MECCANICA DEL CONTINUO - TENSIONI

Si consideri un corpo continuo in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze esterne (**$\mathbf{P_1}$**, **$\mathbf{P_2}$**, …, **$\mathbf{P_N}$**).

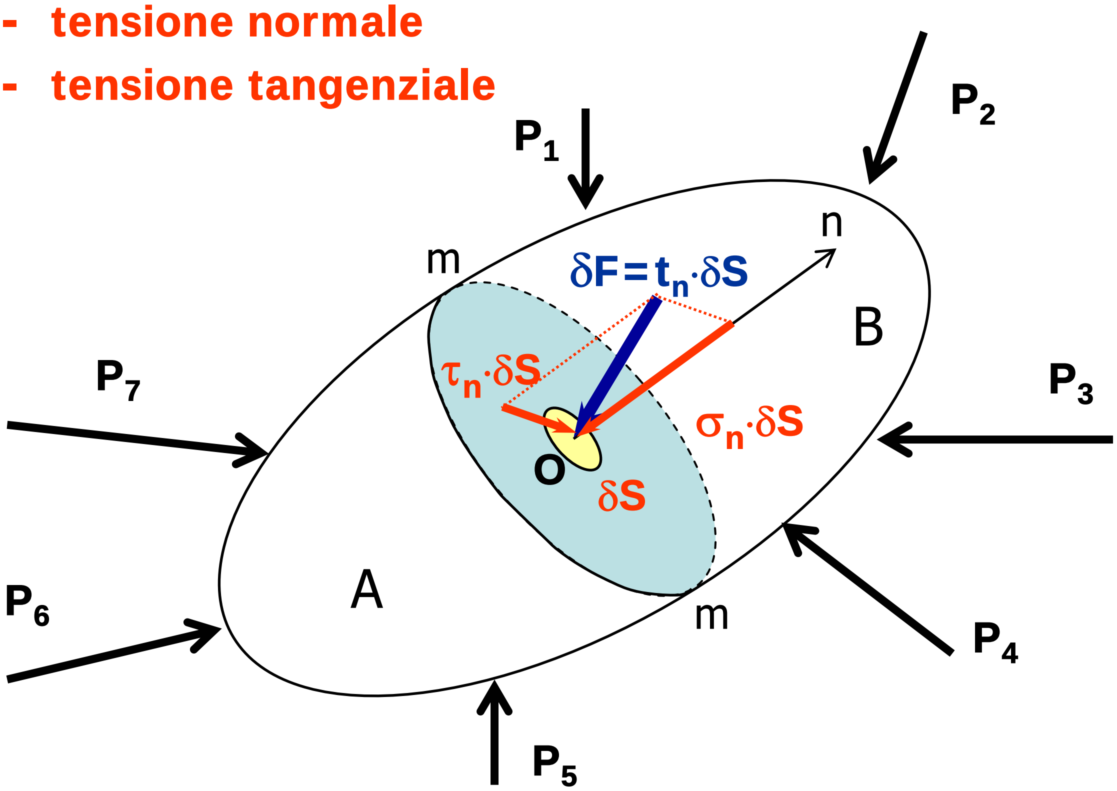
Per studiare l'effetto di queste sollecitazioni in un generico punto O, immaginiamo il corpo diviso in due parti A e B, mediante una superficie piana mm passante per O.

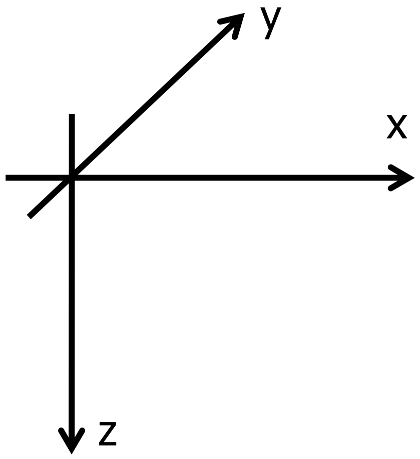
Rimuovendo la parte B, quella A rimane in equilibrio se sulla superficie mm si fanno agire le sollecitazioni che esercitava la parte rimossa (B). In particolare, sull'areola elementare δS agirà una sollecitazione $\delta\mathbf{F}$.

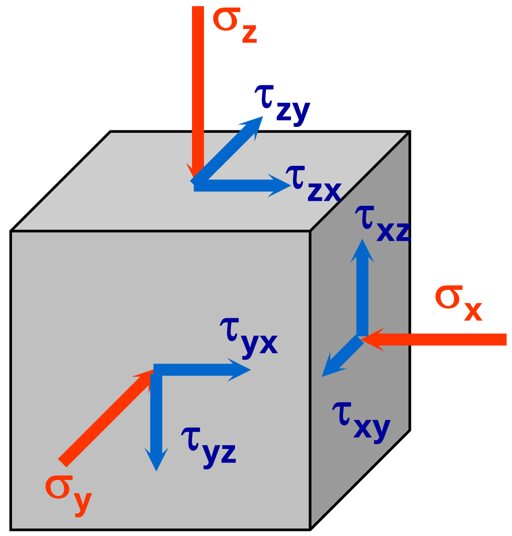
Si definisce tensione il vettore $\mathbf{t_n}$: $$\mathbf{t_n} = \lim_{\delta S \to 0} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta S}$$

Considerando la normale n all'area δS, le componenti di **t** secondo n e nel piano mm prendono il nome di:

- σ_n - **tensione normale**
- τ_n - **tensione tangenziale**





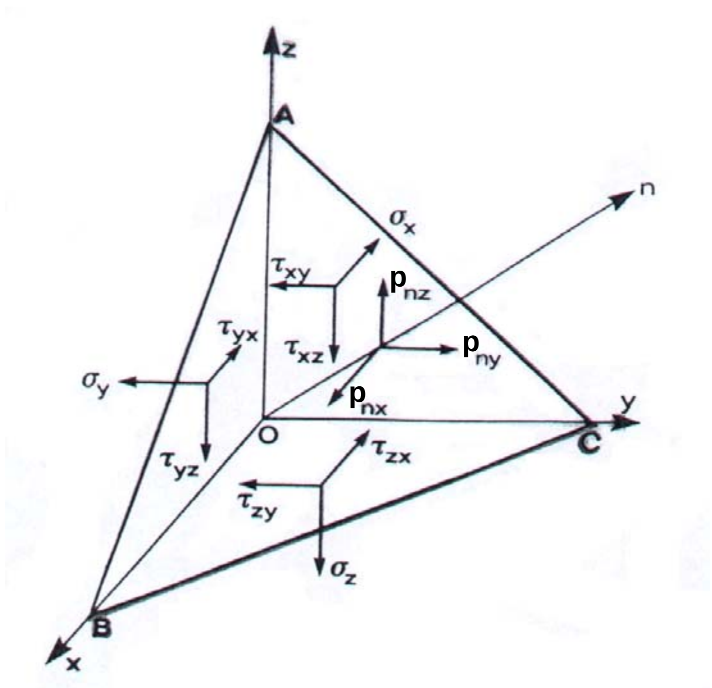


Note le componenti speciali di tensione nel generico riferimento x, y, z, è possibile ottenere le componenti di tensione agenti sul generico piano di normale n, attraverso le relazioni:

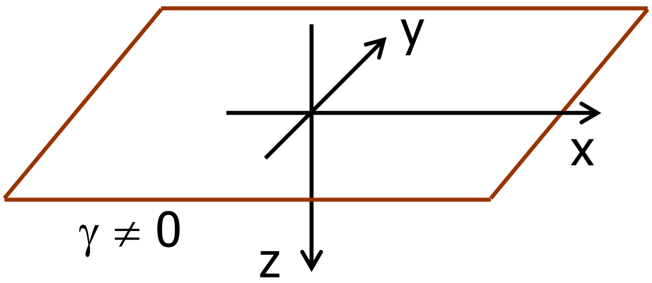
$$\mathbf{p}_{\mathbf{nx}} = \sigma_{\mathbf{x}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + \tau_{\mathbf{xy}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + \tau_{\mathbf{xz}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})$$

$$\mathbf{p}_{\mathbf{ny}} = \tau_{\mathbf{yx}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + \sigma_{\mathbf{y}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + \tau_{\mathbf{yz}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})$$

$$\mathbf{p}_{\mathbf{nz}} = \tau_{\mathbf{zx}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + \tau_{\mathbf{zy}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + \sigma_{\mathbf{z}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})$$



Le equazioni indefinite dell'equilibrio statico in un punto qualsiasi di un semispazio soggetto al peso proprio sono descritte dalle ben note relazioni:



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma$$

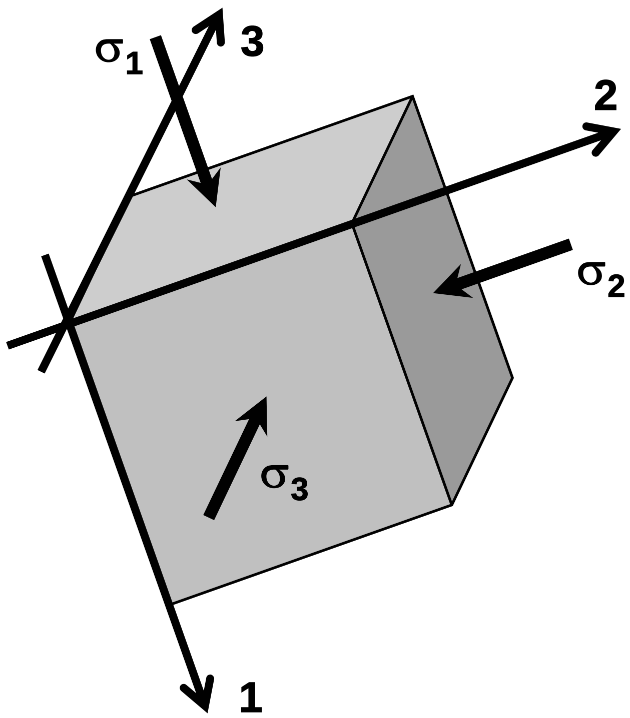
Queste individuano un sistema di 3 equazioni in 6 incognite (3 σ e 3 τ): da sole, non permettono di risolvere il problema della definizione dello stato tensionale.

È sempre possibile individuare una terna d'assi rispetto alla quale le tensioni tangenziali τ_{ij} sono tutte nulle e le tensioni normali attingono i valori estremi.
Le direzioni di questi assi si chiamano **direzioni principali di tensione**, i corrispondenti piani coordinati **piani principali di tensione** e le tensioni agenti normalmente ad essi sono dette **tensioni principali**.
Le tensioni principali vengono indicate con i simboli:

σ_1 - la massima

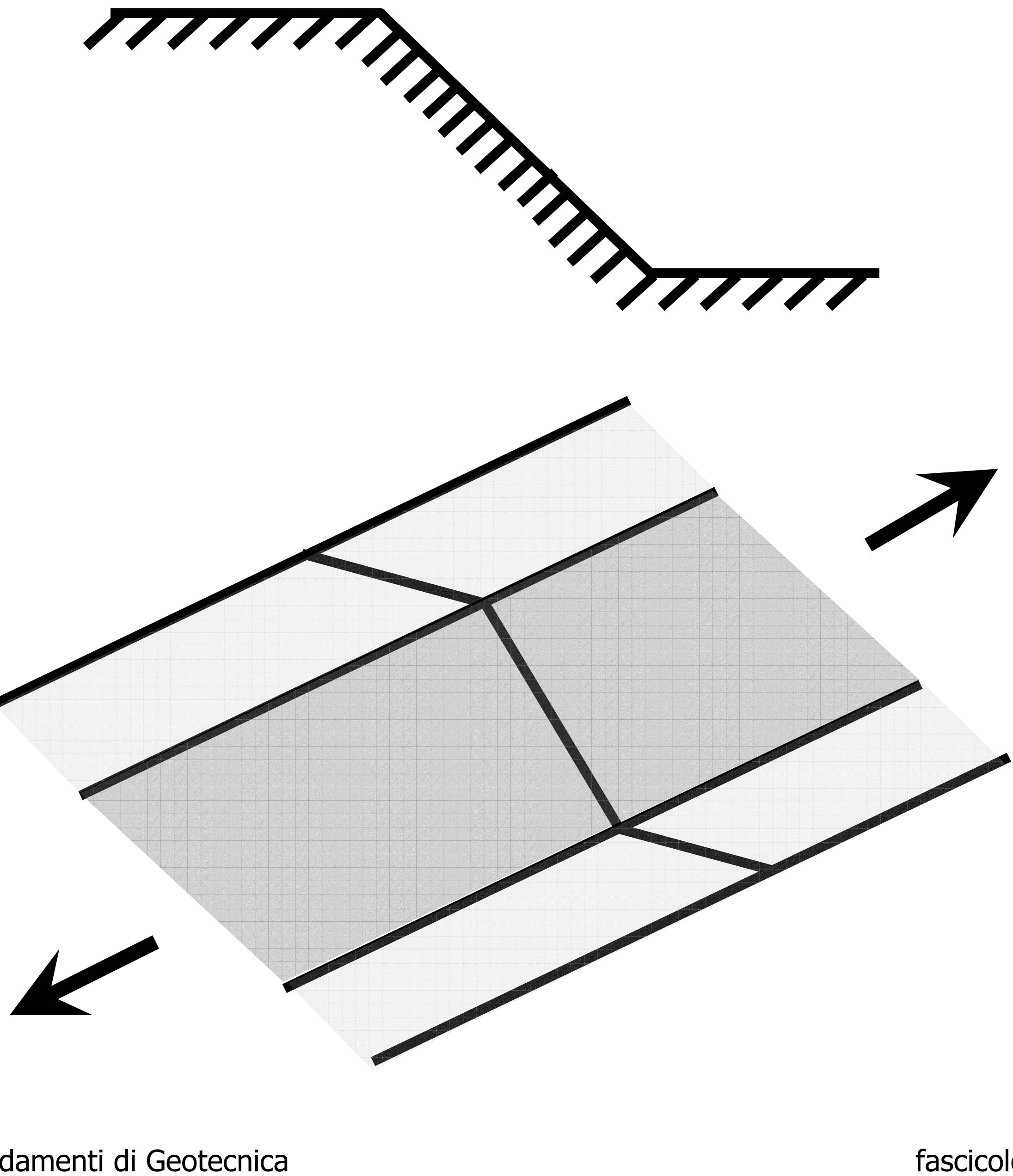
σ_2 - l'intermedia

σ_3 - la minima



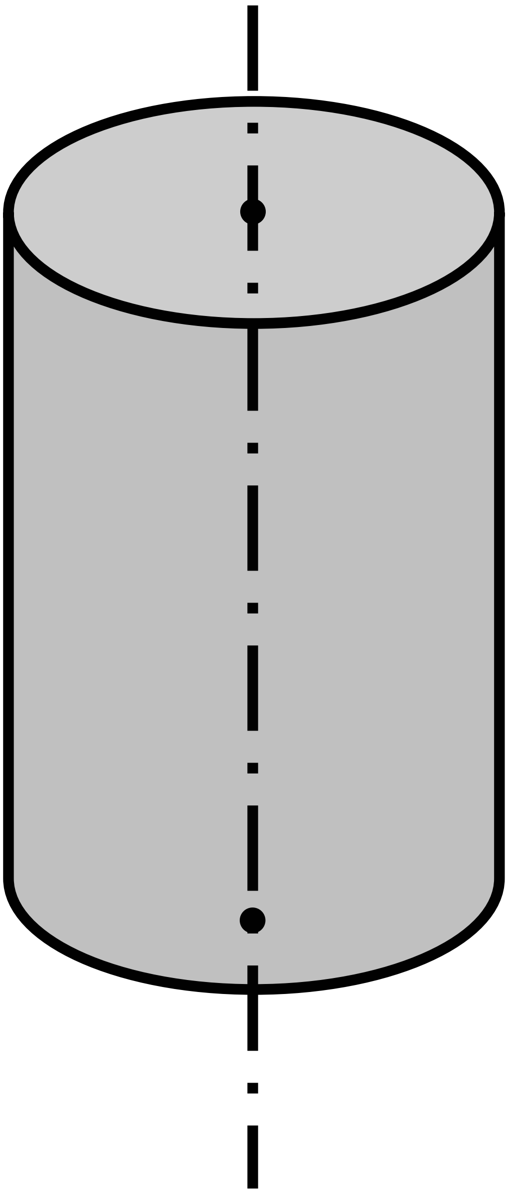
In alcuni casi, la particolare geometria del problema semplifica la ricerca delle direzioni principali di tensione.

ESEMPIO 1: “caso piano”
La direzione normale al “piano” è principale.

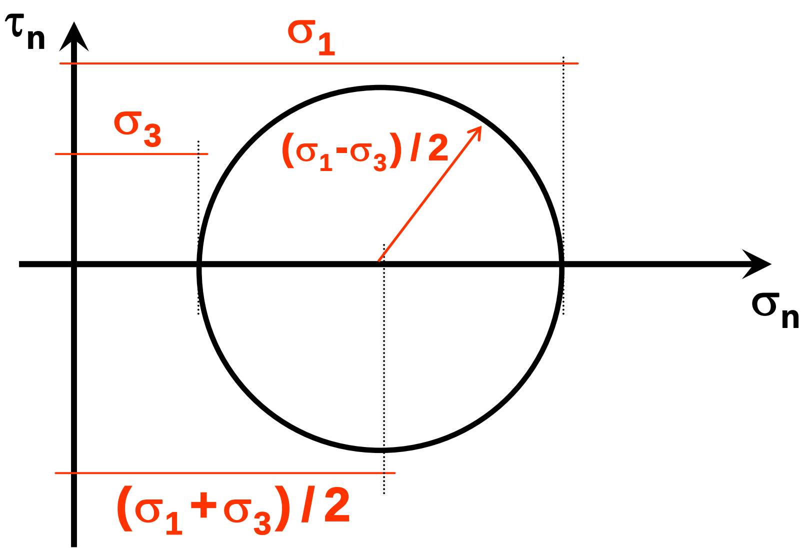


In alcuni casi, la particolare geometria del problema semplifica la ricerca delle direzioni principali di tensione.

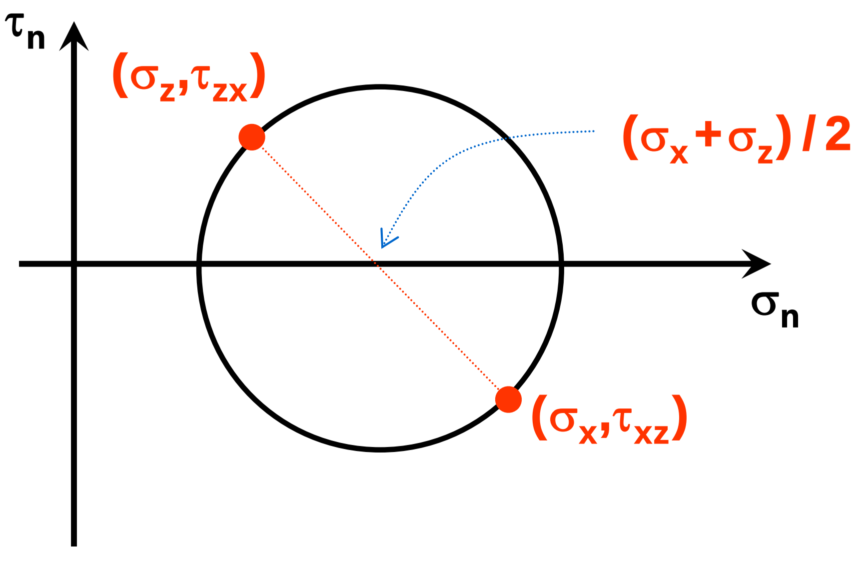
ESEMPIO 2: in corrispondenza di un asse di simmetria
La direzione dell’asse è principale.



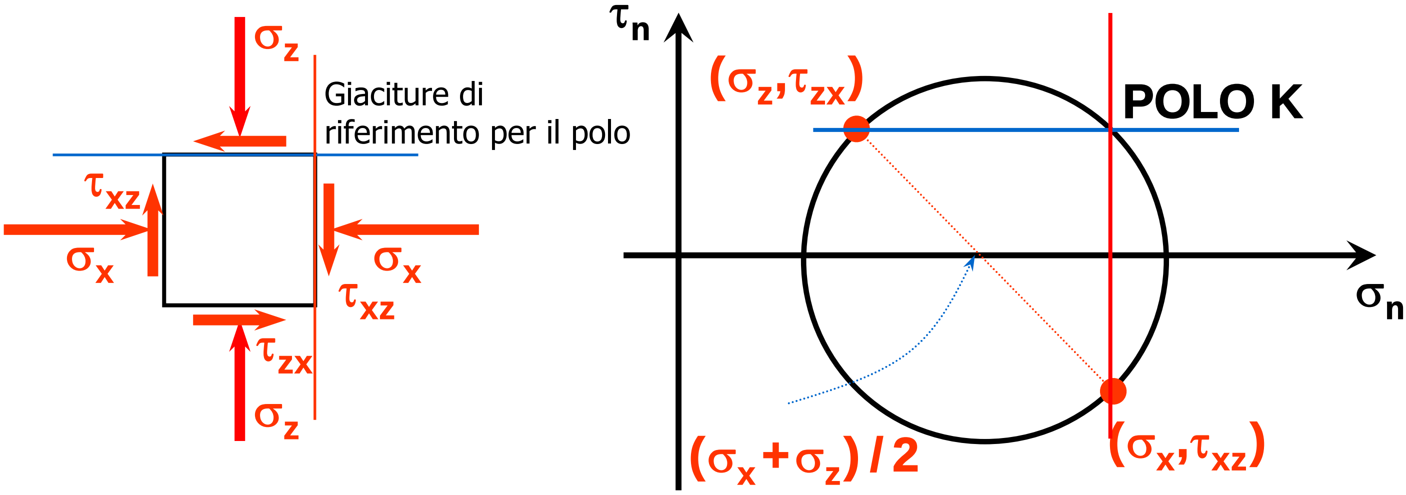
Noti i valori delle tensioni principali σ_1 e σ_3 può essere tracciato il cerchio di Mohr corrispondente, di centro $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ e raggio $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.



Viceversa, se sono noti i valori delle tensioni normali e tangenziali secondo due assi ortogonali (x, z) del piano 1-3, il cerchio di Mohr può essere tracciato tra i punti (σ_x, τ_{xz}) e (σ_z, τ_{zx}), con centro $(\sigma_x + \sigma_z)/2$.



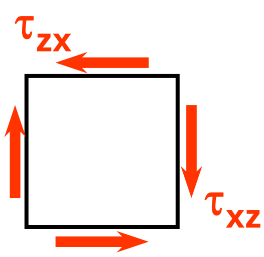
Tracciato il cerchio di Mohr ed individuato il polo delle giaciture è possibile ricavare i valori delle tensioni agenti su un qualsiasi piano normale al piano 1-3.



Il polo (K) è il punto del cerchio di Mohr che gode della seguente proprietà: *qualsiasi retta passante per esso interseca il cerchio in un punto le cui coordinate (σ_n, τ_n) sono rappresentative dello stato tensionale agente su quella giacitura.*

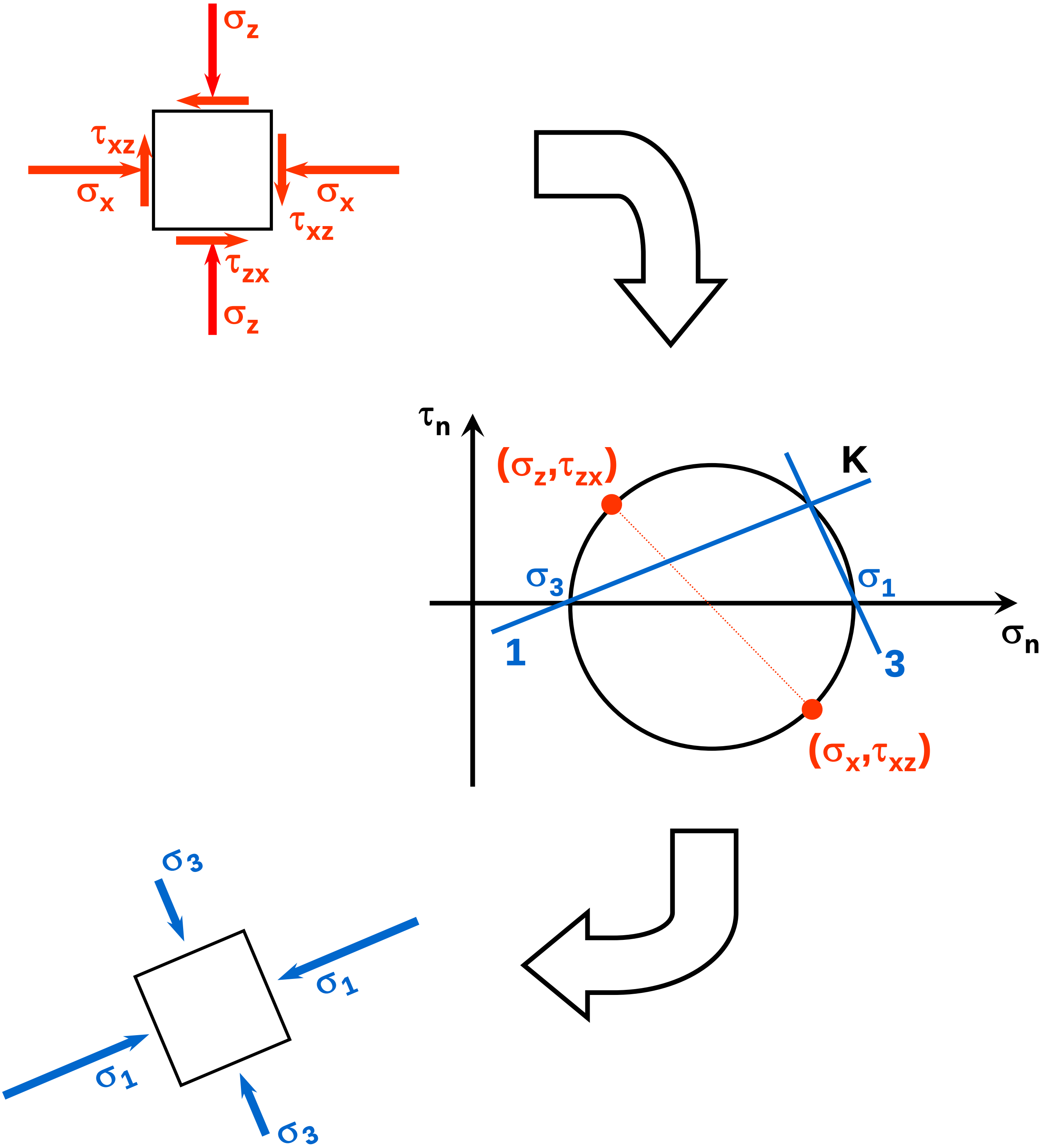
Nella convenzione di Mohr sono positive le τ_n che danno luogo ad una coppia antioraria rispetto al centro del cubetto.

$\tau_n > 0$, dà luogo ad una coppia antioraria

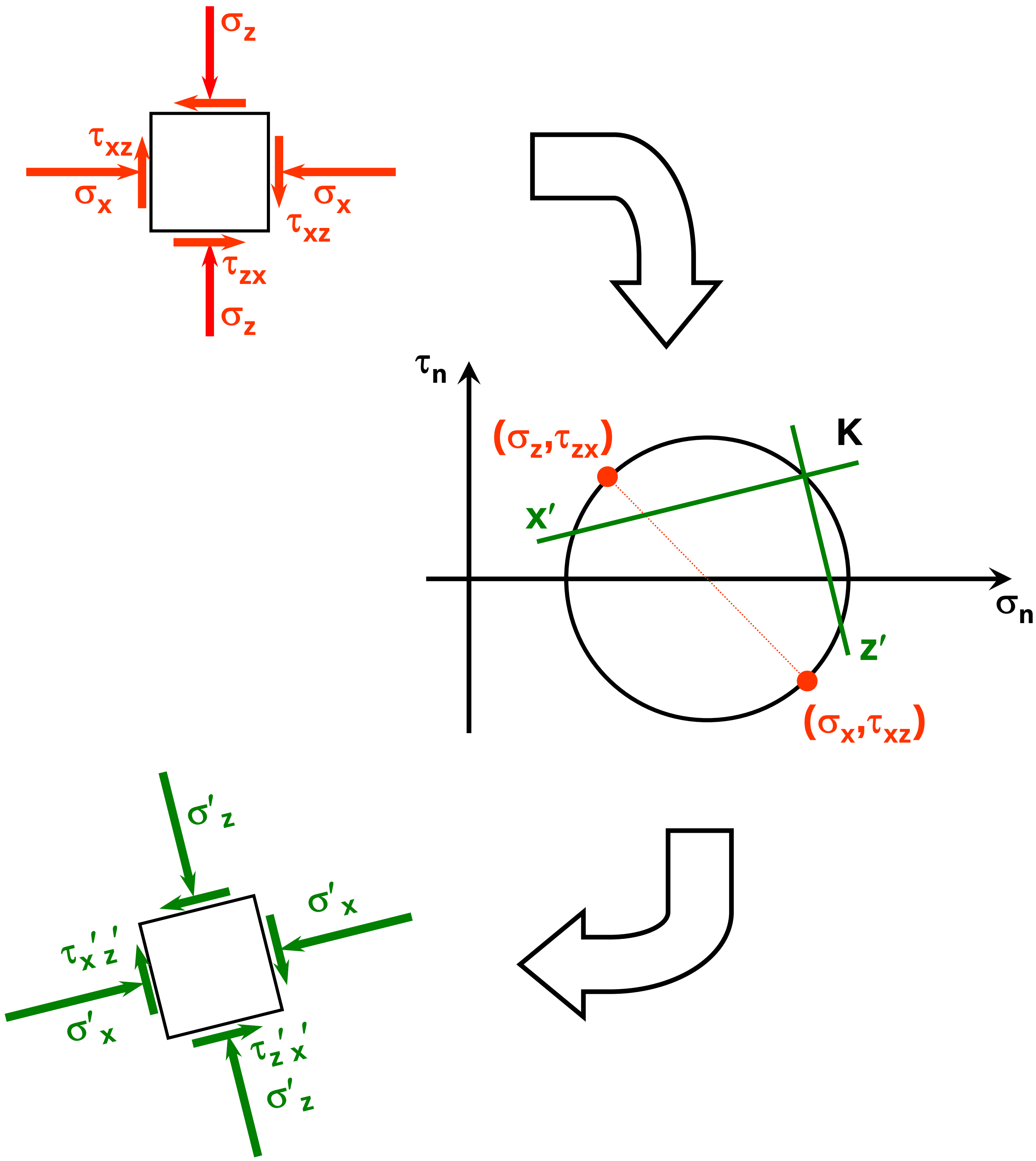


$\tau_n < 0$, dà luogo ad una coppia oraria

RICERCA TENSIONI PRINCIPALI



RICERCA TENSIONI SU x′, z ′



I cerchi di Mohr sono invarianti di tensione, ossia non cambiano al cambiare del sistema di riferimento.

Altri parametri invarianti e comunemente utilizzati in geotecnica sono:

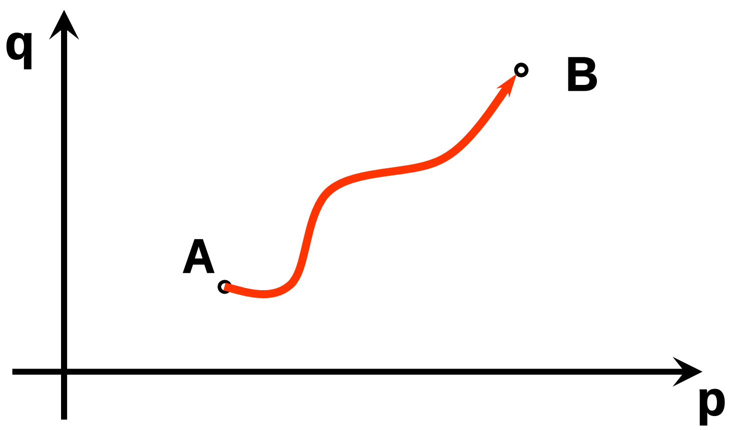
$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

tensione totale media, o sferico

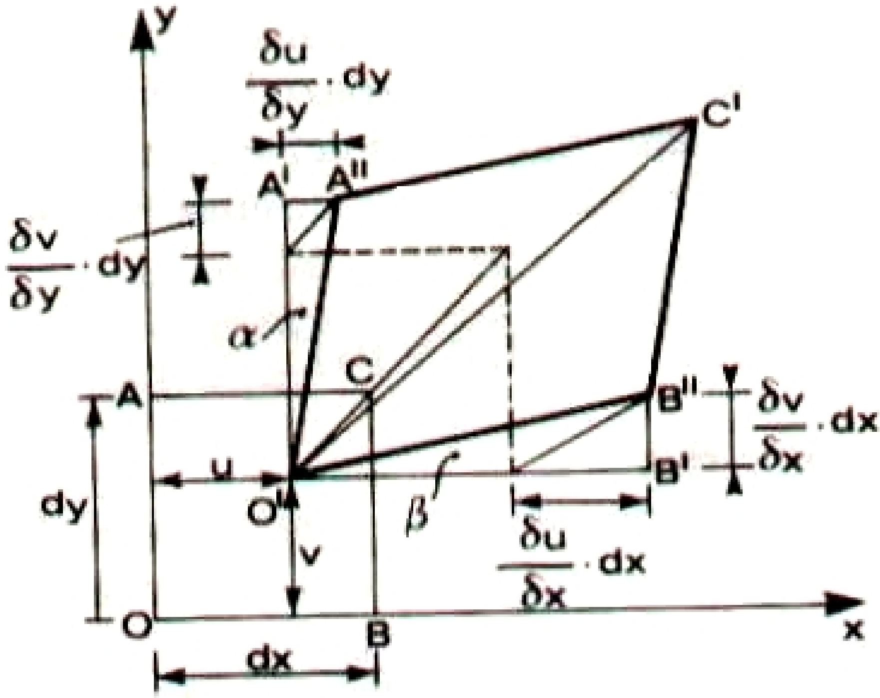
$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

tensione deviatorica, o deviatore

Gli invarianti p e q possono essere usati per rappresentare in modo sintetico le variazioni di stato tensionale (percorso di tensione) che subisce un elemento di volume appartenente ad un corpo continuo soggetto a variazioni delle sollecitazioni esterne.



MECCANICA DEL CONTINUO - DEFORMAZIONI



Si definiscono le componenti di deformazione lineare secondo gli assi x e y come:

$$\varepsilon_x = \left(\Delta L / L\right)_x = \partial u / \partial x$$

$$\varepsilon_y = \left(\Delta L / L\right)_y = \partial v / \partial y$$

assunte positive in geotecnica se corrispondono ad un accorciamento.

Si definisce componente di deformazione di taglio:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

che rappresenta la variazione dell'angolo A'O'B'.

Sfruttando le equazioni di congruenza è possibile scrivere altre 3 equazioni indipendenti, che si aggiungono alle equazioni indefinite dell'equilibrio ma introducono 6 ulteriori incognite (3 ε e 3 γ):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

Il pareggio tra incognite ed equazioni si ottiene introducendo altre 6 equazioni che definiscono il legame costitutivo del materiale e che permettono di esprimere le deformazioni in funzione delle tensioni (o viceversa).

Per esempio, facendo riferimento alla teoria dell'elasticità, ossia ad un mezzo continuo, omogeneo ed isotropo a comportamento elastico lineare, il legame costitutivo si scrive mediante le ben note relazioni di Navier:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

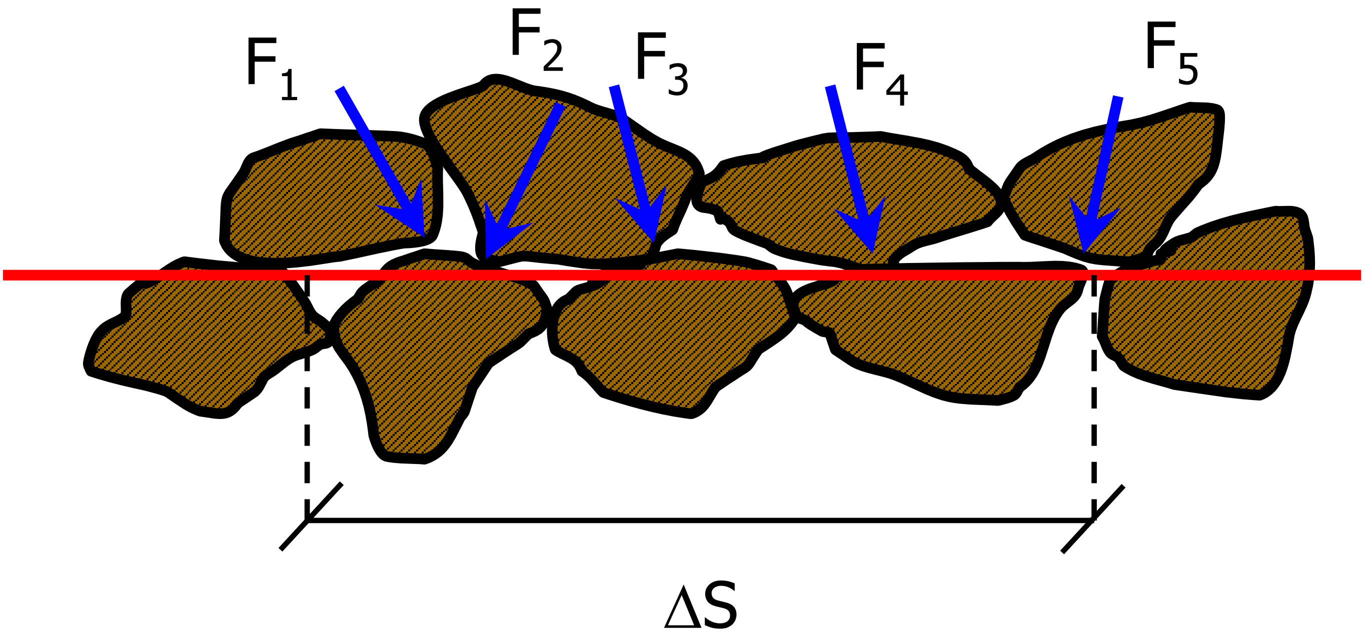
$$\gamma_{xy} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{zx}$$

con E modulo di Young e ν coefficiente di Poisson.

Nei mezzi granulari non è possibile definire σ e τ all'interno del dominio di interesse come funzioni continue.



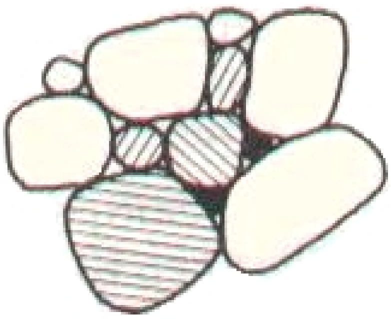
Si definiscono le grandezze medie:

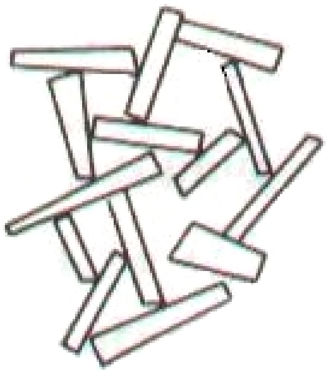
$$\sigma' = \frac{\Sigma N_i}{\Delta S}$$

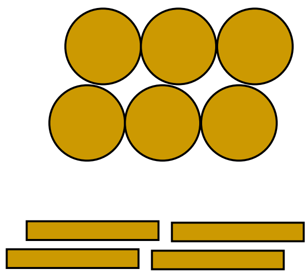
$$\tau' = \frac{\Sigma T_i}{\Delta S}$$

I terreni naturali sono tipicamente costituiti da granuli di dimensioni variabili entro un campo molto ampio (μm – cm) e di forme molto diverse.

Il meccanismo di trasmissione degli sforzi è intermedio tra quello di un insieme di sferette tutte uguali e quello di particelle appiattite tutte parallele tra loro.



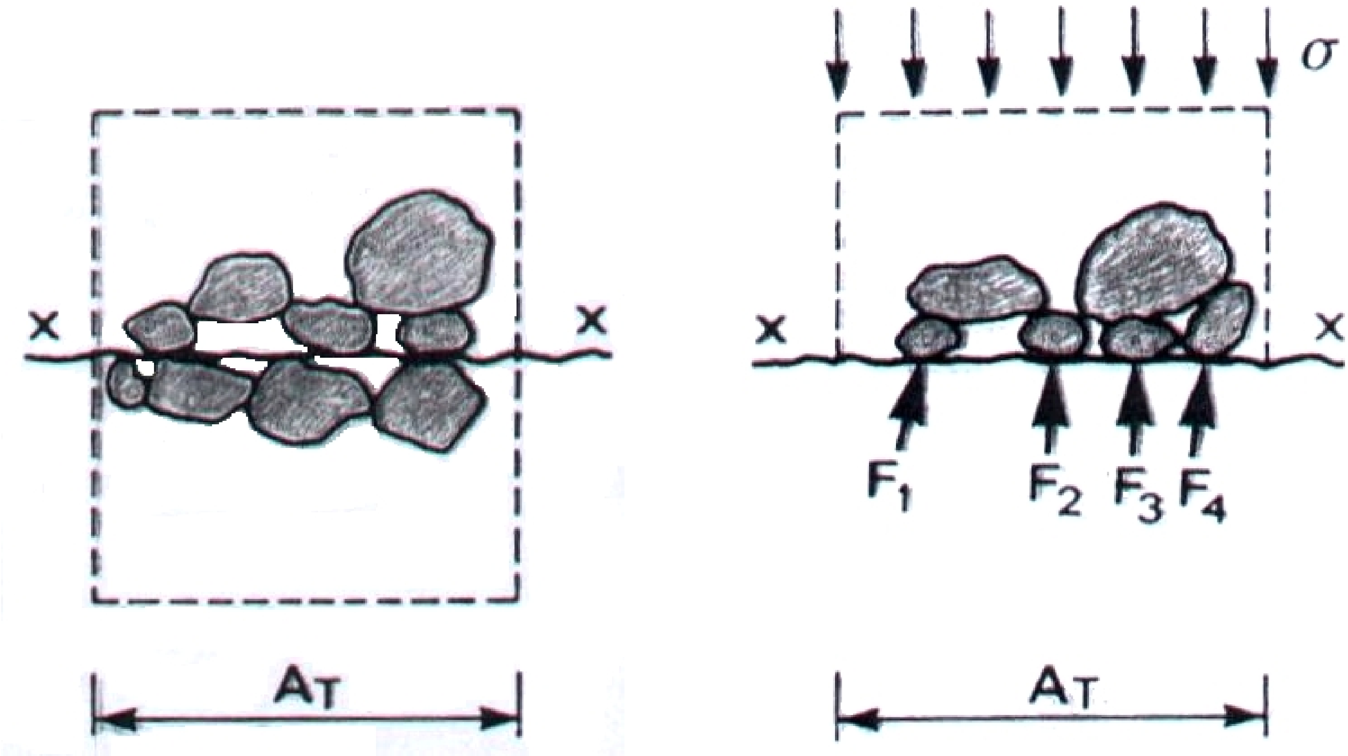




Lo studio dei dettagli della trasmissione degli sforzi sarebbe estremamente complesso.

Conviene invece pensare a un modello che da un lato schematizzi il terreno come un mezzo ideale continuo e che dall'altro tenga conto dell'esistenza dei pori e quindi delle pressioni dell'aria e/o dell'acqua.

PRINCIPIO DELLE TENSIONI EFFICACI



$$\sigma \cdot A_T = \sum N_i + u \cdot (A_T - A_C)$$

F_i = forza agente sull'area i-esima di contatto intergranulare

N_i = componente normale a x-x delle F_i

u = pressione interstiziale

σ = tensione totale

$A_C << A_T$

$$\sigma = \frac{\sum N_i}{A_T} + u$$

$$\sigma = \sigma' + u$$

"Lo stato tensionale totale in un punto può essere determinato una volta note le tensioni principali σ_1, σ_2, σ_3. Se lo spazio intergranulare è riempito da acqua avente la pressione u, le tensioni totali possono essere scomposte in due parti. Una di esse, chiamata pressione interstiziale, agisce sull'acqua (...) in ogni direzione con uguale intensità. Le differenze:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - u, \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - u, \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - u$$

rappresentano le aliquote di tensione sopportate interamente dalla fase solida. Tali frazioni delle tensioni totali sono chiamate tensioni ***efficaci***.

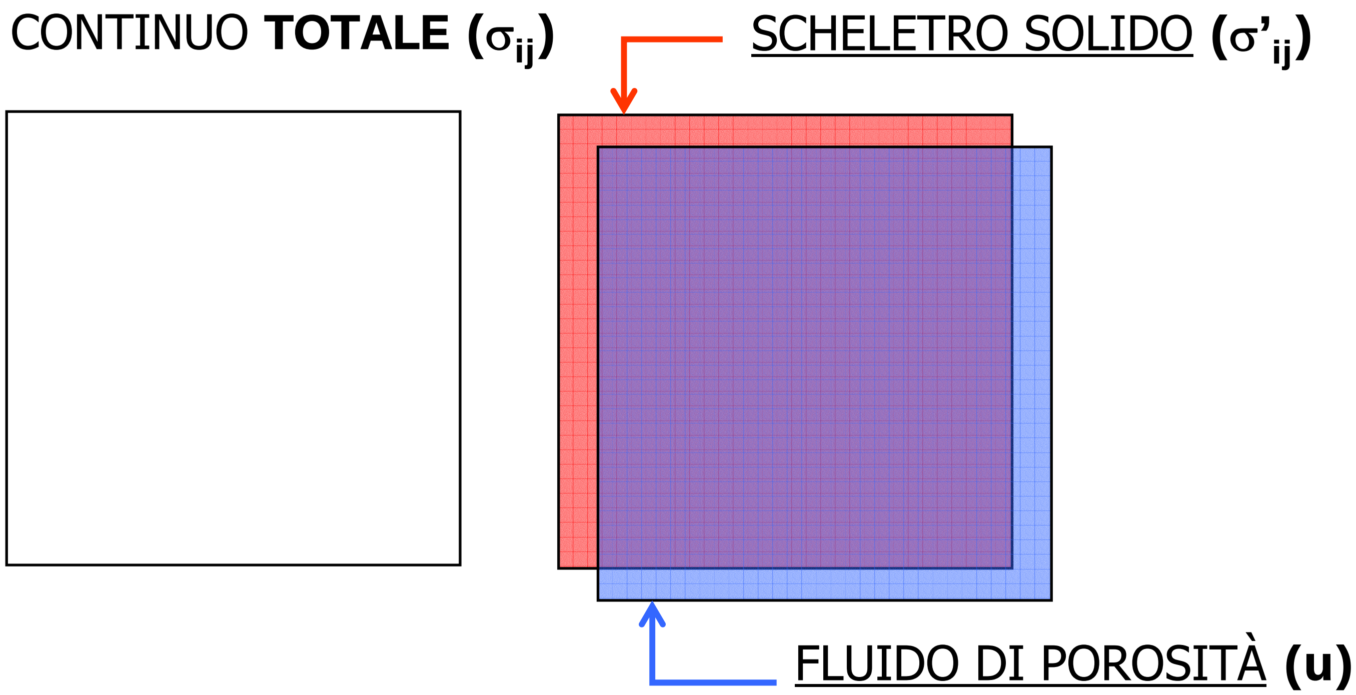
Un cambio delle **sole** pressioni interstiziali non produce cambio di volume, né ha influenza sulle condizioni tensionali che provocano la rottura. Tutti gli effetti prodotti da un cambio di stato tensionale, quali una compressione, una distorsione o una variazione di resistenza al taglio sono esclusivamente dovuti a una variazione delle tensioni efficaci.

Di conseguenza, OGNI INDAGINE DI STABILITÀ IN UN MEZZO SATURO RICHIEDE LA CONOSCENZA SIA DELLE TENSIONI TOTALI CHE DELLE PRESSIONI INTERSTIZIALI"

Karl Terzaghi, 1936

IL TERRENO COME CONTINUI SOVRAPPOSTI ED INTERAGENTI

L'IMPOSSIBILITÀ PRATICA DI TRATTARE I PROBLEMI DI MECCANICA DEI TERRENI CON UN APPROCCIO TIPO "MEZZO PARTICELLARE" HA SPINTO VERSO L'ADOZIONE DI UNO SCHEMA DI "MEZZO CONTINUO BIFASE"



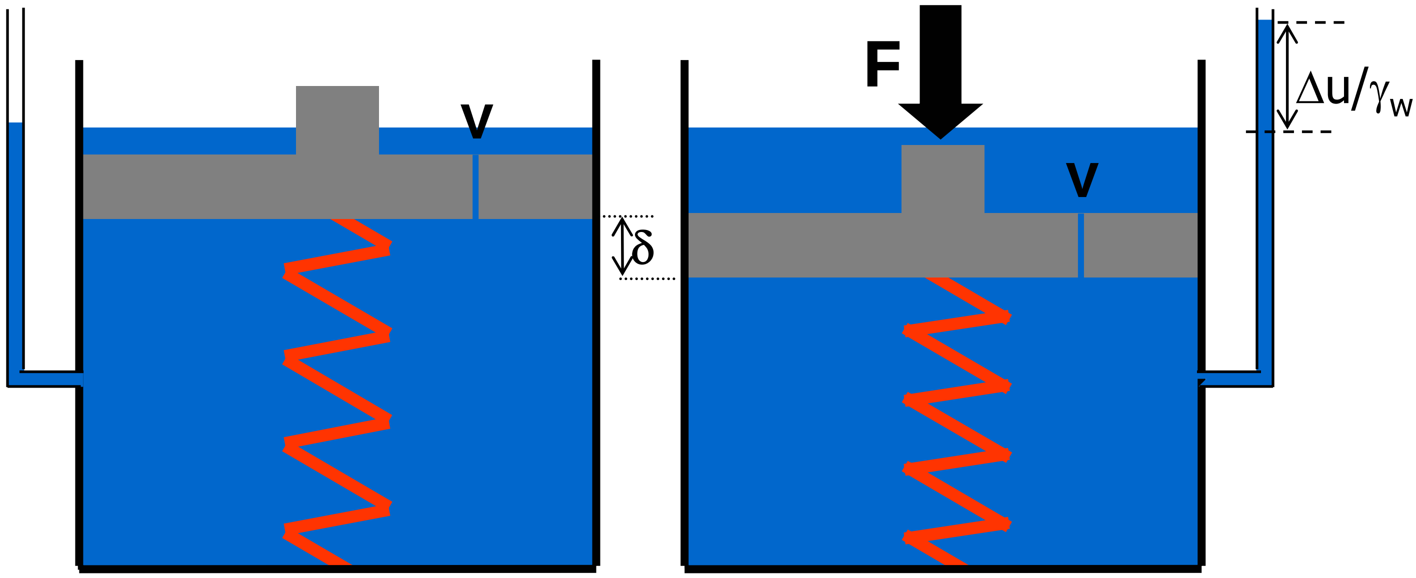
IL SISTEMA BIFASE **TOTALE** È COSTITUITO DALLA SOVRAPPOSIZIONE DI DUE CONTINUI INTERAGENTI:

SCHELETRO SOLIDO, rappresenta lo stato di sforzo sui granelli (mediante le **tensioni efficaci**, σ'_{ij})

FLUIDO DI POROSITÀ, rappresenta lo stato di **pressione interstiziale** (u) nel fluido di porosità

Per chiarire il ruolo dello scheletro solido e quello del fluido di porosità, si può fare riferimento allo schema che segue, in cui:

– la molla rappresenta lo scheletro solido;
– il liquido nel recipiente rappresenta il fluido di porosità.



Se la valvola (V) è chiusa, sotto l'azione della forza F il recipiente deve mantenere il volume costante.

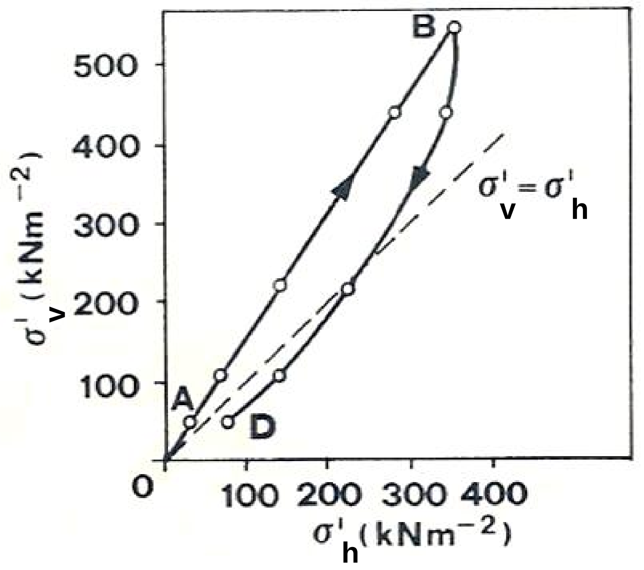
Il principio delle tensioni efficaci è dunque valido per i terreni <u>saturi</u> e stabilisce che:

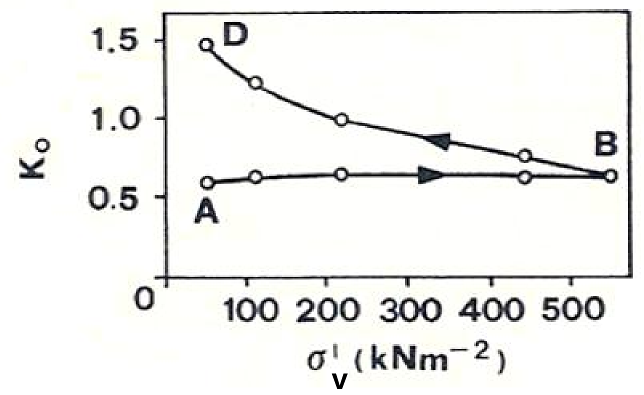
1) gli sforzi efficaci controllano le deformazioni (variazioni di volume e di forma) e la resistenza;

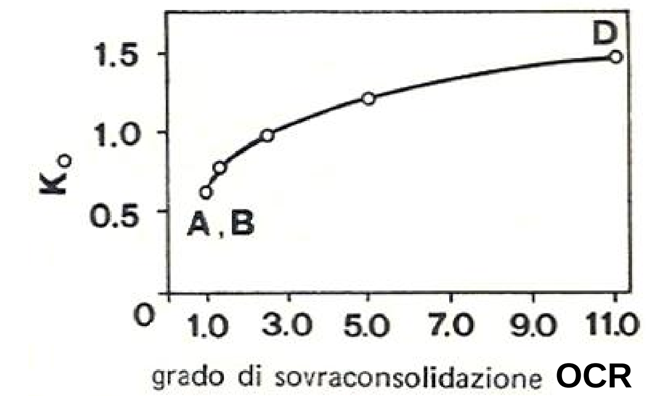
2) Le tensioni efficaci si calcolano per differenza tra le tensioni totali e le pressioni interstiziali:

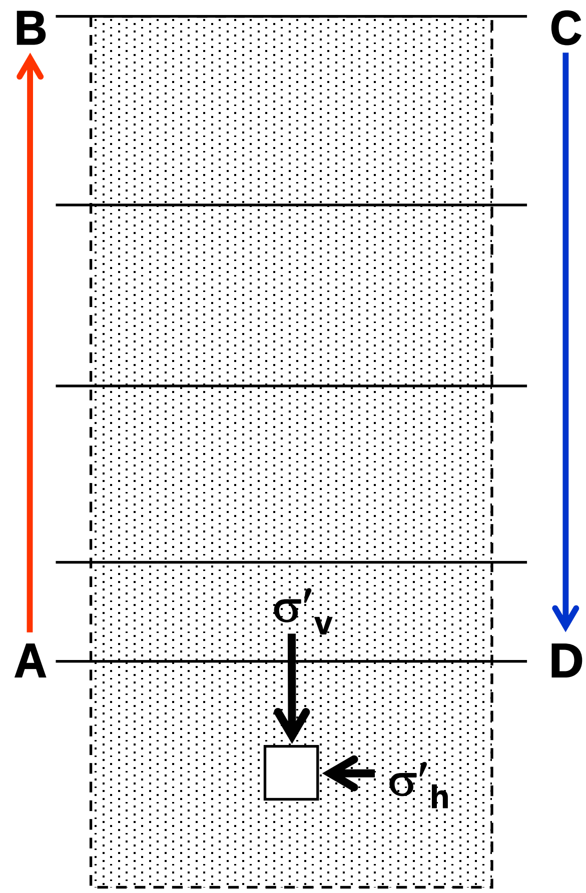
$\sigma' = \sigma - u$
$[\tau' = \tau]$

<u>Le evidenze sperimentali avvalorano le due asserzioni.</u>









$$\varepsilon_h = 0$$

$$\varepsilon_v \neq 0$$

$$\sigma'_h = K_0 \cdot \sigma'_v$$

Una volta assimilato lo scheletro solido ad un continuo è possibile estendere al regime di tensioni efficaci tutto quanto già esposto riguardo gli stati tensionali in generale.

La pressione interstiziale è uguale in tutte le direzioni. Perciò:

- le direzioni che risultano principali per le tensioni totali lo sono anche per le tensioni efficaci

- è possibile disegnare cerchi di Mohr relativi alle tensioni efficaci

- si possono definire invarianti in termini di tensioni efficaci

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = p - u$$

tensione efficace media

$$q' = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_3)^2} = q$$

tensione deviatorica, o deviatore