti nel suo intorno, fino a raggiungere il contorno del dominio, dove saranno note le condizioni ai limiti. Operando in tal modo si costruisce un sistema di  $N$  equazioni in  $N$  incognite che, risolto, restituisce i valori di  $h$  (e quindi di  $u$ ) negli  $N$  punti selezionati.

Codici di calcolo che operano in tal modo sono oggi disponibili sul mercato. Per favorirne un uso assennato conviene introdurre il metodo delle **reti idrodinamiche**: pur se oggi non più conveniente, questo metodo permette di seguire passo dopo passo ciò che accade in un caso di filtrazione piano e, quindi, migliora la capacità di giudizio sui risultati ottenuti con codici di calcolo "a scatola chiusa".

## RETI IDRODINAMICHE A MAGLIE REGOLARI moto nel piano

Una rete idrodinamica è costituita da:

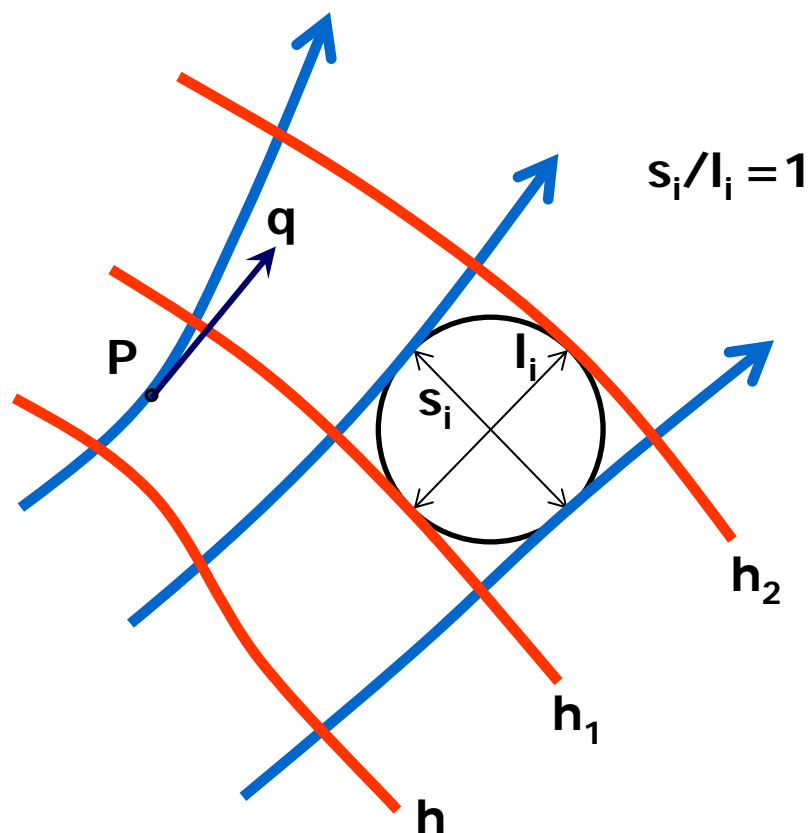
- **isopieziche** = linee ad  $h = \zeta + u/\gamma_w = \text{costante}$ ;
- **linee di flusso** = traiettorie delle particelle d'acqua, dove in ogni punto P l'unica componente della velocità di filtrazione non nulla è tangente alla traiettoria (cioè,  $q_t \neq 0$ ;  $q_n = 0$ ).

In un mezzo isotropo nei confronti della permeabilità:

$$\vec{q} = k \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(-h)$$

pertanto isopieziche e linee di flusso si intersecano a  $90^\circ$ .

In figura, ad esempio, è rappresentata parte di una rete idrodinamica a maglie quadrate in un mezzo isotropo.



Con riferimento alla numerazione delle maglie ed alla simbologia in figura, in una rete idrodinamica a maglie regolari si può scrivere:

$$Q_1 = k \cdot \frac{\Delta h_{01}}{l_1} \cdot s_1 \cdot 1 = k \cdot \frac{\Delta h_{12}}{l_2} \cdot s_2 \cdot 1$$

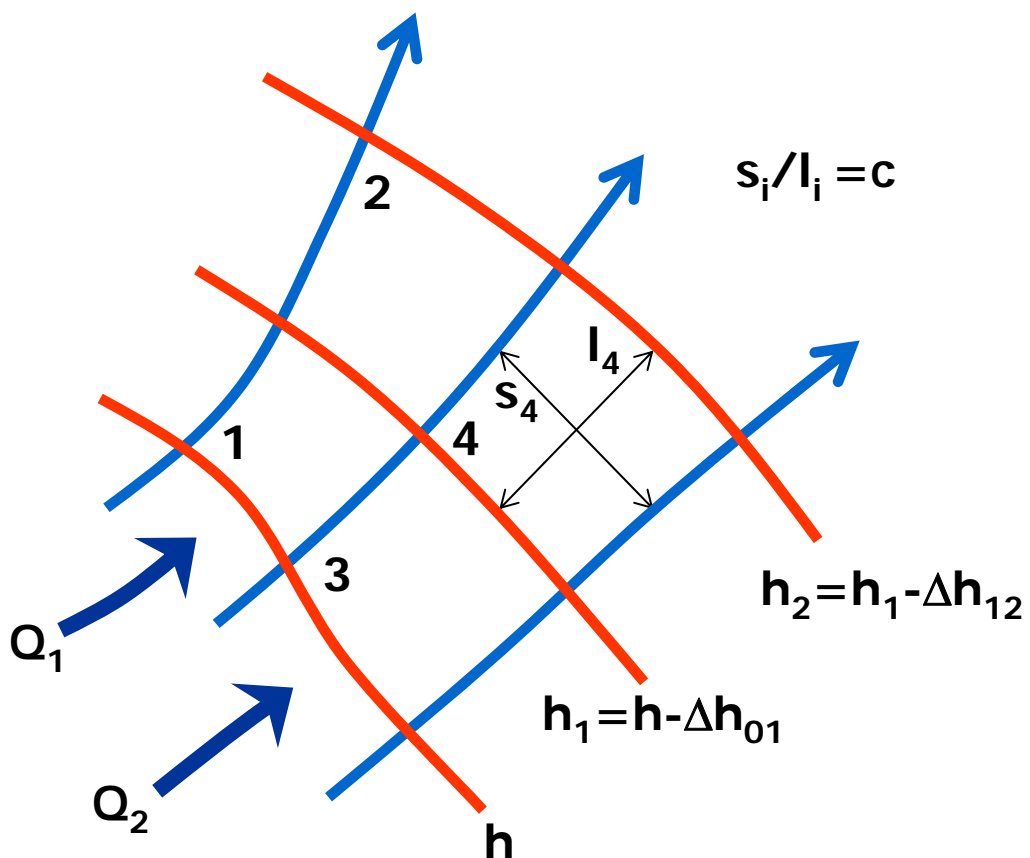
Essendo il rapporto  $s_i/l_i = \text{costante} = c$ :

$$\Delta h_{01} = \Delta h_{12} = \Delta h$$

**IN UNA RETE IDRODINAMICA A MAGLIE REGOLARI  
LA VARIAZIONE DI QUOTA PIEZOMETRICA TRA LE  
ISOPIEZICHE È COSTANTE.**

Disegnata una rete costituita da  $n$  isopieziche, il salto totale  $\Delta H$  è ugualmente ripartito in  $(n-1)$  salti:

$$\Delta h = \Delta H / (n-1).$$





Con riferimento alle portate che attraversano i diversi tubi di flusso, risulta:

$$Q_1 = k \cdot \frac{\Delta h}{l_1} \cdot s_1$$

$$Q_2 = k \cdot \frac{\Delta h}{l_3} \cdot s_3$$

Ancora una volta essendo il rapporto  $s_i/l_i = \text{costante} = c$ :

$$Q_1 = Q_2 = Q_i = k \cdot \Delta h \cdot c$$

**IN UNA RETE IDRODINAMICA A MAGLIE REGOLARI  
LA PORTATA ATTRAVERSO I DIVERSI TUBI DI  
FLUSSO È COSTANTE.**

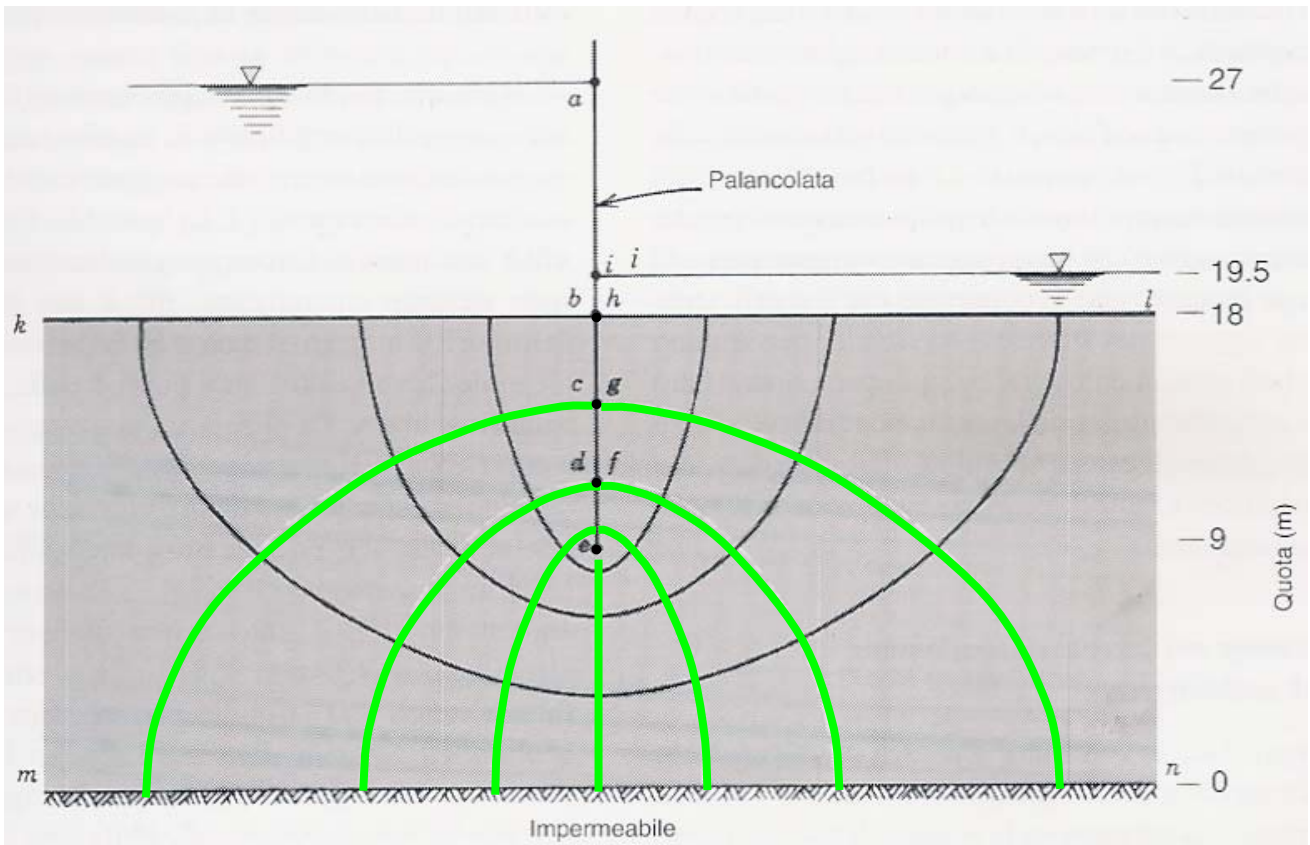
Se la rete idrodinamica è costituita da  $m$  tubi di flusso, la portata totale  $Q$  vale:

$$Q = m \cdot Q_i = m \cdot k \cdot \Delta h \cdot c = m \cdot k \cdot \frac{\Delta H}{(n-1)} \cdot c$$

**Nel caso delle reti a maglie quadre:**

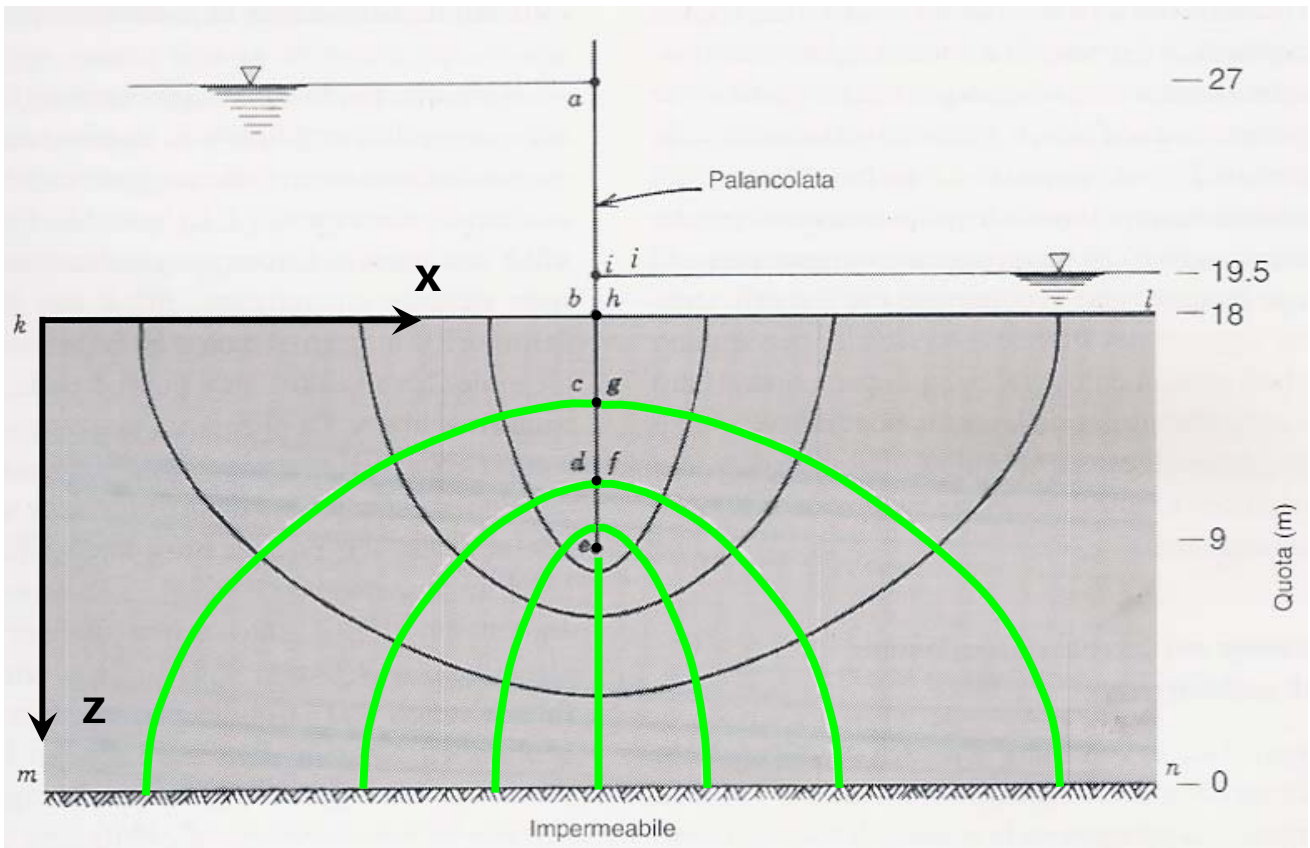
$$c = 1; \quad Q = m \cdot k \cdot \frac{\Delta H}{(n-1)}$$

Si consideri ad esempio il caso in figura in cui è tracciata una rete idrodinamica a maglie quadre in un mezzo isotropo ed omogeneo nei confronti della permeabilità.



**Nel tracciare la rete occorre rispettare le condizioni idrauliche al contorno. Nel caso specifico:**

- ***kb* ed *hl* sono isopieziche, pertanto, le linee di flusso devono partire verticali da *kb* ed arrivare verticali su *hl*.**
- ***be*, *eh* ed *mn* sono linee di flusso, pertanto, le isopieziche devono partire orizzontali da *be* ed *eh*, ed arrivare verticali su *mn*.**



**Dal punto di vista analitico:**

**isopieziche**  $kb \Rightarrow h = h_a$   
 $hl \Rightarrow h = h_i$

**linee di flusso**  $be \Rightarrow \partial h / \partial x = 0$   
 $eh \Rightarrow \partial h / \partial x = 0$

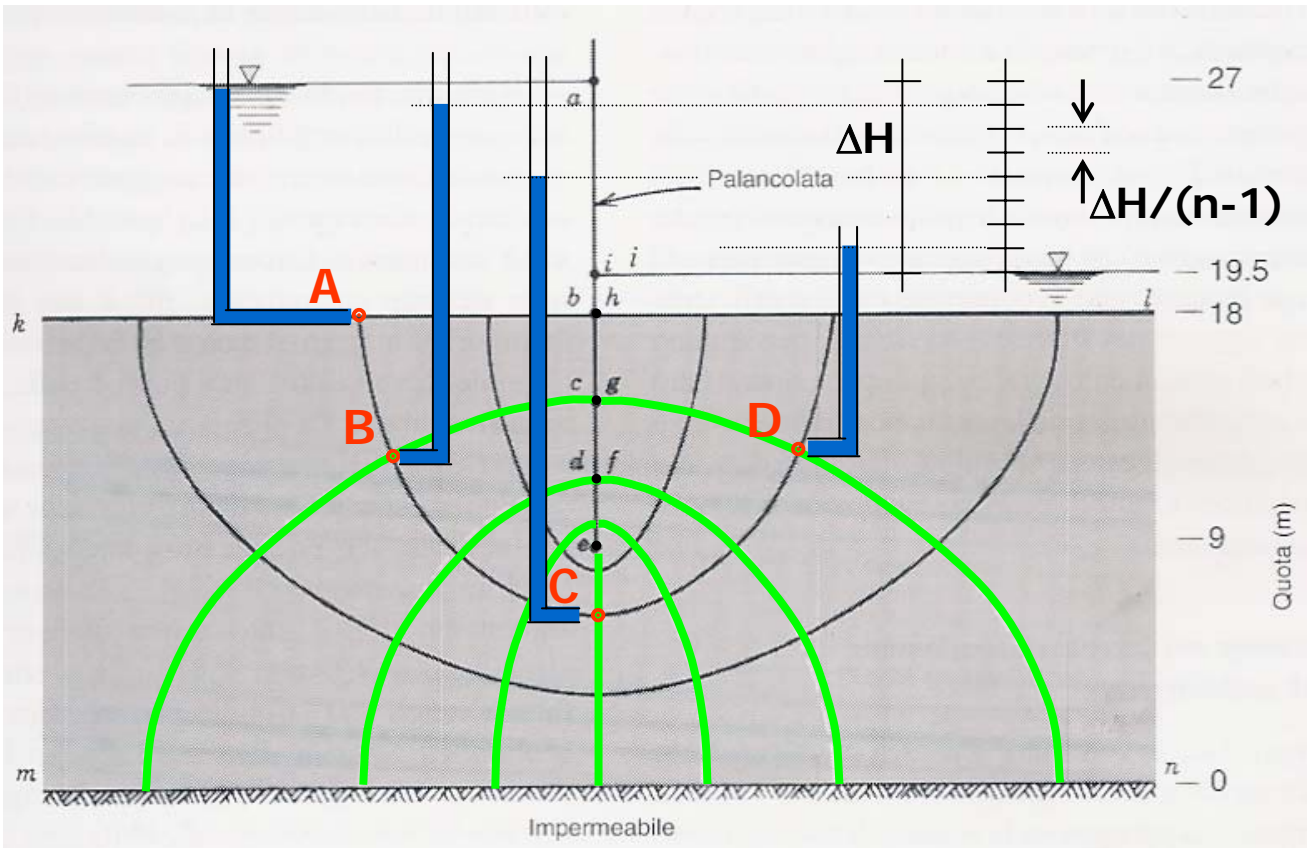
$mn \Rightarrow \partial h / \partial z = 0$

Occorrerebbe inoltre specificare le condizioni idrauliche al contorno lungo le linee  $km$  e  $ln$ .

Se sufficientemente distanti dall'opera [cioè,  $x_b \geq (2 \div 3) \cdot z_m$ ;  $x_l \geq (4 \div 6) \cdot z_m$ ] tali linee possono essere considerate isopieziche. In altre parole si può ritenere che lungo esse non si risenta del moto di filtrazione, e dunque:

$km \Rightarrow h = h_a$

$ln \Rightarrow h = h_i$



La rete è composta da  $n = 9$  isopieziche e  $m = 4$  tubi di flusso, pertanto:

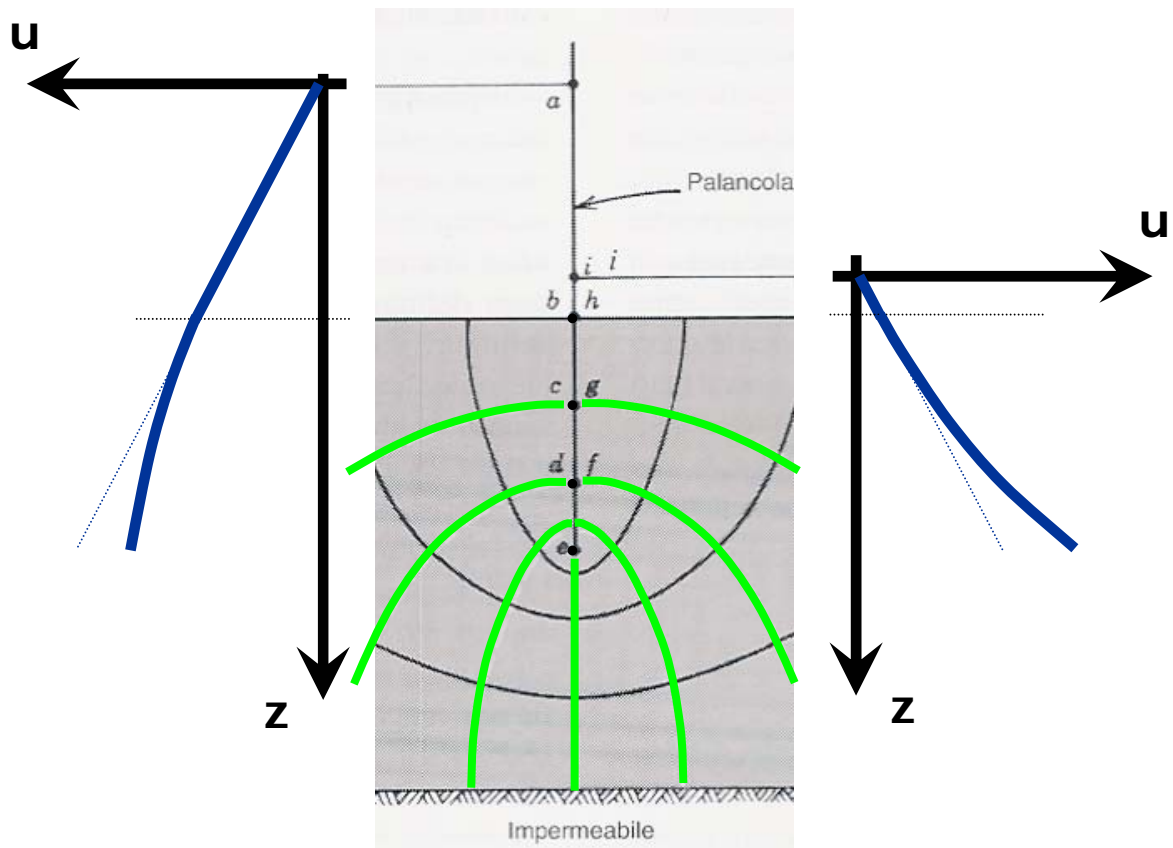
$$\Delta h = \Delta H / (n - 1) = \Delta H / 8$$

quindi:  $h_A = h_{kb}$ ;  $h_B = h_{kb} - 1 \cdot \Delta h$ ;  $h_C = h_{kb} - 4 \cdot \Delta h$

Si noti che:  $h_D = h_{kb} - 7 \cdot \Delta h = h_{hl} + 1 \cdot \Delta h$

È quindi possibile attribuire la quota piezometrica ( $h$ ) a ciascuna delle isopieziche della rete, e valutare la pressione interstiziale mediante la relazione:

$$u = (h - \zeta) \cdot \gamma_w$$

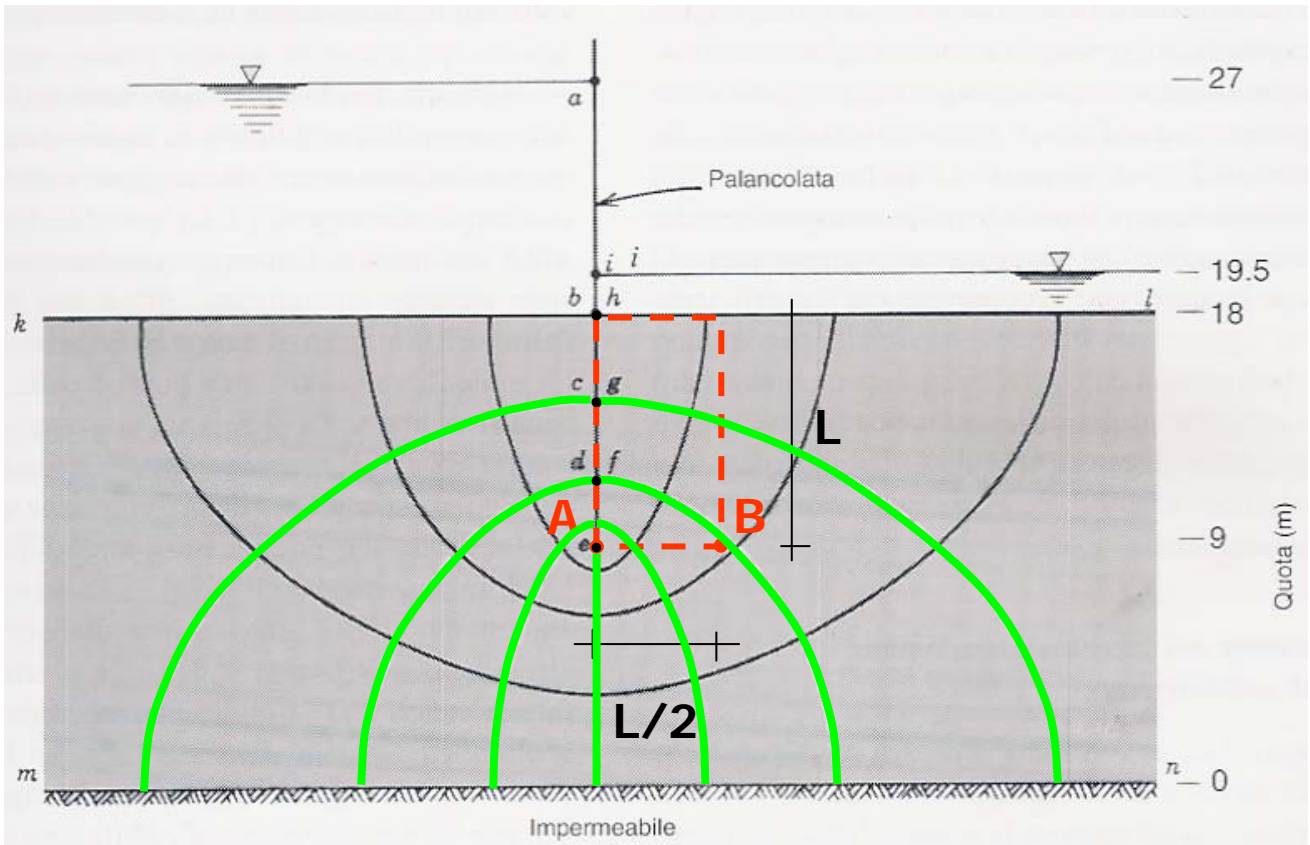


Rispetto alle pressioni idrostatiche riferite al pelo libero dell'acqua a monte ed a valle del moto di filtrazione (vedi linee tratteggiate), risulta che:

- nella zona di **monte** la pressione è **meno che idrostatica**;
- nella zona di **valle** la pressione è **più che idrostatica**.

**NELLA ZONA DI VALLE PUÒ DUNQUE VERIFICARSI IL SIFONAMENTO, SE I GRADIENTI IDRAULICI SONO TALI DA RIDURRE ECCESSIVAMENTE LE TENSIONI EFFICACI**

Per verificare la sicurezza al sifonamento, Terzaghi consiglia di prendere in considerazione il volume (a valle dell'opera) evidenziato in figura.

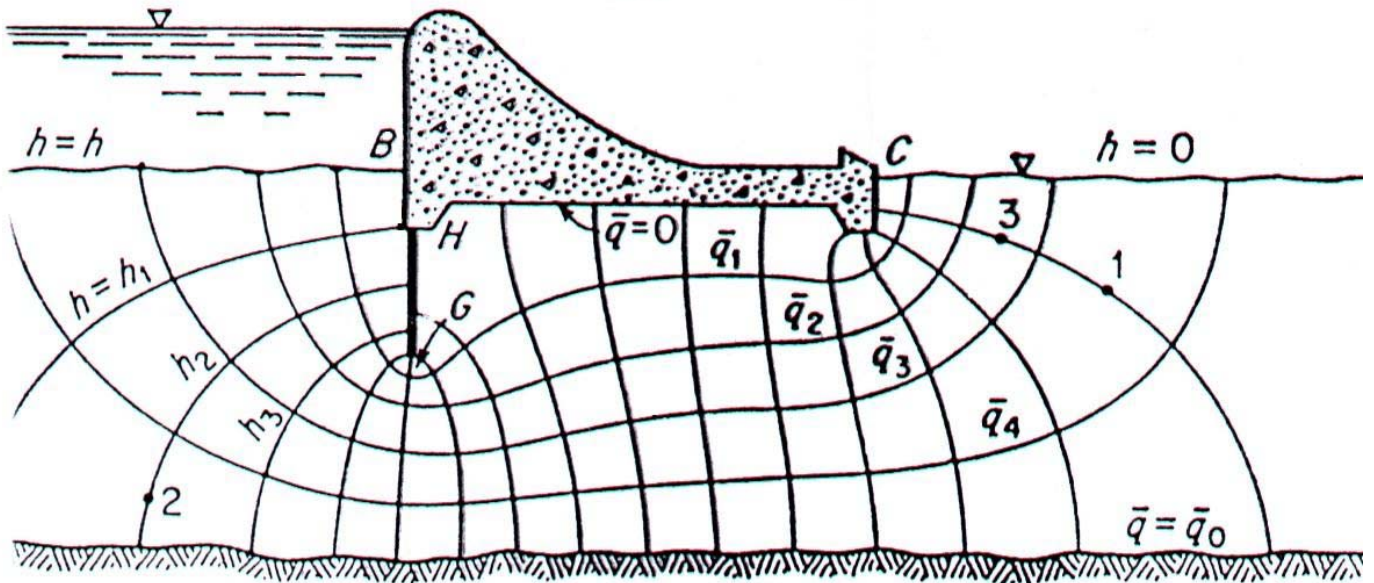


In particolare, indicata con  $\underline{h}$  la quota piezometrica media lungo la linea AB, Terzaghi consiglia di verificare che:

$$\frac{\underline{h} - h_i}{L} \leq \frac{1}{3} \cdot j_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma'}{\gamma_w}$$



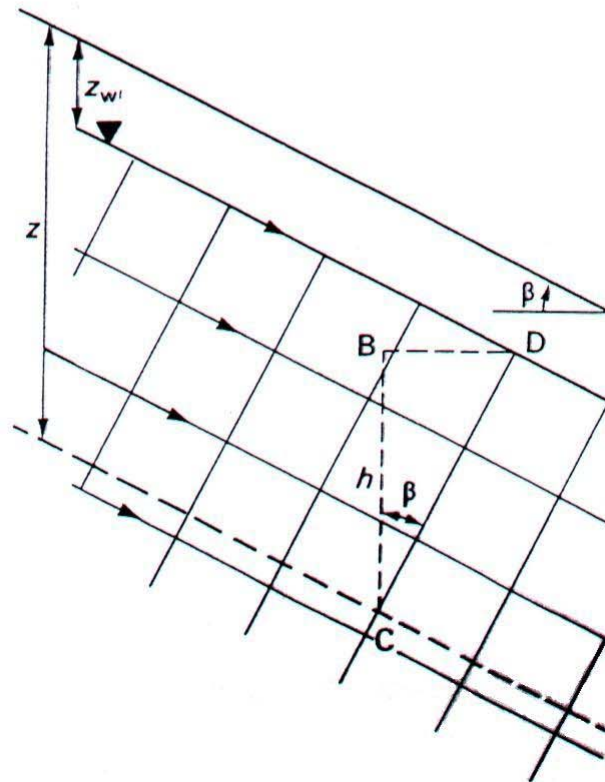
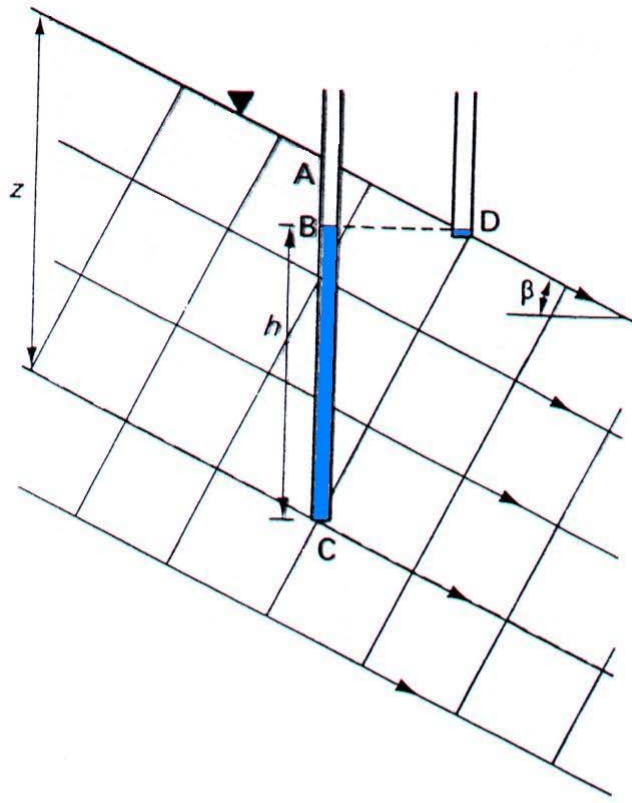
## Suggerimenti per costruire una rete a maglie quadre



1. Cominciare dai contorni sui quali siano noti gli andamenti delle quote piezometriche o le condizioni di flusso.
2. Cominciare a tracciare soltanto qualche linea di flusso tenendo conto del fatto che la loro spaziatura aumenta all'aumentare del raggio di curvatura.
3. Tracciare le prime equipotenziali tenendo conto del fatto che devono intersecare le linee di flusso con angoli retti e che le figure geometriche definite devono essere quadrati curvilinei (\*).
4. Riaggiustare le prime linee di flusso e le prime equipotenziali in modo che siano soddisfatte le condizioni in (3). Quindi aggiungere nuove linee di flusso e nuove equipotenziali.
5. Come controllo finale tracciare le diagonali dei quadrati: queste devono formare due famiglie di curve che si intersecano perpendicolarmente.

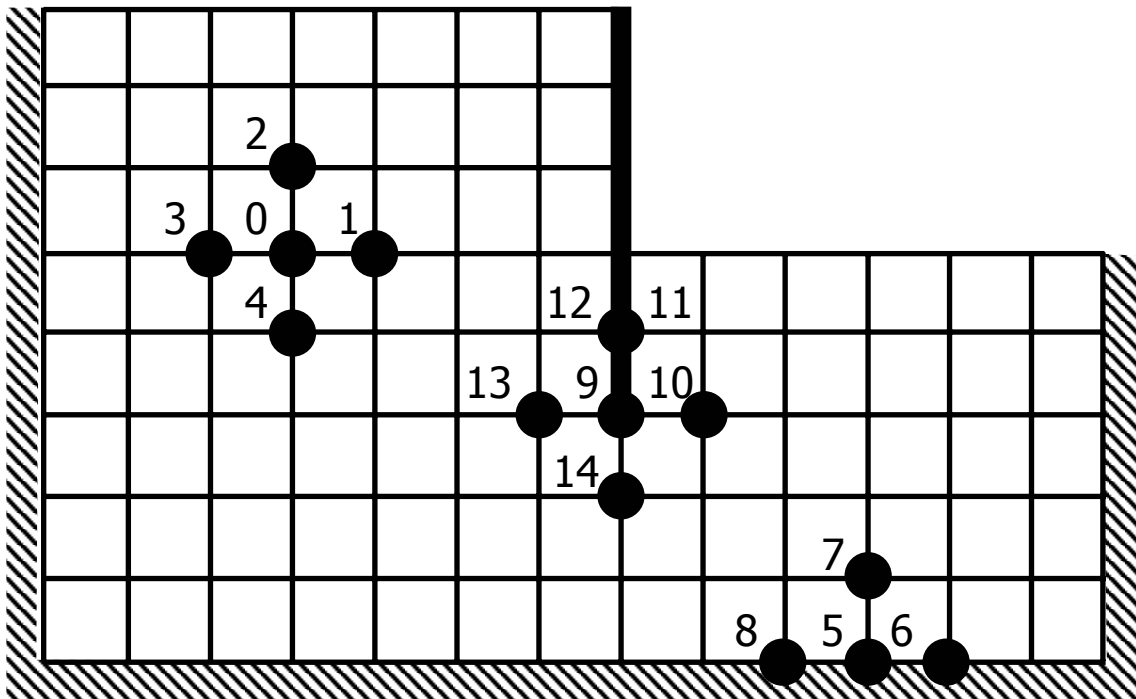
(\*) In zone singolari questo non è possibile (per esempio in G e in H). In ogni caso, incrementando il numero delle maglie l'estensione delle zone singolari si riduce e tende al limite a zero.

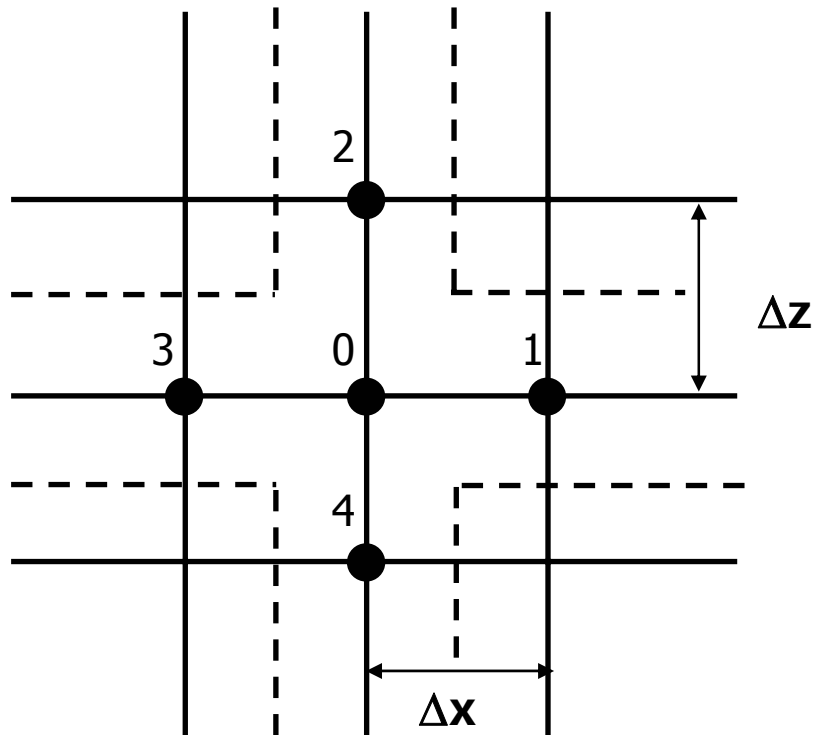
# Pendio indefinito





## Risoluzione dell'equazione di Laplace con il metodo delle differenze finite





$$h_1 = h_0 + \Delta x \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_0 + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_0 + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \left( \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)_0 + \dots$$

$$h_3 = h_0 - \Delta x \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_0 + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_0 - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \left( \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)_0 + \dots$$

Analoghe equazioni sono valide per  $h_2$  e  $h_4$  (in direzione  $z$ ).

Sommando membro a membro e trascurando i termini del IV ordine si ha:

$$\left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{h_1 + h_3 - 2 \cdot h_0}{(\Delta x)^2}; \quad \left( \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{h_2 + h_4 - 2 \cdot h_0}{(\Delta z)^2}$$

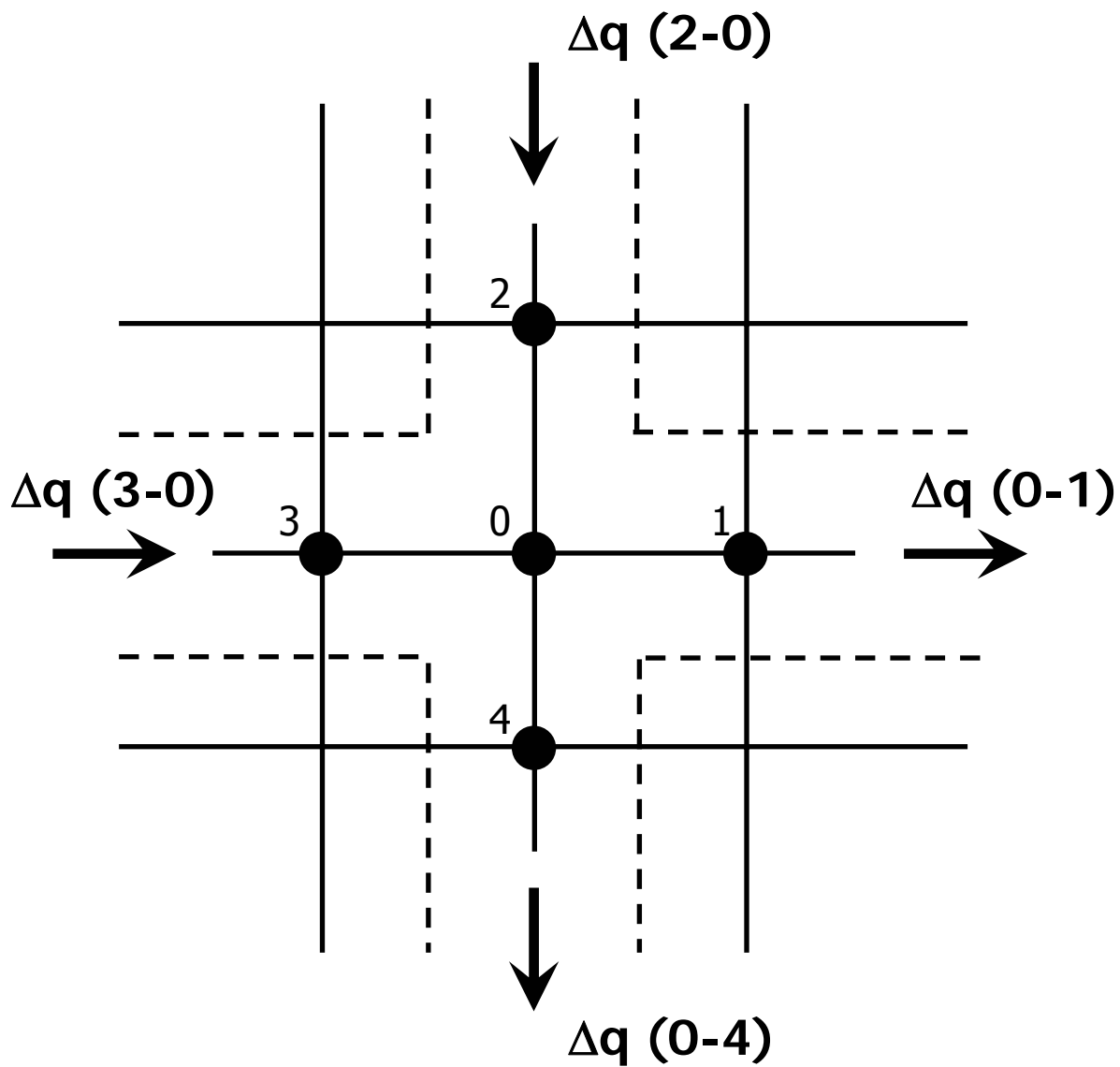
Quindi, l'equazione di Laplace nel punto 0 diventa:

$$\frac{h_1 + h_3 - 2 \cdot h_0}{(\Delta x)^2} + \frac{h_2 + h_4 - 2 \cdot h_0}{(\Delta z)^2} = 0$$

Se  $\Delta x = \Delta z$ :

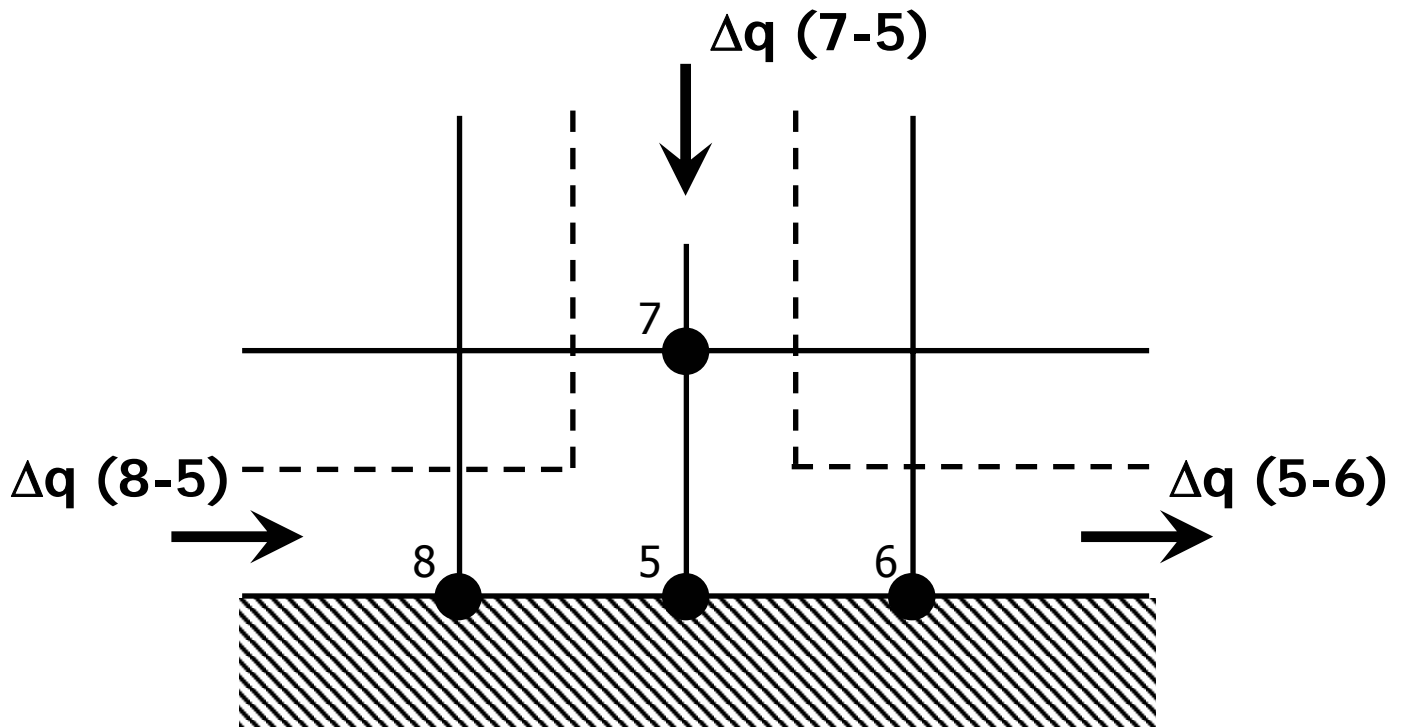
$$\boxed{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4 \cdot h_0 = 0}$$

Si può ottenere la stessa equazione come conseguenza della continuità.

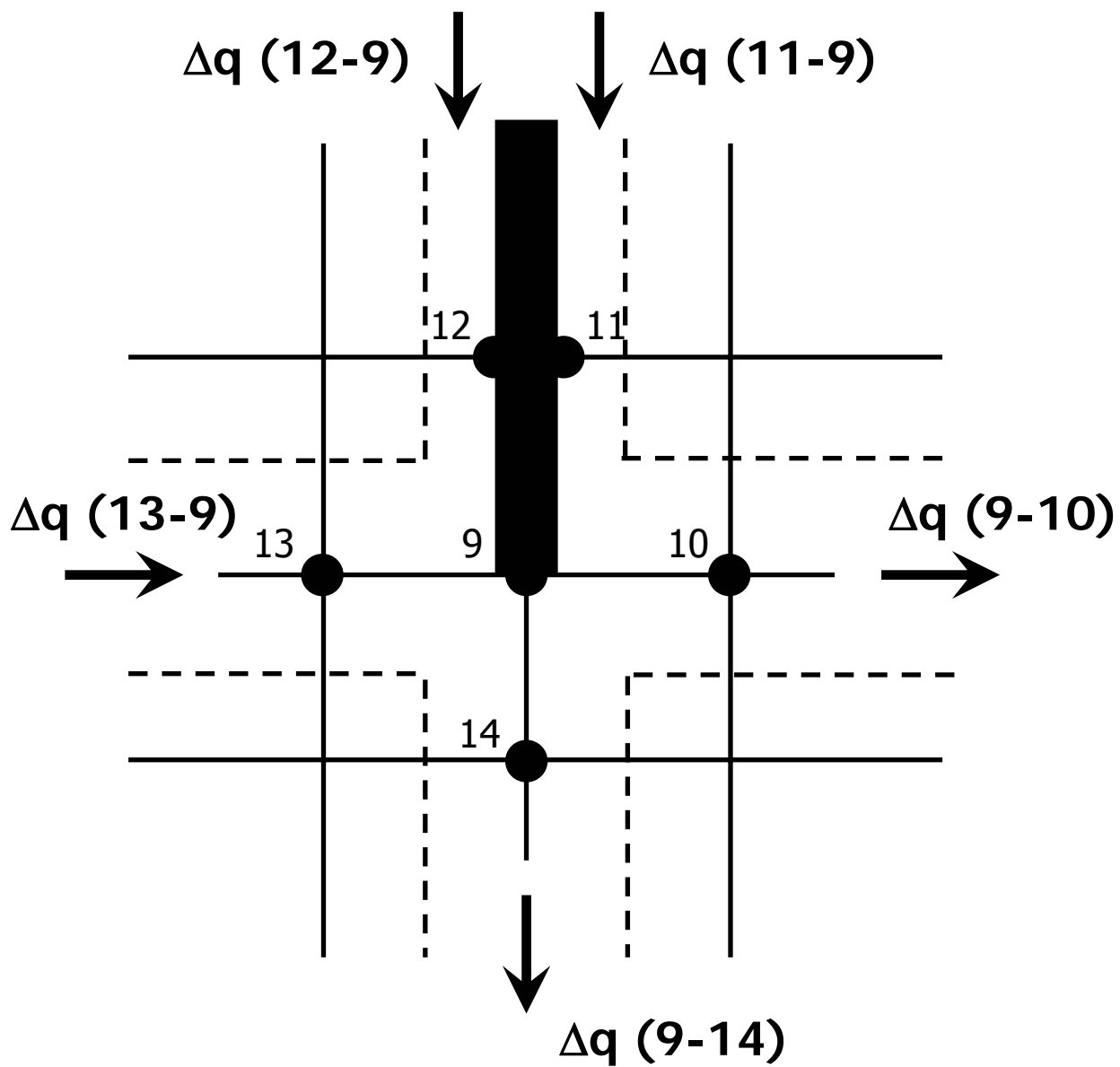


$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4 \cdot h_0 = 0$$

Si procede analogamente per i punti che si trovano sul contorno del dominio di filtrazione.



$$\frac{h_8}{2} + \frac{h_6}{2} + h_7 - 2 \cdot h_5 = 0$$

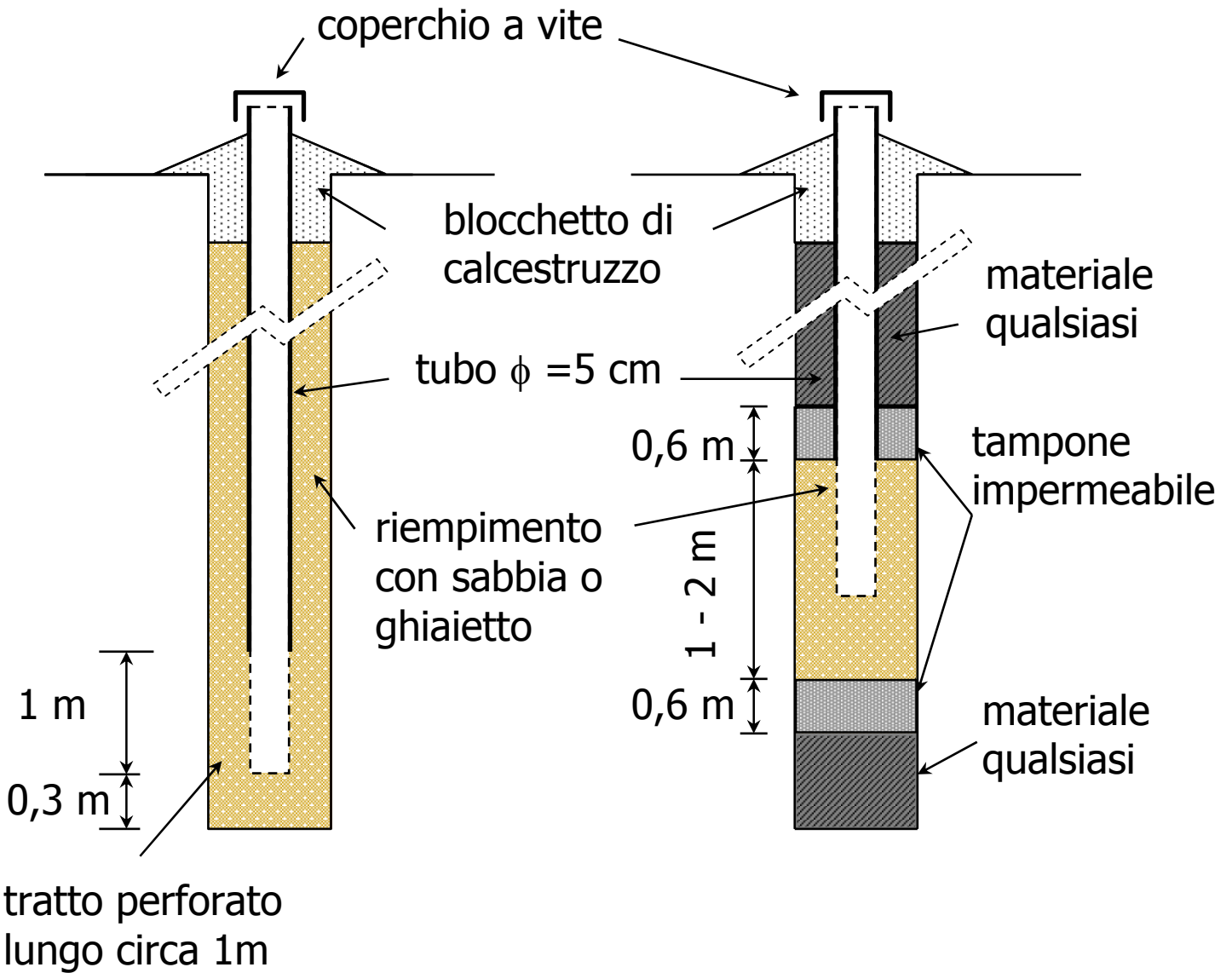


$$\begin{aligned} & (h_{13} - h_9) - (h_9 - h_{10}) + (h_{14} - h_9) \\ & - \frac{h_9 - h_{12}}{2} - \frac{h_9 - h_{11}}{2} = 0 \end{aligned}$$

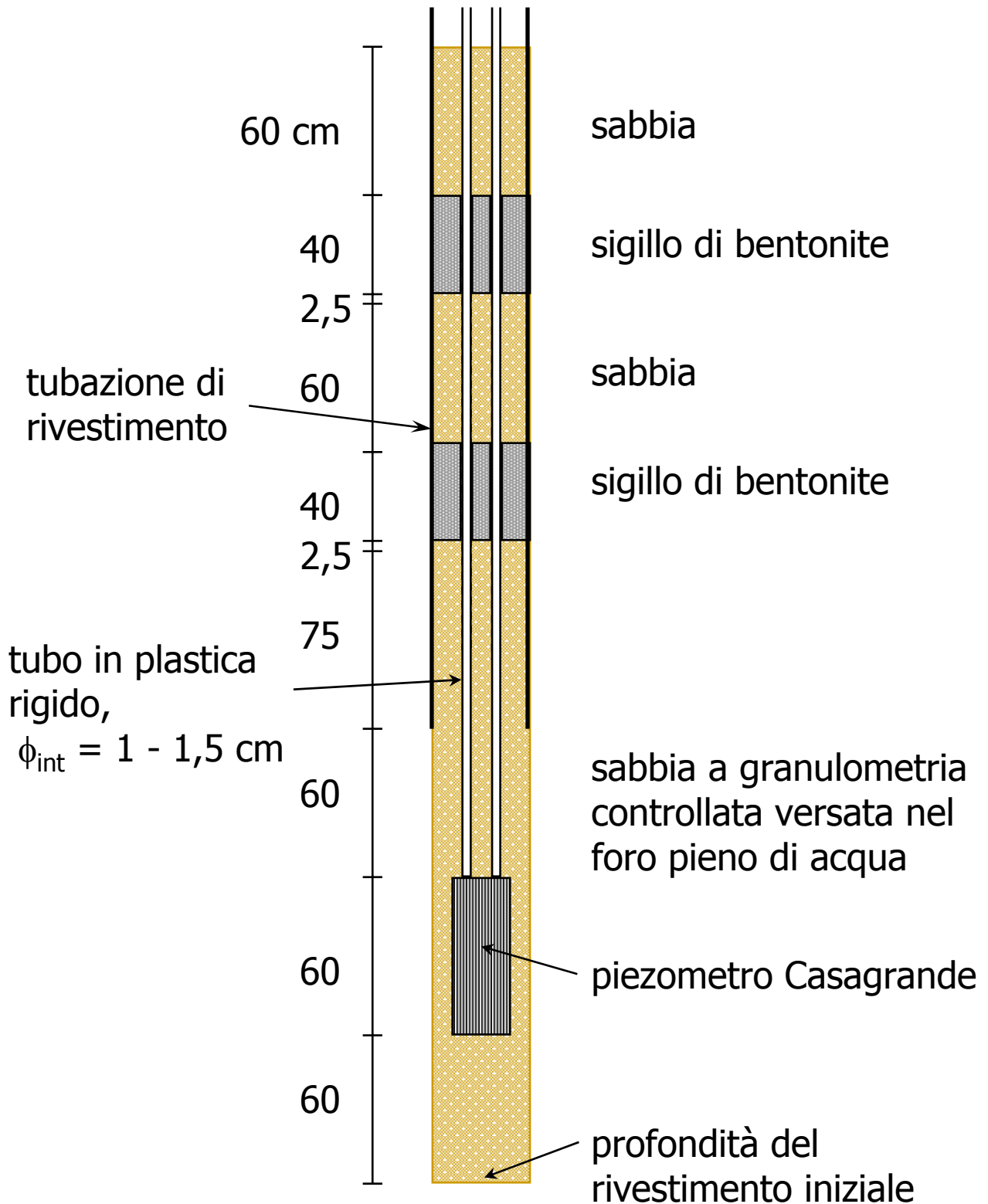
# Tubi piezometrici

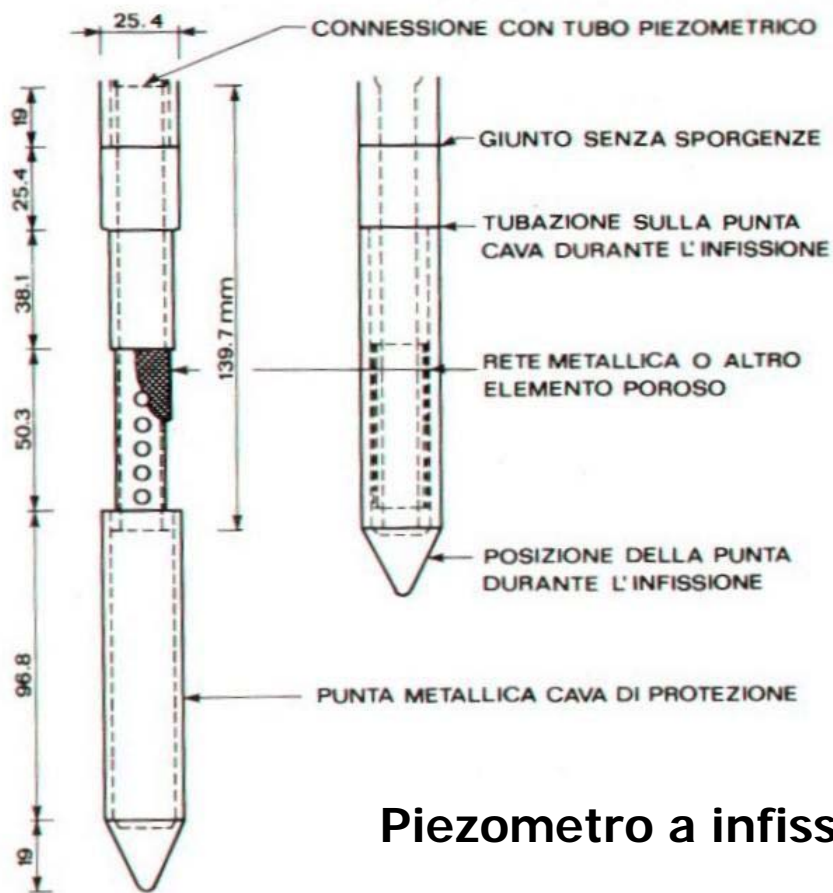
filtro a tutta altezza

presa localizzata

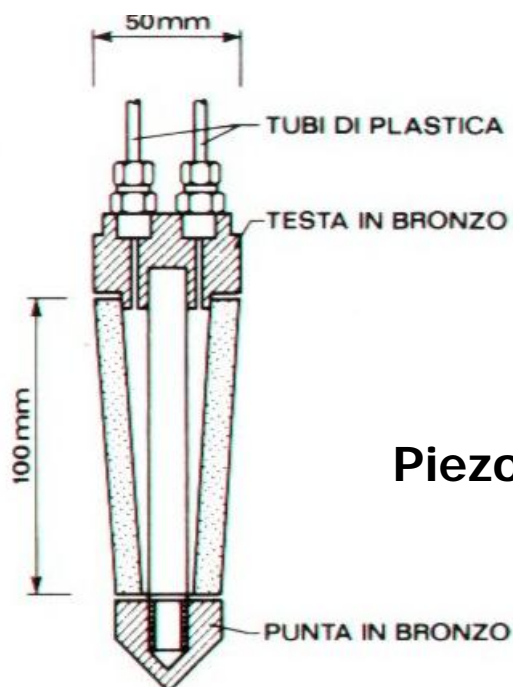


# Piezometro Casagrande





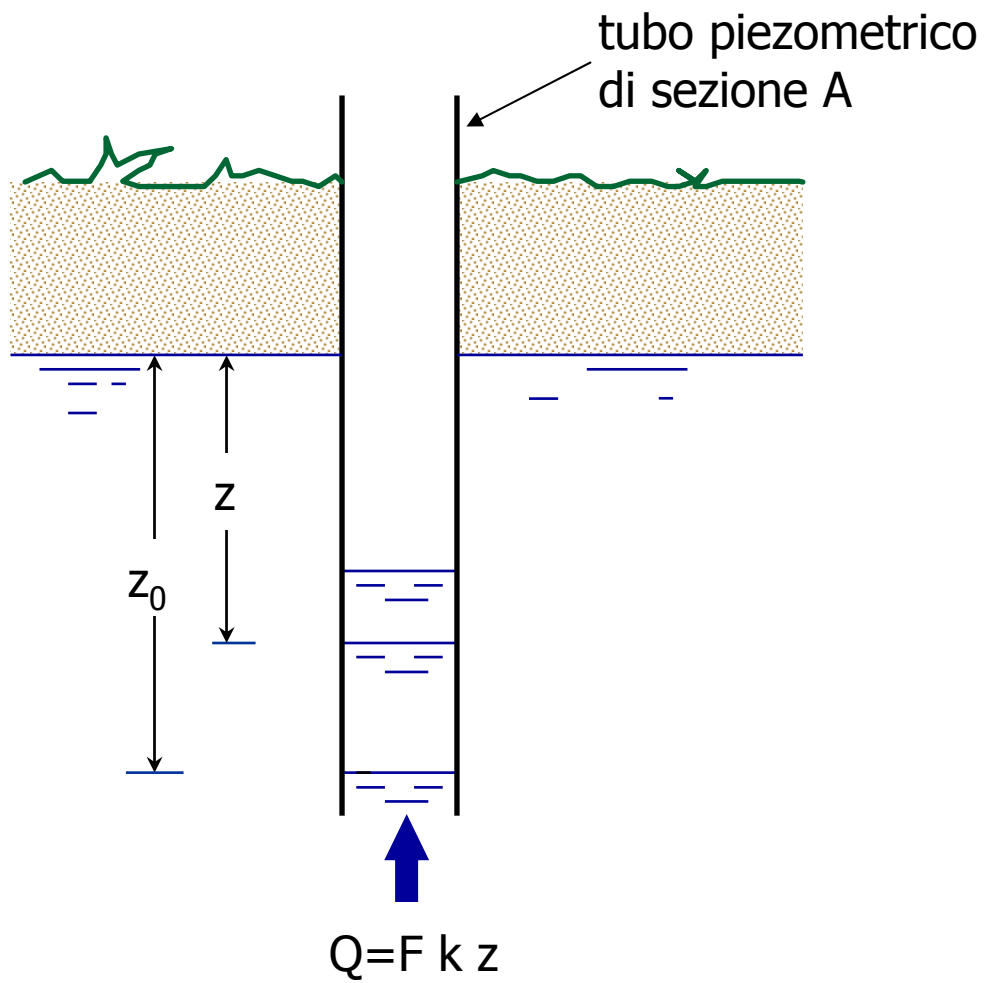
**Piezometro a infissione**



**Piezometro idraulico a doppio tubo**

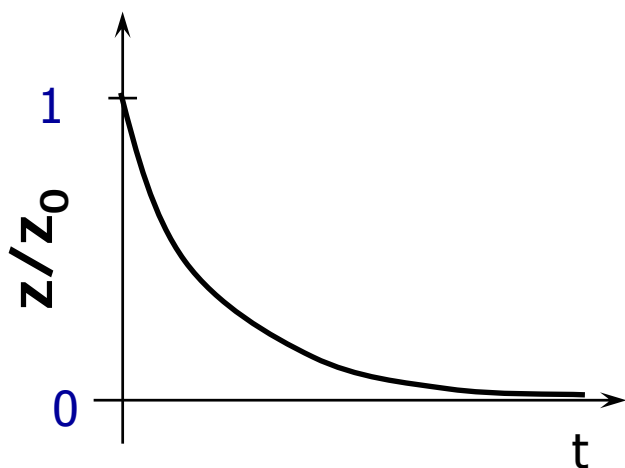


## Tempo di risposta

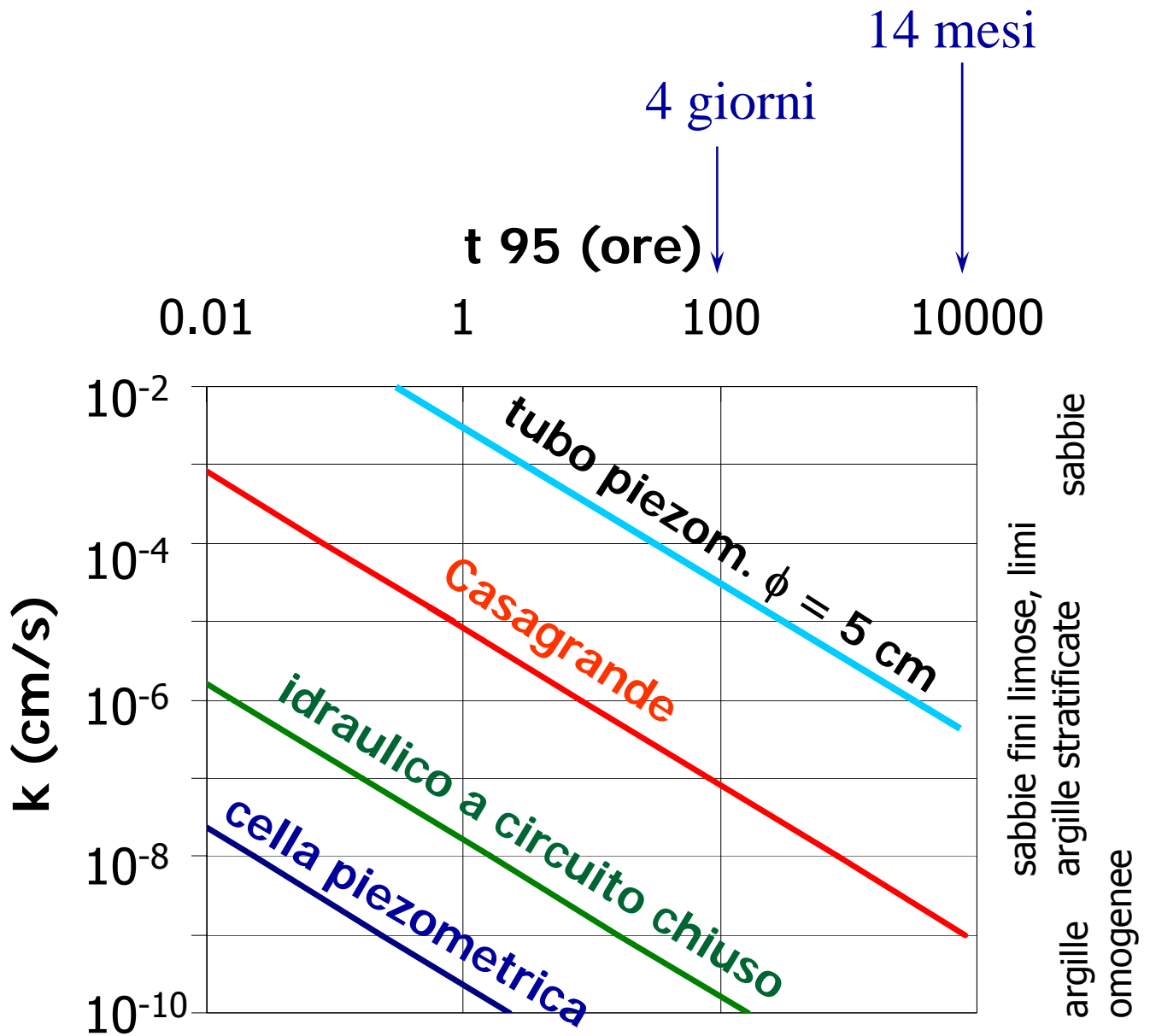


$$Q \cdot dt = -A \cdot dz$$

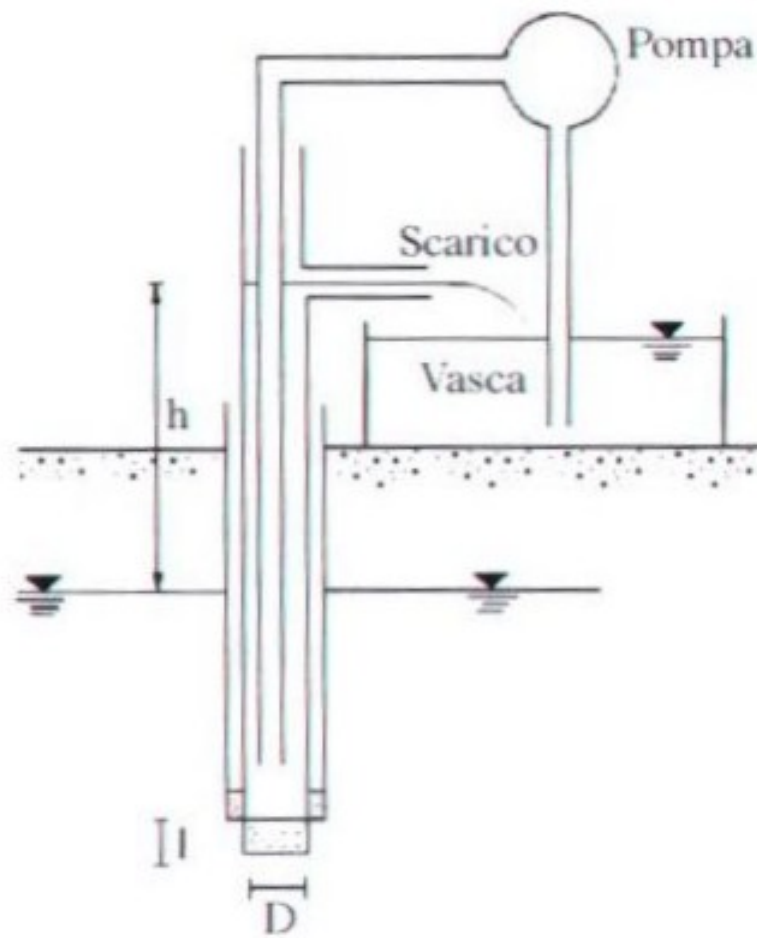
$$\Rightarrow \frac{z}{z_0} = \exp\left(-\frac{F \cdot k}{A} \cdot t\right)$$



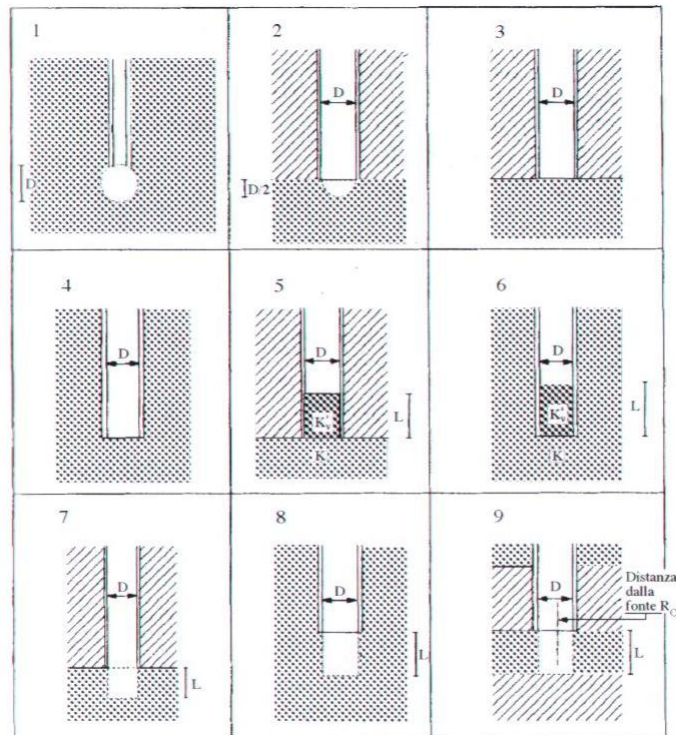
## Tempo di risposta $t_{95}$



## Schema di prova di permeabilità in foro a carico costante

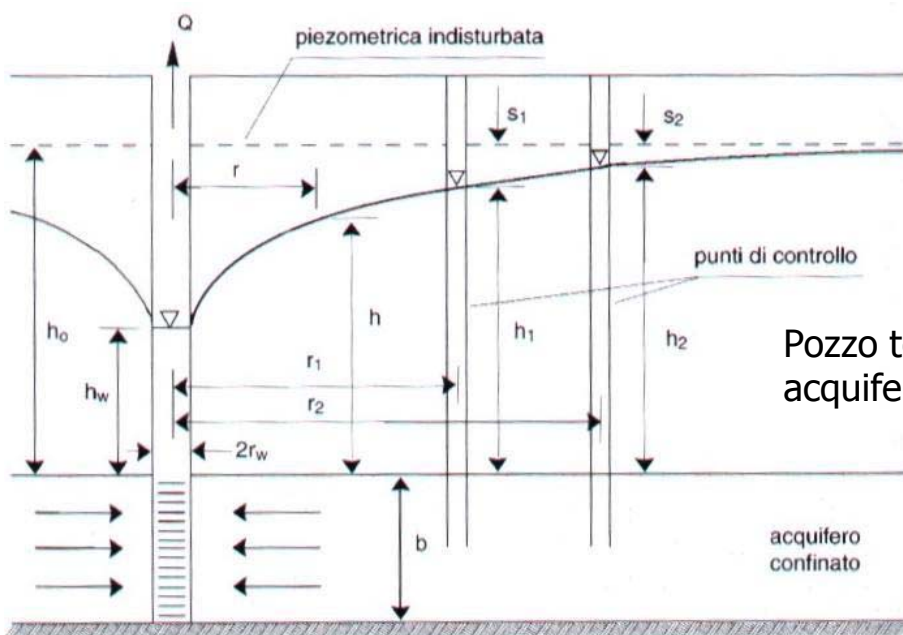
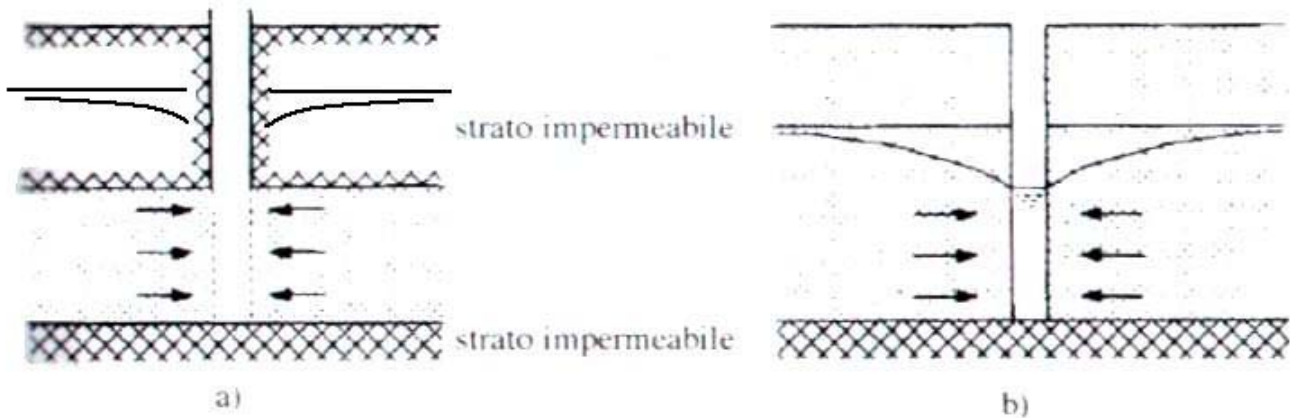


# Schemi di filtri per i quali è nota l'espressione di F



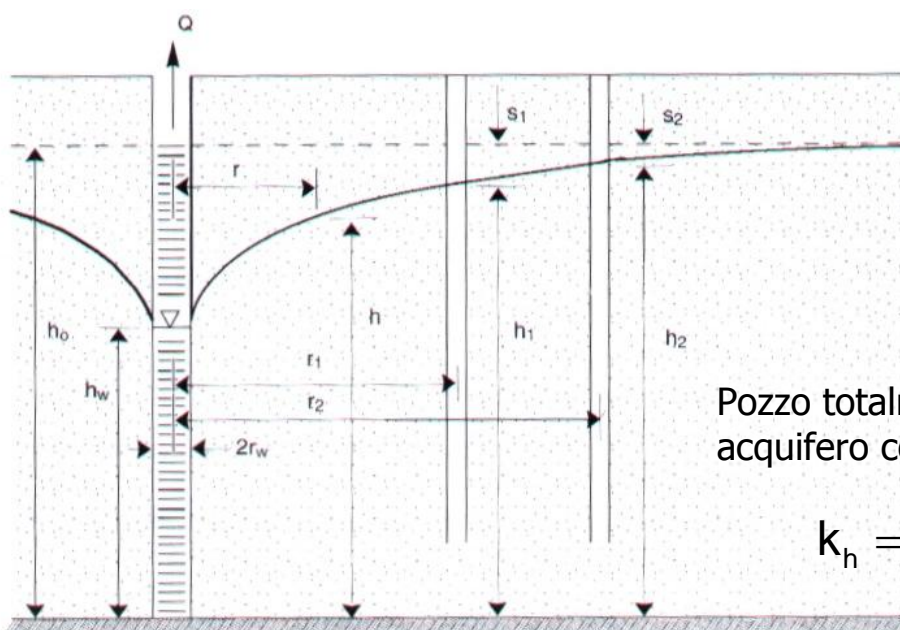
Caso	Espressione di F	
	Terreno isotropo ( $k_h/k_v = 1$ )	Terreno anisotropo ( $\sqrt{k_h/k_v} = m$ )
1. Filtro sferico in terreno uniforme	$2\pi D$	$2\pi D \ln(m + \sqrt{1 + m^2})$
2. Filtro emisferico a tetto di uno strato confinato	$\pi D$	$\pi D \ln(m + \sqrt{1 + m^2})$
3. Fondo filtrante piano a tetto di uno strato confinato	$2D$	$\frac{2D}{m}$
4. Fondo filtrante piano in terreno uniforme	$2,75D$	$\frac{2,75D}{m}$
5. Tubo parzialmente riempito a tetto di uno strato confinato	$\frac{2D}{1 + \frac{8Lk_h}{\pi Dk_v}}$	$\frac{2D}{m + \frac{8Lk_h}{\pi Dk_v}}$
6. Tubo parzialmente riempito in terreno uniforme	$\frac{2,75D}{1 + \frac{11Lk_h}{\pi Dk_v}}$	$\frac{2,75D}{m + \frac{11Lk_h}{\pi Dk_v}}$
7. Filtro cilindrico a tetto di uno strato confinato	$\frac{3\pi L}{\ln\left(\frac{3L}{D} + \sqrt{1 + \frac{3L}{D}}\right)^2}$	$\frac{3\pi L}{\ln\left(\frac{3mL}{D} + \sqrt{1 + \frac{3mL}{D}}\right)^2}$
8. Filtro cilindrico in terreno uniforme	$\frac{3\pi L}{\ln\left(\frac{1,5L}{D} + \sqrt{1 + \frac{1,5L}{D}}\right)^2}$	$\frac{3\pi L}{\ln\left(\frac{1,5mL}{D} + \sqrt{1 + \frac{1,5mL}{D}}\right)^2}$
9. Filtro cilindrico in uno strato doppiamente confinato	$\frac{2\pi L}{\ln \frac{R_o}{R}}$	$\frac{2\pi L}{\ln \frac{R_o}{R}}$

# Prove di pompaggio con piezometri



Pozzo totalmente penetrante in un acquifero doppiamente confinato

$$Q = 2\pi k_h b \frac{h_2 - h_1}{\ln(r_2 / r_1)}$$



Pozzo totalmente penetrante in un acquifero confinato solo inferiormente

$$k_h = \frac{Q}{\pi(h_2^2 - h_1^2)} \ln(r_2 / r_1)$$