Fondamenti di Meccanica (3.2)
Applicazioni della Dinamica traslatoria

Corso di Elementi di Fisica e Biomeccanica
A.A. 2015-2016

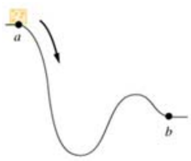
Sommario

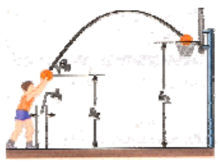
- Introduzione al concetto di "conservazione"
- Concetto di energia potenziale
  - Energia potenziale gravitazionale
  - Energia potenziale elastica
- Classificazione della forze
  - Forze conservative
  - Forze non conservative
- Energia potenziale: esempi
- Conservazione dell'energia meccanica
- Derivazione della forza dall'energia potenziale
- Analisi grafica
- Forze esterne con e senza attrito
- Conservazione dell'energia totale.

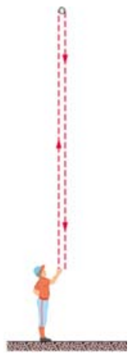
Concetto di “conservazione”

Introduzione ai principi di conservazione

- La fisica è sempre lo studio di processi o trasformazioni, ossia del modo in cui cambiano o si trasformano i sistemi.
- Finora abbiamo studiato una descrizione dinamica dei cambiamenti dei sistemi fisici, descrivendo i sistemi mentre avvengono i loro cambiamenti.







Introduzione ai principi di conservazione

- Possiamo anche descrivere l'evoluzione del sistema (cambiamento) con un metodo differente: consideriamo il sistema a due differenti istanti e confrontiamo l'aspetto del sistema a questo due istanti.
- Se conosciamo come eseguire questo confronto per un particolare sistema in particolari circostanze, saremo in grado di prevedere lo stato finale del sistema in base alla conoscenza dello stato iniziale.
- Si applica, insomma, un qualche tipo di **principio di conservazione**.
- Si usa, in pratica, una qualche proprietà del sistema che non varia nel tempo per prevedere che cosa accadrà alle proprietà che variano.

Principi di Conservazione : esempi

- **Conservazione dell'energia**
- **Conservazione della quantità di moto**
- **Conservazione del momento della quantità di moto**
- **Conservazione della massa** (più familiare nella Chimica)
- **Conservazione della carica elettrica**
- etc…

- Il metodo della conservazione usato in fisica non sostituisce il metodo dinamico che abbiamo già considerato. Invece, i due metodi si integrano l'uno con l'altro. Per lo studio della fisica è quindi essenziale una profonda conoscenza di entrambi.

Concetto energia potenziale

Energia potenziale

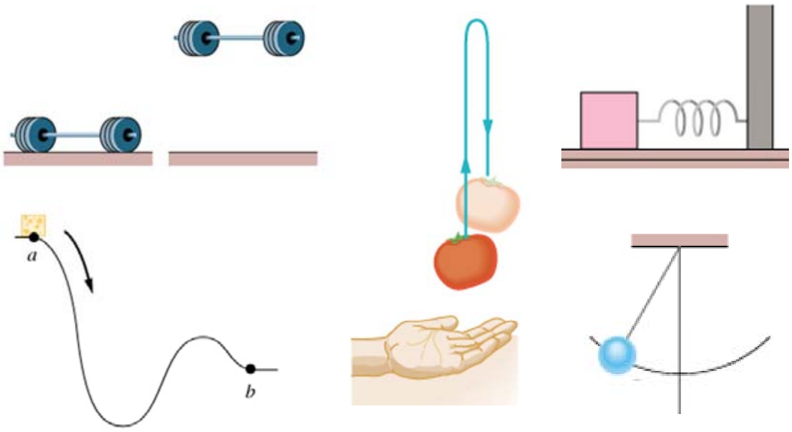
- Nelle lezioni precedenti abbiamo parlato della relazione che intercorre tra il lavoro e la variazione di energia cinetica.

$$\Delta K = K_f - K_i = L$$

- Qui ci occupiamo invece della relazione tra il lavoro e la variazione di energia potenziale.

- ***Ma cos'è l'energia potenziale?***

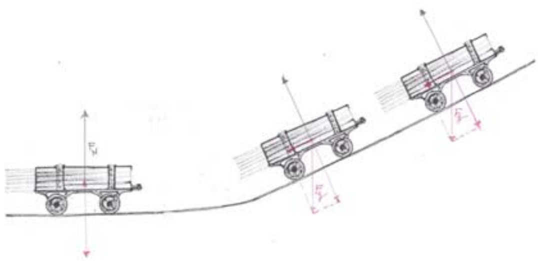
Introduzione ad una forma di energia



Introduzione ad una forma di energia

- In prima approssimazione potremo dire che

l'***energia potenziale*** è l'energia associabile alla configurazione (disposizione) di un sistema di corpi che esercitano reciprocamente delle forze.



Energia potenziale gravitazionale

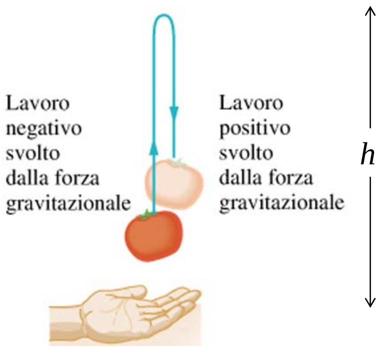
- **Moto verso l'alto**: mentre il pomodoro sale, il lavoro L_g svolto su di esso dalla forza gravitazionale è negativo perché la forza di gravità sottrae energia all'energia cinetica del pomodoro.
  - (l'energia cinetica viene trasferita mediante la forza di gravità all'energia potenziale gravitazionale del sistema Pomodoro-Terra)
- **Il pomodoro rallenta**,
- **Il pomodoro si arresta**
- **Il pomodoro comincia a ricadere** a causa della gravità.
- **Moto verso il basso**: Durante la caduta il lavoro L_g svolto sul pomodoro dalla forza gravitazionale è positivo
  - (la forza di gravità trasferisce energia dall'energia potenziale gravitazionale del sistema Pomodoro-Terra all'energia cinetica del pomodoro)

Energia potenziale gravitazionale

- Sul corpo materiale agisce sempre la forza gravitazionale, diretta verso il basso con modulo *mg*.
- Per sollevare il corpo fino all'altezza h (rispetto alla mano) occorre applicare una forza diretta verso l'alto di modulo *mg*.

$$L = mgh$$

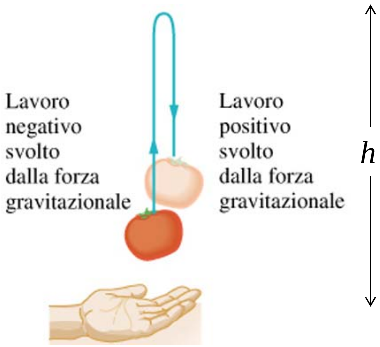
- All'altezza h il pomodoro è fermo, non ha quindi energia cinetica. Esso, tuttavia ha la possibilità di acquisire energia cinetica semplicemente lasciandolo cadere.



Energia potenziale gravitazionale

- Il pomodoro, una volta sollevato ed abbandonato cade con accelerazione *g*
- La velocità, nel momento in cui sta per toccare la mano (*trascurando la resistenza dell'aria*) è

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a(x(t) - x_0)$$
$$v_f^2 = 2gh$$
$$v_f = \sqrt{2gh}$$



- L'energia cinetica è, quindi:

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m(2gh) = mgh$$

Energia potenziale gravitazionale

- Il lavoro per sollevarlo e l'energia cinetica finale hanno lo stesso valore.

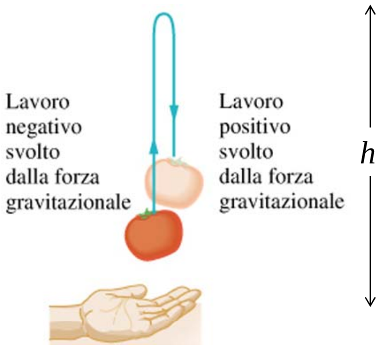
$$L = mgh$$
$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m(2gh) = mgh$$

- Possiamo affermare quindi:
  - Nell'intervallo di tempo tra il compimento del lavoro sul corpo, ***L***, e la comparsa di energia cinetica, ***K****f* (mentre il corpo accelera), l'energia è già presente ma esiste in una forma diversa da quella cinetica che chiameremo **energia potenziale *U***.

Energia potenziale gravitazionale

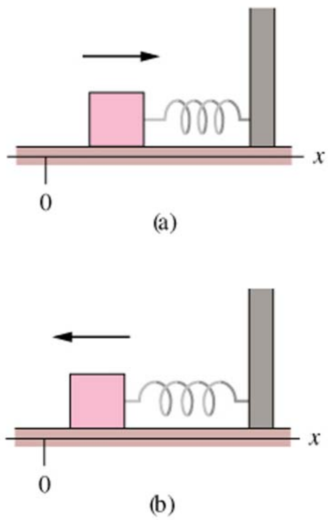
- DEF: Sia per la fase di salita sia per quella di discesa, la variazione ΔU dell'energia potenziale gravitazionale è definita come l'opposto del lavoro svolto sul pomodoro dalla forza di gravità. Possiamo quindi scrivere in generale che

$$\boxed{\Delta U = -L}$$



Energia potenziale elastica

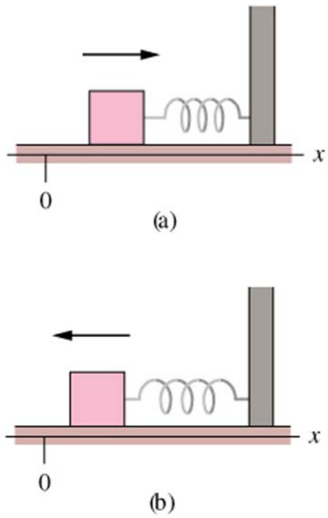
- **Moto verso destra**: Se diamo un colpo al blocco per spingerlo verso destra, la forza elastica della molla compie un lavoro negativo sul blocco durante il movimento verso destra,
  - La forza trasferisce energia dall'energia cinetica del blocco all'energia potenziale elastica della molla.
- **Il blocco rallenta**
- **Il blocco si ferma**
- **Il blocco inverte il cammino** verso sinistra a causa della forza elastica esercitata dalla molla.
  - Il trasferimento di energia si inverte, passando dall'energia potenziale della molla all'energia cinetica del blocco.



Energia potenziale elastica

- DEF: Sia nel moto verso destra che verso sinistra, la variazione ΔU dell'energia potenziale elastica della molla è definita come l'opposto del lavoro svolto sul blocco dalla forza elestica della molla. Possiamo quindi scrivere in generale che

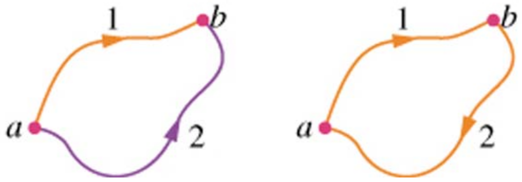
$$\boxed{\Delta U = -L}$$



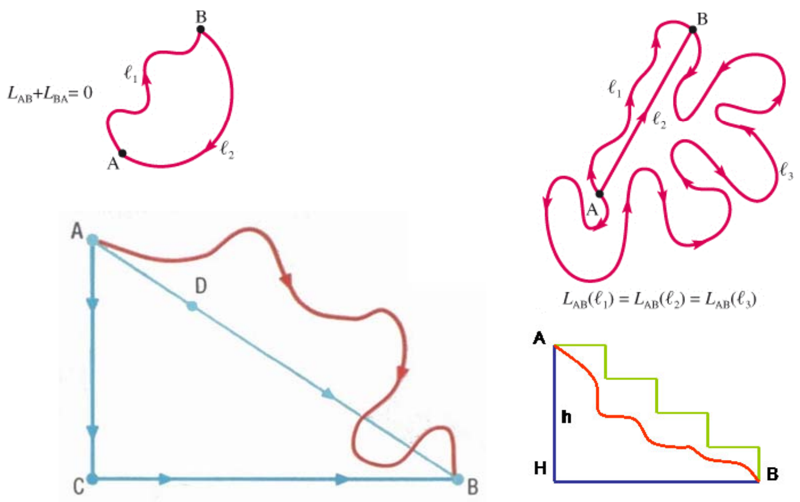
Forze conservative e non conservative

Classificazione delle forze

- Per prima cosa, classifichiamo le forze che compiono lavoro su un corpo suddividendole in
  - forze *conservative* e $\begin{cases} L_{ab,1} = L_{ab,2} \\ L = 0 \end{cases}$
  - forze *non conservative* (dette anche *dissipative*) $\begin{cases} L_{ab,1} \neq L_{ab,2} \\ L \neq 0 \end{cases}$



Forze conservative

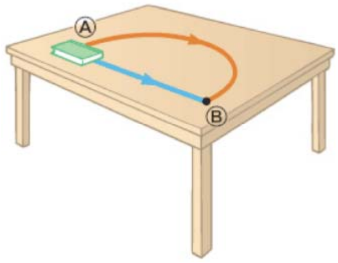


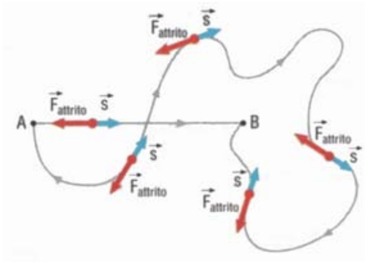
Forze non conservative

- Il lavoro fatto dalla forza di attrito dipende dal percorso seguito

- Se un oggetto che striscia su superficie, il lavoro è proporzionale alla lunghezza del percorso; la forza di attrito, infatti, è sempre diretta in verso opposto allo spostamento.

- Nota Bene:
  - l'attrito statico non fa lavoro, per definizione!
  - Non fa lavoro nemmeno l'attrito dinamico, se lo spostamento e ortogonale alla forza di attrito (e il caso della ruota).





Forze conservative

- Supponiamo che un corpo compia un tragitto di andata e ritorno, cosicché il suo punto di arrivo coincide con il punto di partenza. *Una forza è conservativa se il lavoro totale che compie su un corpo è nullo per qualunque percorso di andata e ritorno.*

- Esempi di forze conservative:
  - *La forza gravitazionale*
  - *La forza elastica di una molla*

Forze non conservative

- Se un corpo scivola su una superficie non ideale, la direzione della forza d'attrito è sempre opposta alla velocità del corpo. L'attrito compie lavoro negativo sul corpo durante tutto il suo moto, e il lavoro non può essere nullo per un percorso di andata e ritorno.
- Se una forza compie un lavoro diverso da zero su un corpo mentre questo effettua un movimento di andata e ritorno, la forza è non conservativa.
- In questo caso *il lavoro effettuato dipende dal percorso*!
- Esempi di forze non conservative:
  - *La forza di attrito*
  - *La forza resistente di un fluido*

Utilità delle forze conservative

- Quando su un corpo agiscono solo forze conservative, possiamo semplificare notevolmente gran parte dei problemi che riguardano i movimenti dei corpi.

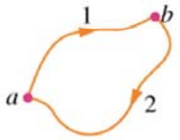
Il teorema dell'Energia cinetica

- Ne caso di forze *conservative* e *non conservative* vale, quindi:
  - forze *conservative* e $\begin{cases} L_{ab,1} = L_{ab,2} \\ L = 0 \end{cases}$ $\Delta K = 0$
  - forze *non conservative* (dette anche *dissipative*) $\begin{cases} L_{ab,1} \neq L_{ab,2} \\ L \neq 0 \end{cases}$ $\Delta K \neq 0$

Deduzioni

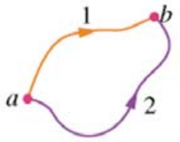
- Il lavoro complessivo netto svolto da una forza conservativa su una particella che si muove su un percorso chiuso è zero.

$$L = 0$$



- Il lavoro svolto da una forza conservativa su una particella che si muove tra due punti qualsiasi non dipende dal particolare percorso seguito.

$$L_{ab,1} = L_{ab,2}$$



Energia potenziale (esempi)

Energia potenziale

- Poiché il lavoro L compiuto da una forza conservativa $\boldsymbol{F}$ per andare dal punto $A(x_A, y_A, z_A)$ al punto $B(x_B, y_B, z_B)$, dipende solo dagli estremi della traiettoria, A e B, possiamo introdurre una funzione $U(x, y, z)$ tale che:

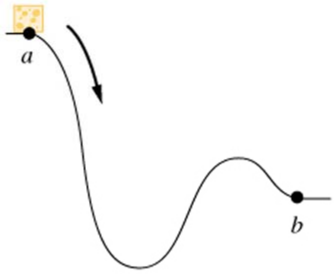
$$L = U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B)$$

- Ovvero, il lavoro L può essere espresso come differenza di una funzione del punto calcolata in A e B.

- La funzione U è detta energia potenziale

Problema svolto 8.1

- Un corpo materiale scivola su una superficie priva di attrito dal punto a al punto b.
- Quanto lavoro compie la forza di gravità sul corpo?



Problema svolto 8.1

- Non possiamo impiegare

$$L = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos\varphi$$

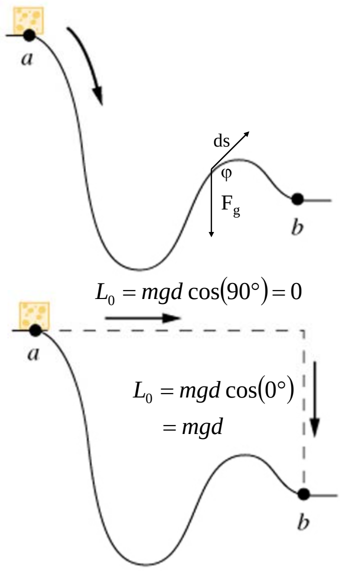
- Dovremmo usare

$$L = \int_a^b \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

- ma non conosciamo **F**(s) poiché l'angolo ϕ non è costante lungo il percorso.

- Poiché la forza di gravità è conservativa, possiamo calcolare il lavoro scegliendo un qualsiasi altro percorso (quindi uno particolarmente semplice per il calcolo)

$$L_{TOT} = mgd$$



Determinazione dell'energia potenziale

- Calcoliamo ora l'energia potenziale nei due casi studiati:
  - Energia potenziale gravitazionale
  - Energia potenziale elastica

- In generale

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \quad \Rightarrow \quad \Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

Energia potenziale gravitazionale

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} F_g dy = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg[y]_{y_i}^{y_f}$$
$$\Delta U = U_f - U_i = mg(y_f - y_i) = mgh$$

- In Fisica ciò che importa sono le variazioni $\Delta U = U_f - U_i$ e non il valore assoluto di U.
- È possibile considerare U(y) purché si indichi un valore di riferimento U_i nella posizione y_i. [in genere $U_i=0$ per $y_i=0$]

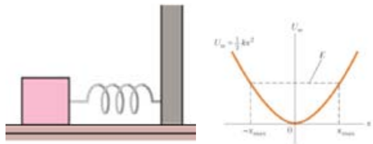
$$\boxed{U(y) = mgy}$$

Energia potenziale gravitazionale

Energia potenziale elastica

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = k\int_{x_i}^{x_f} xdx = \frac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$



- Scegliendo la posizione x_i=0 come quella nella quale il blocco è fermo (posizione di riposo della molla)

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

Energia potenziale elastica

Principio di Conservazione dell'Energia Meccanica

Conservazione dell'energia meccanica

- DEF: L'**energia meccanica** di un sistema è la somma dell'energia cinetica K e dell'energia potenziale U relativa ai corpo che lo compongono.

$$\boxed{E_{MEC} = K + U}$$

- *Studiamo, per il momento, il caso di* <u>*forze conservatrici*</u> *e supponiamo che il* <u>*sistema sia isolato*</u> *(non è possibile che forze esterne modifichino l'energia del sistema)*

Conservazione dell'energia meccanica

$$\left.\begin{aligned}\Delta K &= L \\ \Delta U &= -L\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta K = -\Delta U}$$

- Ciò equivale ad affermare che "*una di queste due forme di energia cresce nella stessa misura in cui diminuisce l'altra*".

$$K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1)$$

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1}$$

Principio di Conservazione dell'Energia Meccanica

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta E_{MEC} = \Delta K + \Delta U = 0}$$

In definitiva

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1}$$

Principio di Conservazione dell'Energia Meccanica

- Quando l'energia meccanica di un sistema si conserva, possiamo mettere in relazione il totale dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in un istante con quello di un altro istante, <u>senza dover considerare gli stati intermedi e senza necessità di conoscere il lavoro compiuto dalle forze coinvolte</u>.

$$\boxed{\Delta E_{MEC} = \Delta K + \Delta U = 0}$$

- Quando in un sistema isolato agiscono solo <u>forze conservative</u>, l'energia cinetica e l'energia potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, l'energia meccanica E_{MEC} del sistema, non cambia.

Esercizio: caduta di una pallina

- Calcolare la velocità finale raggiunta da una pallina che cade da *3 m* di altezza.
  - Durante la caduta libera, l'unica forza agente sulla pallina è la forza peso, quindi il lavoro della forza di gravità sarà:

$$L_{\text{forza di gravità}} = K_i - K_f = 0 - K_f$$

  - da cui

$$mgh = \frac{1}{2} m v_f^2 \quad \rightarrow \quad v_f = \sqrt{2gh}$$

$$v_f = \sqrt{2 \times 9.8 \times 3} = 7{,}67\ m/s$$

  - l'esercizio può risolversi anche usando l'equazione cinematica dei moti uniformemente accelerati:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$$

$$v^2 = 0 + 2gs$$

$$v = \sqrt{2gs}$$

Esempio: moto su una pista curva

Un bambino di massa m scende lungo uno scivolo irregolarmente curvo di altezza $h = 6.00$ m, come in Figura 7.11. Il bambino parte da fermo dalla sommità. (a) Determinare la velocità del bambino nel punto più basso, assumendo che non vi sia attrito.

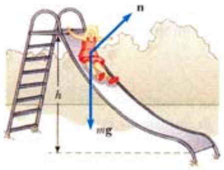


Figura 7.11 (Esempio 7.4) Se lo scivolo è senza attrito, la velocità del bambino alla fine di esso dipende solo dall'altezza dello scivolo.

Ragionamento Per prima cosa, si noti che la forza normale **n** non compie lavoro sul bambino poiché questa forza è sempre ortogonale ad ogni elemento dello spostamento. Inoltre, poiché non vi è attrito, l'energia meccanica è costante; $K + U =$ costante.

Soluzione Se si misura la coordinata y dal punto più basso dello scivolo, allora $y_i = h$, $y_f = 0$, e si ottiene

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$0 + mgh = \tfrac{1}{2} m v_f^2 + 0$$
$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Si noti che questo risultato è lo stesso di quello che si sarebbe trovato se il bambino fosse caduto verticalmente da un'altezza h! Per esempio, se $h = 6.00$ m, allora

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\left(9.80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) 6.00\text{ m}} = 10.8\text{ m/s}$$

(b) Se una forza di attrito agisse sul bambino, quanta energia meccanica verrebbe dissipata da questa forza? Si assuma che $v_f = 8.00$ m/s ed $m = 20.0$ kg.

Soluzione In tal caso, $\Delta E \neq 0$ e *non* si conserva l'energia meccanica. Si può adoperare l'Equazione 7.18 per trovare la perdita di energia cinetica dovuta all'attrito, assumendo che sia nota la velocità finale nel punto più basso:

$$\Delta E = E_f - E_i = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - mgh$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}(20.0\text{ kg})(8.00\text{ m/s})^2 +$$
$$-(20.0\text{ kg})\left(9.80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6.00\text{ m})$$
$$= -536\text{ J}$$

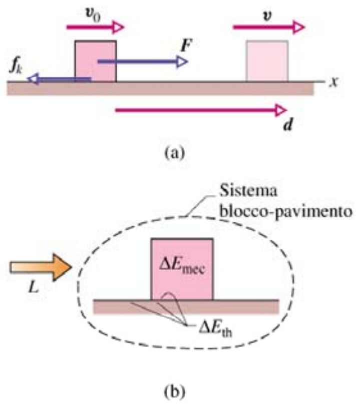
Di nuovo, ΔE è negativo poiché l'attrito fa perdere energia cinetica al sistema. Si noti, però, che essendo lo scivolo curvo, la forza normale varia sia in modulo che in direzione durante il moto. Quindi, la forza di attrito, che è proporzionale a n, varia, a sua volta, durante il moto. Ritieni che sia possibile determinare μ da questi dati?

Forze esterne con attrito

- Consideriamo un blocco soggetto ad una forza esterna che lo sposta di una distanza d contro la forza di attrito dinamico f_k
- Per la 2ª legge di Newton

$$F - f_k = ma_x$$

$$\left.\begin{aligned} F &= \text{cost} \\ f_k &= \text{cost} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_x = \text{cost}$$



Forze esterne con attrito

$$\left.\begin{array}{l} F = \text{cost} \\ f_k = \text{cost} \end{array}\right\} \Rightarrow a_x = \text{cost}$$

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a_x\left(x(t) - x_0\right) = v_0^2 + 2ad \quad \Rightarrow a_x = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2d}$$

$$\downarrow$$

$$F - f_k = ma_x$$

$$\swarrow$$

$$Fd = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + f_k d$$

$$Fd = \Delta K + f_k d$$

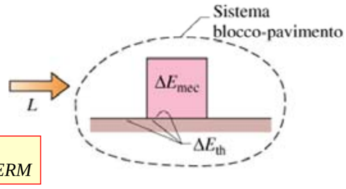
$$\boxed{Fd = \Delta E_{MEC} + f_k d}$$

Forze esterne con attrito

$$\boxed{Fd = \Delta E_{MEC} + f_k d}$$

- Se il blocco striscia sul piano contrastato dalla forza d'attrito, entrambe si riscaldano (la **temperatura**, associata al moto casuale delle molecole che costituiscono i materiali di cui sono fatti, aumenta e con essa l'Energia Termica del sistema).
- L'energia termica, quindi, è:

$$\Delta E_{TERM} = f_k d$$



- E, quindi:

$$\boxed{Fd = \Delta E_{MEC} + \Delta E_{TERM}}$$

Conservazione dell'energia totale

- Non bisogna pensare che, avendo trattato il trasferimento di energia tra un corpo materiale ad un altro (o sistemi) mediante il lavoro prodotto, l'energia sia un qualcosa che può essere "*creata*" o "*distrutta*".
- L'energia non "*appare*" o "*scompare*" magicamente.

- Esiste un Principio Generale (finora non contraddetto sperimentalmente):

L'energia totale E di un sistema può variare solo se viene trasferita energia *dal di fuori* o *al di fuori* del sistema.

$$\boxed{L = \Delta E = \Delta E_{MEC} + \Delta E_{TERM} + \Delta E_{INT}}$$

Conservazione dell'energia totale

$$\boxed{L = \Delta E = \Delta E_{MEC} + \Delta E_{TERM} + \Delta E_{INT}}$$

Energia interna

Energia termica

Energia meccanica
- *Energia cinetica*
- *Energia potenziale elastica*
- *Energia potenziale gravitazionale*
- *Energia potenziale ….*

Sistema isolato

- DEF: **Sistema Isolato** dall'ambiente esterno, è un sistema nel quale non possono avvenire trasferimenti di energia tra il sistema stesso e l'esterno.
- Il Principio di Conservazione dell'Energia diviene:

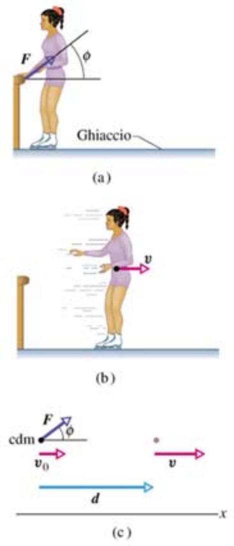
L'energia totale E di un sistema isolato si conserva, ossia non può cambiare.

- All'interno di un sistema isolato possono avvenire molti trasferimenti di energia (tra K e U, o E_{TERM} ad esempio) ma la somma totale di tutte le forme di energia all' interno del sistema non cambia.

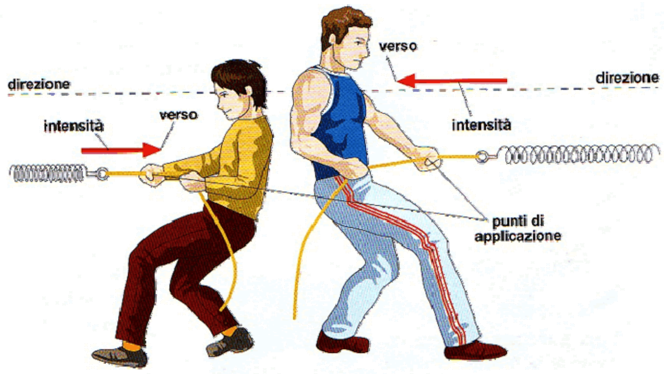
$$\boxed{\Delta E_{MEC} + \Delta E_{TERM} + \Delta E_{INT} = 0}$$

Azione delle forze esterne senza lavoro

- Una forza esterna <u>può modificare</u> l'energia cinetica o l'energia potenziale di un corpo <u>senza compiere lavoro</u> su di esso, cioè senza trasferirgli energia.
- L'energia cinetica della pattinatrice aumenta ad opera della forza esterna F applicata dalla balaustra.
- Tale forza non trasferisce energia dalla balaustra alla pattinatrice e, quindi, non compie lavoro.
- L'incremento di energia cinetica proviene da una conversione interna di **energia biochimica** dei muscoli.

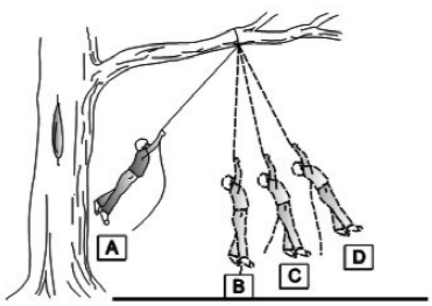


Quesito: quante forze agiscono?



Quesito

- Nell'immagine sono raffigurate quattro posizioni differenti, successive in ordine cronologico, assunte da un bambino che si dondola appeso ad un ramo.
  - *In quale di esse è maggiore la velocità?*
  - *In quale di esse è maggiore l'energia cinetica K?*
  - *In quale di esse è maggiore l'energia potenziale U?*



Quesito

- Il grafico si riferisce ad un corpo in caduta libera nel vuoto.
  - *Qual è la grandezza rappresentata sull'asse delle ordinate?*
    - *A. Velocità*
    - *B. Posizione*
    - *C. Accelerazione*
    - *D. Energia cinetica*