Fondamenti di Meccanica (3.1)
Applicazioni della Dinamica traslatoria

Corso di Elementi di Fisica e Biomeccanica

A.A. 2015-2016

Sommario

- Dalle forze alla legge oraria: integrazione dell'equazione del moto
  - Moto inerziale in assenza di forze ($\boldsymbol{F}=0$)
  - Moto inerziale in assenza di forze ($\boldsymbol{F}=cost$)
  - Moto in un campo di forze centrale
  - Moto in un campo di forze elastiche
- Introduzione al concetto di energia
- Forme di energia e sua trasformazione
- Energia cinetica
- Lavoro
  - Teorema dell'energia cinetica
  - Lavoro della forza gravitazionale
  - Lavoro della forza elastica
  - Lavoro di una forza generica
  - Lavoro e "fatica"
- Potenza meccanica e Rendimento

Dalle forze alla legge oraria

- Le leggi della Meccanica, introducendo il concetto di forza, stabiliscono una connessione di tipo causale tra il moto di un corpo e le forze che su di esso agiscono.
- La costante *m* (massa) rappresenta l'inerzia del corpo ad essere messo in movimento per effetto delle forze esterne.
- Vediamo come dalla conoscenza di un campo di forze si può arrivare a determinare la legge oraria seguita da un corpo che si trova soggetto alle forze del campo.

Integrazione dell'equazione del moto

- Dato un campo di forze nello spazio (*stazionario, cioè indipendente dal tempo*) rappresentato dalla forza risultante:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) \quad \begin{cases} F_x = F_x(x,y,z) \\ F_y = F_y(x,y,z) \\ F_z = F_z(x,y,z) \end{cases}$$

- Consideriamo un oggetto di massa *m* soggetto alla forza F.
- Per il 2° Principio della Dinamica (Newton):

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = ma_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Integrazione dell'equazione del moto

- La soluzione di ciascuna delle equazioni differenziali del sistema è una funzione

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} & \rightarrow \quad x = x(t) \\ F_y = ma_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} & \rightarrow \quad y = y(t) \\ F_z = ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} & \rightarrow \quad z = z(t) \end{cases}$$

soluzioni

- Se $F_y=0$ e $F_z=0$, la legge oraria è unidimensionale $x=x(t)$
- Se $F_z=0$, la legge oraria è bidimensionale $x=x(t), y=y(t)$
- Se $F_x \neq 0$, $F_y \neq 0$ e $F_z \neq 0$, la legge oraria è tridimensionale $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$

Moto inerziale in assenza di forze (***F***=*0*)

- Se ***F***=*0* ovunque nello spazio considerato, le soluzioni delle equazioni di moto sono:

$$\vec{F} = 0 \quad \begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} & \rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x0}t \\ F_y = ma_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} & \rightarrow \quad y(t) = y_0 + v_{y0}t \\ F_z = ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} & \rightarrow \quad z(t) = z_0 + v_{z0}t \end{cases}$$

legge oraria del moto $s = s(t)$

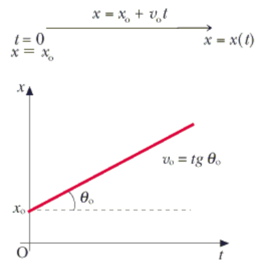
- le costanti arbitrarie di integrazione x_0, t_0, z_0 sono le coordinate all'istante iniziale t=0
- v_{x0}, v_{y0} e v_{z0} sono le componenti della velocità iniziale a t=0.
- Le tre equazioni della legge oraria del moto $s = s(t)$ rappresentano in forma parametrica l'equazione di una retta nello spazio, che costituisce la traiettoria.

Moto inerziale in assenza di forze (*F*=*0*)

- Per un moto lungo il solo asse x, ad esempio

$$\vec{F}=0 \quad \begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} & \rightarrow \quad x(t)=x_0+v_{x0}t \\ F_y = ma_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} & \rightarrow \quad y(t)=y_0=costante \\ F_z = ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} & \rightarrow \quad z(t)=z_0=costante \end{cases}$$

- L'equazione per *x(t)* rappresenta la legge oraria del *moto rettilineo uniforme* già descritto in cinematica.

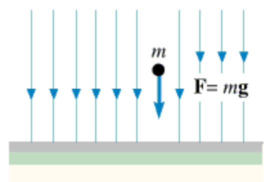


Moto in un campo di forze uniforme (*F*=*cost*)

- Considieriamo la forza del campo *costante* in modulo, direzione e verso in tutti i punti dello spazio considerato:

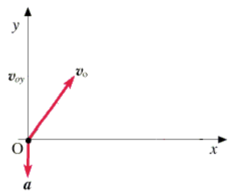
$$\vec{F}=cost=F_0 \quad \begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0 \\ F_y = ma_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}=F_0 \\ F_z = ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2}=0 \end{cases}$$

- Esempio: forza di gravità



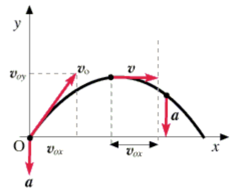
Moto in un campo di forze uniforme (***F***=*cost*)

- Semplificazione:
  - il piano *x-y* contiene ***F*** (lungo y) e $\boldsymbol{v}_0$
  - il moto si svolge interamente nel piano *x-y*



- Si ottiene, quindi

$$\vec{F} = cost = F_0 \quad \begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ F_y = ma_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_0 \\ F_z = ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$



Moto in un campo di forze uniforme (***F***=*cost*)

$$\vec{F} = cost = F_0 \quad \begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 & \rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x0}t \\ F_y = ma_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_0 & \rightarrow \quad y(t) = y_0 + v_{y0}t + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{F_0}{m}\right)t^2 \\ F_z = ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

- Che rappresentano la legge oraria del moto già descritta in Cinematica

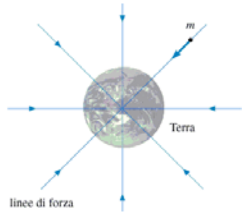
$$\rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x0}t$$

$$\rightarrow \quad y(t) = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}gt^2$$

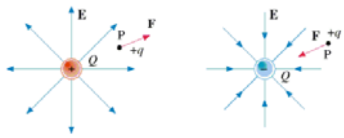
Moto in un campo di forze centrale

- Consideriamo un campo di forze in cui la forza F sia diretta verso un centro O *(forze radiali o centrali)*.

- Esempi:
  - campo gravitazionale a grande distanza dalla superficie della Terra



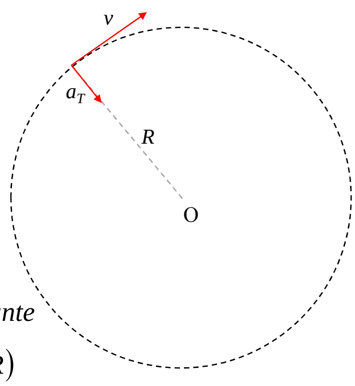
  - campo coulombiano di una carica elettrica



Moto in un campo di forze centrale

- Abbiamo (*vedi equazioni cinematiche per il moto curvilineo a due dimensioni*), quindi:

$$\begin{cases} ma_T = m\dfrac{dv}{dt} = F_T = 0 \\ ma_N = m\dfrac{v^2}{R} = F_N = 0 \end{cases}$$



- Il moto circolare uniforme che ne consegue è caratterizzato da:

$$\begin{cases} ma_T = m\dfrac{dv}{dt} = F_T = 0 \\ ma_N = m\dfrac{v^2}{R} = F_N = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = v_0 = costante \\ m\dfrac{v_0^2}{R} = F(R) \end{cases}$$

Moto in un campo di forze elastiche

- Consideriamo una forza nella direzione x espressa da:
$$\vec{F}(x,y,z) = F_x = -kx$$
- dove k è una costante (*costante elastica della molla*)

- La forza elastica rappresenta la forza di reazione che un corpo elastico (per esempio una molla) esercita quando deformato di un tratto x dalla condizione di riposo.

- L'equazione di moto di un corpo di massa m sottoposto alla forza è:
$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$
- La cui soluzione è:
$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

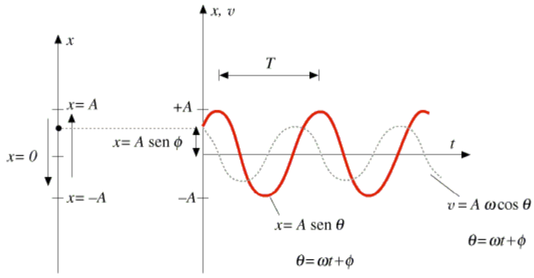
Moto in un campo di forze elastiche

- Verifica:
$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = Aw\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Aw^2\sin(\omega t + \varphi)$$
$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \rightarrow \quad -mA\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -kA\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\rightarrow \quad mA\omega^2 = kA$$
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Moto in un campo di forze elastiche

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

- La legge oraria di un corpo che si muove in un campo di forze elastiche è quella del moto armonico



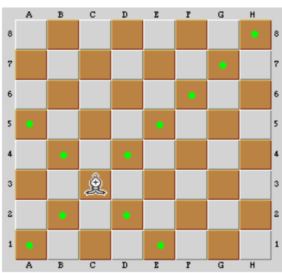
Concetto di Energia

Introduzione al concetto di energia

- Esaminiamo ora una delle leggi di base della fisica:
  - Tutti i fenomeni naturali a tutt'oggi conosciuti sono governati da una certa legge, della quale non si conoscono eccezioni: é una legge esatta, per quanto ne sappiamo.
  - Si chiama **conservazione dell'energia**, e afferma l'esistenza di una certa quantità, chiamata **energia**, che non cambia mai attraverso i molteplici mutamenti della natura.

Conservazione dell'energia

- E un'idea piuttosto astratta, perché e un principio matematico: dice che esiste una quantità numerica che non cambia qualsiasi cosa succeda.
- Non è la descrizione di un meccanismo, non è niente di concreto; dice semplicemente che se calcoliamo un certo numero, lasciamo che la natura faccia il suo corso e poi lo calcoliamo di nuovo, otteniamo lo stesso risultato.
- (Un po' come quando si ha un alfiere su una casella nera: dopo un numero imprecisato di mosse, di cui non conosciamo i dettagli, e ancora su una casella nera. È una legge di questa natura).



Principio di conservazione

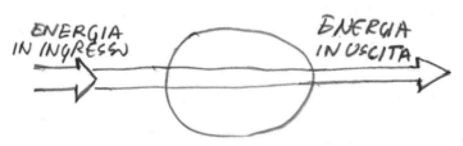
Principio di conservazione

$$N.\ cubi\ visibili + \frac{Peso\ scatola - 500\ g}{100\ g} = \text{cost}$$

$$N.\ cubi\ visibili + \frac{Peso\ scatola - 500\ g}{100\ g} + \frac{Altezza\ acqua - 15\ cm}{0.6\ cm} = \text{cost}$$

Quale analogia? (1)

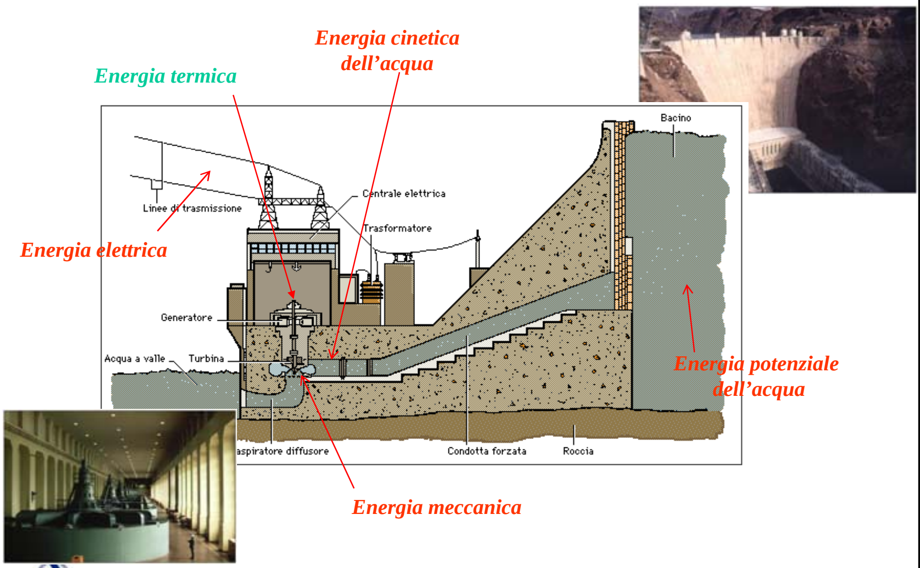
- Per verificare la conservazione dell'energia dobbiamo assicurarci di non averne aggiunta né tolta.



Quale analogia? (2)

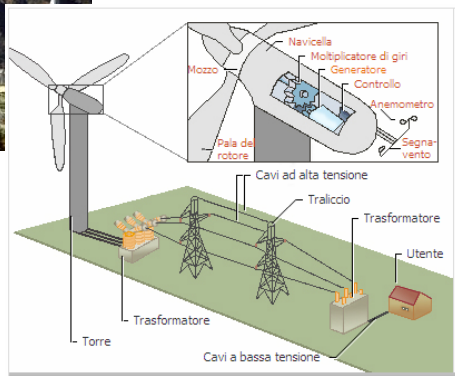
- L'energia si presenta in svariate forme:
  - energia *gravitazionale,*
  - *energia cinetica (vento, acqua,…)*
  - *energia termica (sole, fuoco, combustione)*
  - *energia elastica (arciere)*
  - *energia elettrica (batteria, dinamo)*
  - *energia chimica (cibo, combustibile, batteria)*
  - *energia radiante (sole)*
  - *energia nucleare*
  - *energia di massa*
- ognuna ha un'espressione diversa. Sommando tutte le espressioni per ognuno di questi contributi, l'energia non cambierà, se non per quella che entra o esce.

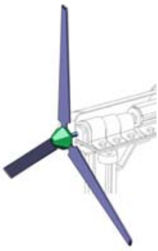
Energia di posizione dell’acqua



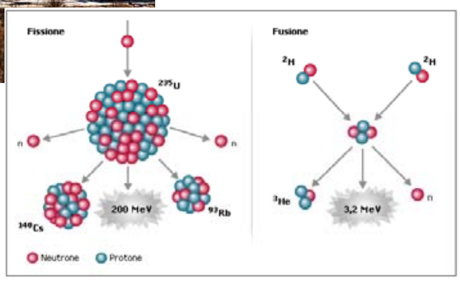
Energia di posizione dell’acqua

Energia eolica

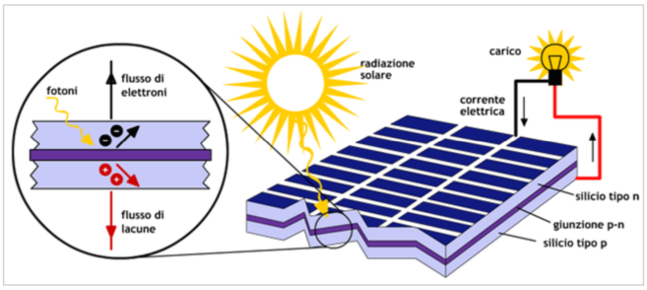




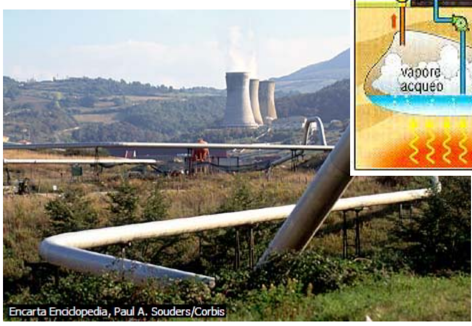
Energia nucleare

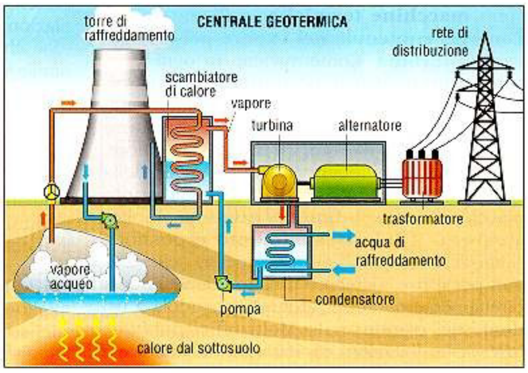


Energia radiante (effetto fotovoltaico)

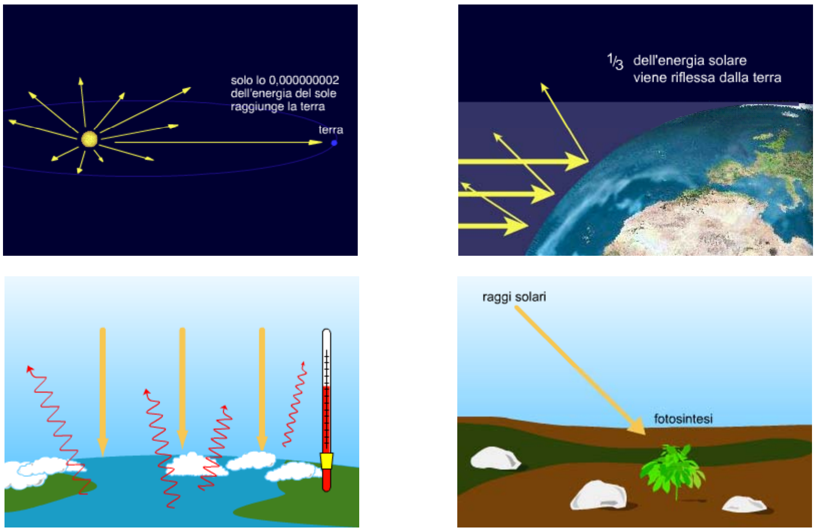


Energia geotermica

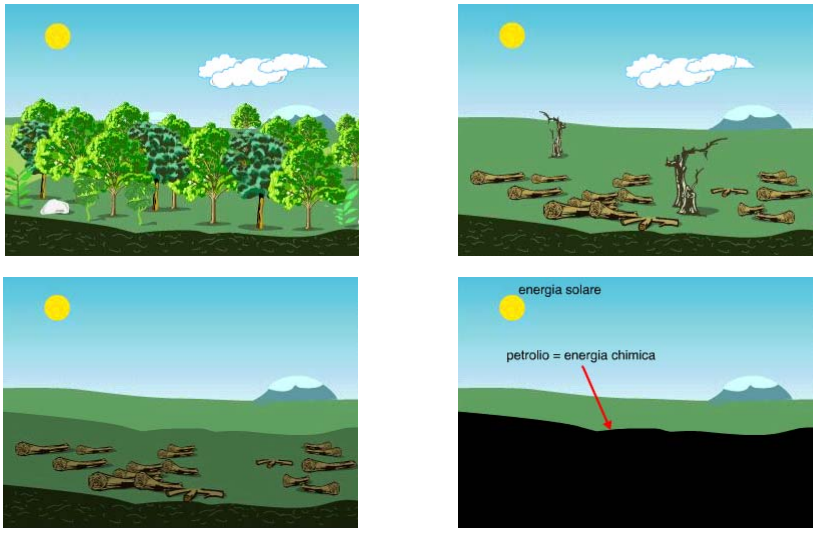




Energia solare



Energia solare

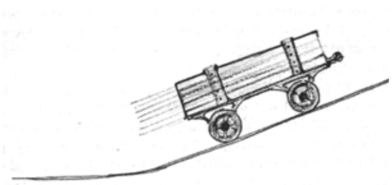


Concetto di energia

- Ogni cambiamento comporta movimento; e movimento significa energia.
- **Energia**, in effetti, è tutto ciò che può essere trasformato in movimento; o tutto ciò in cui il movimento si trasforma.
- Se un oggetto si muove, esso possiede "**energia di movimento**".
- L'energia di movimento posseduta da un oggetto che si muove
  - è tanto maggiore quanto più grande è la **"massa"** di quell'oggetto, cioè quanto più grande è la quantità di materia che costituisce quell'oggetto.
  - A parità di massa, l'energia di movimento aumenta rapidamente all'aumentare della **"velocità":** se la velocità raddoppia, l'energia di movimento è quattro volte più grande.

Trasformazioni dell'energia

- Immaginiamo un carrello che sia stato spinto a una certa velocità, comunicandogli cosi una certa energia di movimento.
- Se le rotaie lungo le quali il carrello si muove percorrono una strada in salita, il carrello viene frenato dalla forza del suo peso che, essendo diretta verso il basso, si oppone al movimento. Il carrello rallenta sempre più, e infine si ferma.
- Se la velocità che aveva all'inizio fosse stata più grande, il tratto percorso in salita sarebbe stato più lungo: quattro volte più grande, se la velocità iniziale fosse stata doppia.
- Appena si ferma in cima alla salita tiriamo il freno a mano: il carrello, appunto perché è fermo, non ha più energia di movimento.

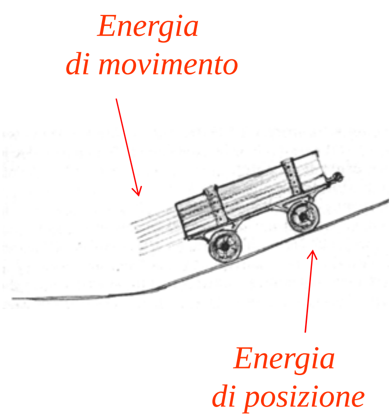


Energia di posizione

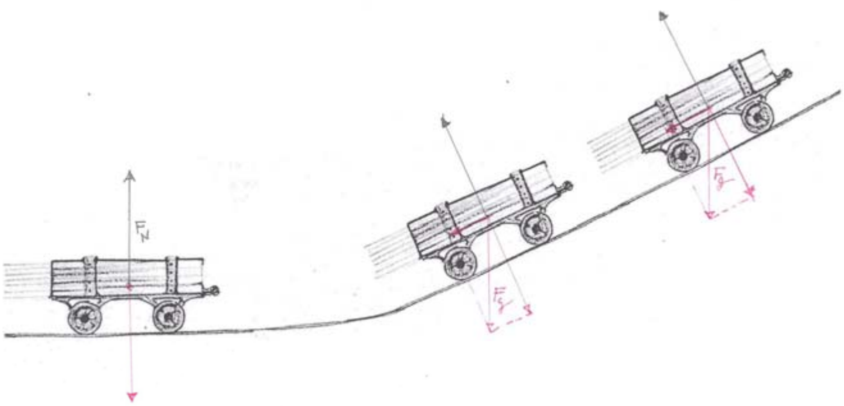
- Tuttavia esso ha ora "**energia di posizione**": lo dimostra il fatto che, allentando il freno a mano, il carrello prende a muoversi spontaneamente verso il basso, per tornare in fondo alla discesa con una energia di movimento circa uguale a quella che aveva inizialmente, quando ha cominciato ad arrampicarsi in salita.

- Esempio di trasformazione dell'energia
  - energia di movimento ⇒ energia di posizione,
  - energia di posizione ⇒ energia di movimento

- L'energia di posizione e quella di movimento sono anche dette, nel loro insieme, "**energia meccanica**" .



Energia potenziale



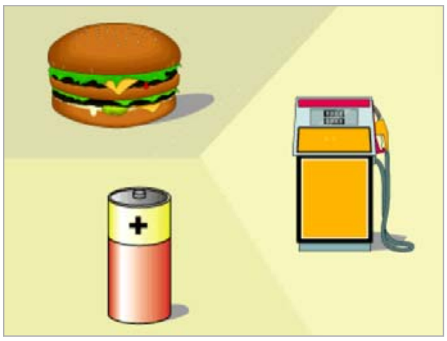
Trasformazione e Trasferimento dell’energia

- In quasi tutti questi esempi, l’energia non solo si è **trasformata**, cioè ha cambiato forma, ma si è anche **trasferita**, cioè ha cambiato posizione: è passata da un sistema a un altro sistema.
  - Dall’acqua alle turbine, alla dinamo, alla lampada; e la luce, cioè l’energia luminosa, si spande per tutta la stanza.
  - L’energia luminosa e termica del Sole viaggia attraverso lo spazio per arrivare fino a noi.

- L’energia è dunque continuamente soggetta a processi di trasformazione e trasferimento

Accumulo dell’energia

- Alcuni di questi processi vengono anche detti processi di “**immagazzinamento**” o di “**accumulo**” dell’energia: questo succede quando l’energia che viene ricevuta da un sistema assume una forma che non ha effetti immediatamente evidenti.



- Esempi di accumulo di energia chimica

Accumulo dell’energia

- Quando noi comunichiamo energia elettrica ad una batteria, questa energia assume una forma che non si manifesta come luce, o come calore, o come movimento.
- Essa si è accumulata nella batteria, è nascosta in essa: ce ne accorgiamo senza alcun dubbio solo estraendola nuovamente dalla batteria, o producendo
  - luce in una lampada, o
  - energia di movimento con un motore elettrico,
  - e cosi via.

Accumulo dell’energia

- Una **diga** che mantenga a monte l’acqua di un fiume, accumula energia nella forma di energia di posizione: questa energia si libera solo quando all’acqua viene dato sfogo verso valle.
- Un **serbatoio** protetto tutto intorno con materiali isolanti, può conservare in sé accumulata l’energia termica dell’acqua calda in esso contenuta. In realtà un po’ di calore sfugge sempre, e si disperde all’intorno: non è semplice accumulare e conservare l’energia termica.

Conservazione dell'energia

- Le leggi della fisica derivano dalla osservazione dei fatti.
- Una delle leggi fondamentali della fisica, una delle leggi più sicuramente basate sulla osservazione di fatti appartenenti alle categorie più disparate, afferma che l'energia si conserva.

L'energia si trasforma, si trasferisce, o si accumula; ma non può essere creata, né può essere distrutta.

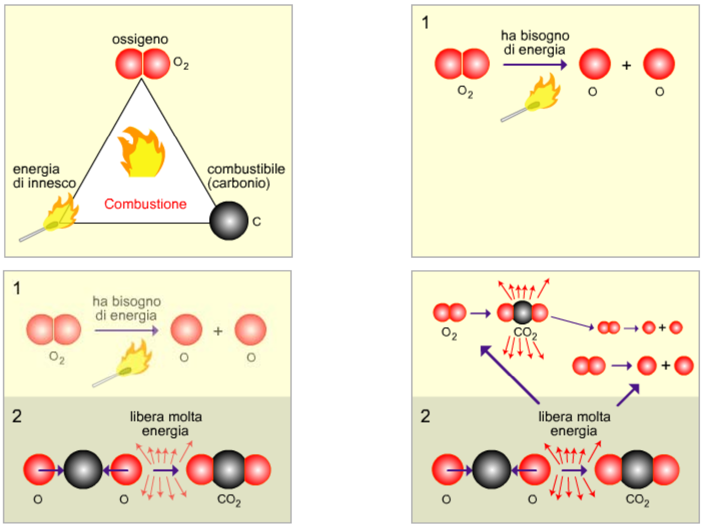
- Questa fondamentale legge fisica si chiama appunto "**Principio di conservazione dell'energia**".

Trasformazione di un sistema fisico

- *Se l'energia in uscita è minore di quella in ingresso,la differenza è stata accumulata dal sistema.*

- *Se l'energia in uscita è maggiore di quella in ingresso, la differenza è stata estratta dal sistema.*

Esempio: combustibile



Concetto di Energia Cinetica

Una definizione semplice di energia

- Abbiamo studiato un metodo per la determinazione del moto di un punto materiale.
- Possiamo determinare come varia nel tempo la posizione di un corpo materiale conoscendo la forza che agisce su di esso ed applicando la seconda legge di Newton per metterla in relazione con l'accelerazione subita.

$$\vec{F}_{NET} = m\vec{a}$$

- Conoscendo l'accelerazione, date la posizione iniziale e la velocità iniziale del corpo materiale, possiamo calcolarne il moto completo e la sua evoluzione nel tempo [$\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{r}(t)$].

Una definizione semplice di energia

- Spesso però non ci interessa una descrizione così particolareggiata, e si desidera invece una descrizione che indichi come un sistema evolve in un senso più ampio.

- Per tale motivo introdurremo i concetti di **lavoro** e di **energia** e, successivamente, le leggi fisiche che li riguardano.

Una definizione semplice di energia

- Partiamo da una definizione generale
- l'energia è una grandezza fisica scalare associata allo stato (o condizione) di uno o più corpi
- Diciamo che l'energia è un *numero* che attribuiamo a un insieme di uno o più corpi. Se una forza interviene a modificare lo stato di uno dei corpi, ad esempio muovendolo, il numero che rappresenta l'energia cambia.
- l'energia si può trasformare da una forma a un'altra e può trasferirsi da un corpo a un altro, ma la quantità di energia complessiva rimane sempre invariata (*l'energia si conserva*)

Energia cinetica

- L'energia cinetica è l'energia associata allo stato di moto del corpo.
  – Quanto più veloce è l'oggetto considerato, tanto maggiore è la sua energia cinetica.
  – Quando l'oggetto è a riposo, la sua energia cinetica è zero.
- DEF: definiamo energia cinetica di un corpo la quantità:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

- *La relazione mostrata è valida per v«c*

Unità di misura

- L'unità di misura SI dell'energia cinetica (*così come di qualsiasi altra forma di energia*) è il **joule** (J), dal nome del fisico inglese del XIX secolo ***James Prescott Joule*** (1818-1889).

- Dimensionalmente:

$$1\ Joule = 1\ J = [kg]\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$$

Concetto di Lavoro

Lavoro

- Ogni variazione di velocità di un oggetto (*tramite accelerazione ottenuta aumentando o diminuendo la velocità del moto*) provoca una variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

- Definiamo questi cambiamenti di energia cinetica dicendo che la forza ha trasferito energia all'oggetto, oppure viceversa.
- In un tal trasferimento di energia causato da una forza, si dice che la forza ha compiuto il lavoro L sull'oggetto.

ATTENZIONE !!!

- *Il termine trasferimento può essere fuorviante. Non significa che vi sia una sostanza che fluisce verso un oggetto o da un oggetto. Questo trasferimento non è come un flusso d'acqua.*

Definizione di "lavoro"

- **DEF**: Il **lavoro** L è l'energia trasferita *a un corpo* o *da un corpo* attraverso una forza che agisce sul corpo stesso. L'energia ceduta al corpo è un lavoro positivo, mentre quella ceduta dal corpo è un lavoro negativo.

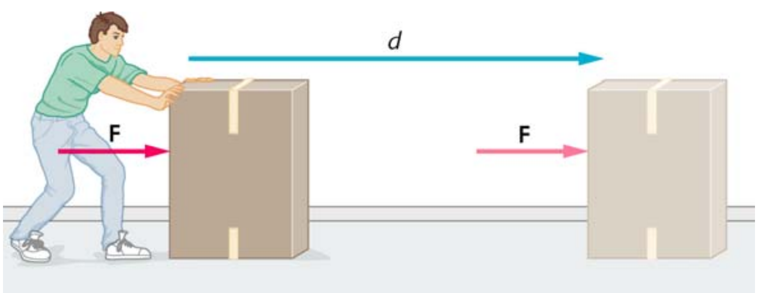
- Il lavoro ha la stessa unità di misura dell'energia ed è una **grandezza scalare**.

$$1\ Joule = 1\ J = [kg]\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$$

Espressione per il lavoro

- Se la forza è nella stessa direzione dello spostamento:

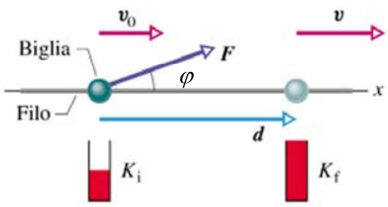
$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad F_x = ma_x$$



Espressione per il lavoro

- Caso della biglia accelerata da una forza F costante:
- Partendo dalla 2ª legge di Newton

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad F_x = ma_x$$



- E ricordando che

a_x costante

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d$$

- Otteniamo

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d}$$

- N.B. questo è il caso di una forza costante (**non vero in generale**!!!)

Espressione generale per il lavoro

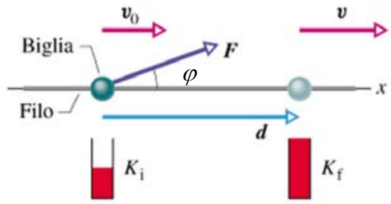
$$L = F_x d = \Delta K$$

- Per calcolare il lavoro compiuto da una forza su un corpo durante un certo spostamento, si considera solo la componente della forza lungo la direzione dello spostamento subito dal corpo.

- Il lavoro compiuto dalla componente della forza perpendicolare allo spostamento è nullo.

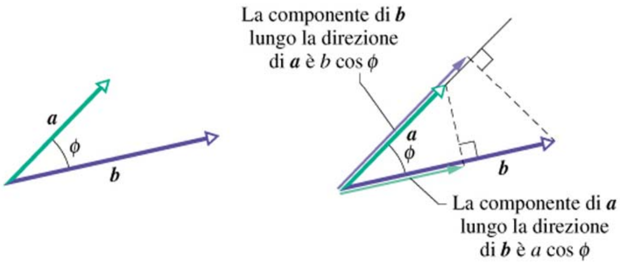
Espressione generale per il lavoro

$$L = Fd\cos\varphi$$



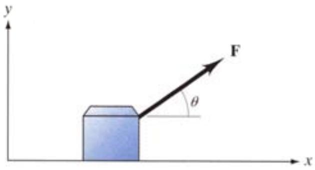
$$\boxed{L = \vec{F}\cdot\vec{d}}$$

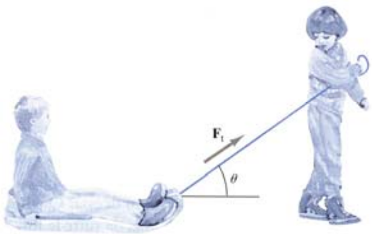
- lavoro compiuto da una forza costante



Parentesi prodotto scalare

- Spesso su un corpo in moto agisce una forza la cui direzione non è parallela alla direzione del moto (spostamento).
- Se la componente perpendicolare della forza F non è tanto grande da sollevare il blocco, questo verrà tirato lungo la superficie.





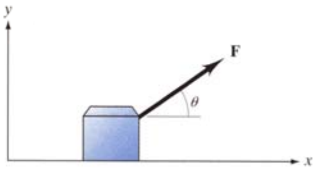
Parentesi prodotto scalare

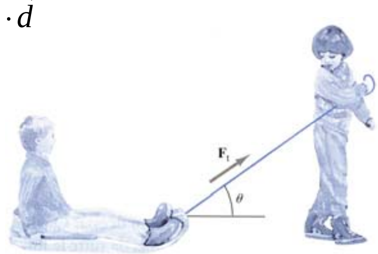
- Il lavoro compiuto, quindi, per far percorrere un cammino d è il prodotto:

$$L = F_{parallelo} d = (F\cos\theta)\, d$$

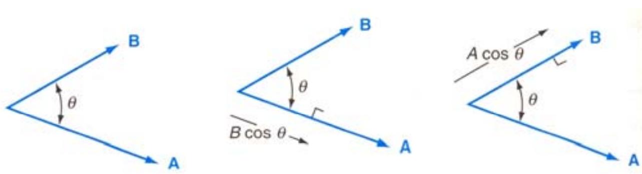
- Possiamo generalizzarlo come:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d}$$





Proprietà del prodotto scalare



- Il prodotto scalare di due vettori è una quantità scalare.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

- $B\cos\theta$ è la proiezione del vettore **B** sul vettore **A**
- $A\cos\theta$ è la proiezione del vettore **A** sul vettore **B**

Espressione generale per il lavoro

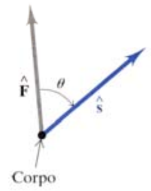
- N.B. Restrizioni nell'uso della

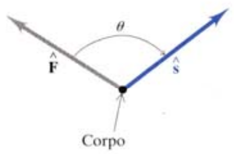
$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \vec{d}}$$

1. Innanzitutto la forza deve essere costante, vale a dire che non deve cambiare né in modulo né in direzione durante il moto del corpo. (*Vedremo in seguito cosa avviene con le forze variabili in intensità*)
2. In secondo luogo, il corpo deve essere puntiforme. Cioè deve essere rigido: tutte le parti del corpo devono muoversi insieme nello stesso modo.

Segno del Lavoro

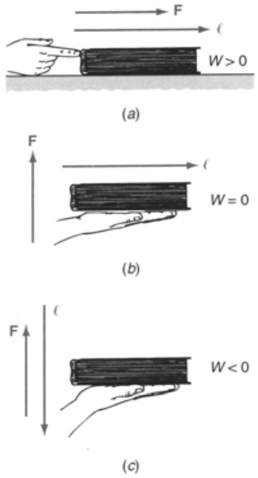
- Il lavoro svolto da una forza su un corpo può essere positivo o negativo.
- Regola
  - Una forza compie lavoro positivo (***lavoro motore***) quando la sua componente nella direzione dello spostamento è di verso concorde con lo spostamento stesso.
  - Una forza compie lavoro negativo (***lavoro resistente***) quando la sua componente nella direzione dello spostamento è di verso non concorde con lo spostamento stesso.
  - Il lavoro è nullo se questa componente è nulla.





Segno del Lavoro

- Il lavoro dipende dall'angolo tra la forza e lo spostamento



Lavoro svolto da più forze

- Se più forze agiscono simultaneamente su un corpo puntiforme il lavoro totale può essere calcolato in due modi:

$$L_{TOT} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} + \ldots + \vec{F}_N \cdot d\vec{s}$$

$$L_{TOT} = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N\right) \cdot d\vec{s} = \vec{R} \cdot d\vec{s}$$

Teorema dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d$$

- Mette in relazione la variazione di energia cinetica (iniziale e finale) con il lavoro svolto dalla forza sul corpo materiale.

$$\boxed{\Delta K = K_f - K_i = L}$$

- Aritmeticamente, ma anche concettualmente:

$$\boxed{K_f = K_i + L}$$

Interpretazione dell'energia cinetica

- Si può anche interpretare l'energia cinetica come il <u>lavoro che il corpo materiale può fornire nel fermarsi</u>.
- Il martello in moto possiede energia cinetica e può compiere lavoro sul chiodo
- Il lavoro fatto sul chiodo è pari alla **forza media** (esercitata dal martello sul chiodo) moltiplicato per la **distanza** che il chiodo percorre nel muro

$$L = \overline{F}s$$

Teorema dell'energia cinetica: esempio

- Consideriamo un corpo, inizialmente fermo, sul quale agisca una forza F e supponiamo che sia la forza che lo spostamento abbiano stessa direzione e verso:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = m|\vec{a}||\vec{s}| = mas = K = \frac{1}{2}mv^2$$

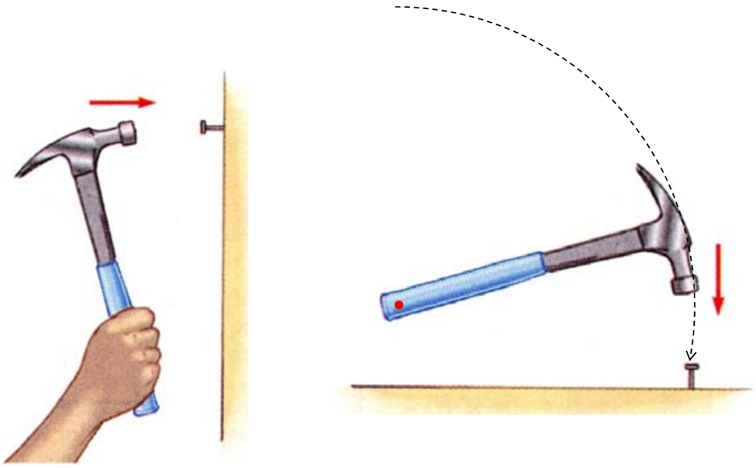
$$\Downarrow$$

$$v = \sqrt{2as}$$

Interpretazione dell'energia cinetica

- Nella realtà sia il martello che il chiodo non possono essere considerati punti materiali.
- Infatti,
  - una parte dell'energia cinetica del martello serve a "*riscaldare*" il chiodo ed
  - il lavoro su quest'ultimo serve a riscaldare chiodo e muro e a deformare la parete (buco)

Interpretazione dell'energia cinetica



Lavoro della forza gravitazionale

Lavoro della forza gravitazionale

- Caso di un corpo in moto verso l'alto (ovvero nel verso contrario all'attrazione gravitazionale della Terra)

$$L_g = mgd\cos\varphi$$

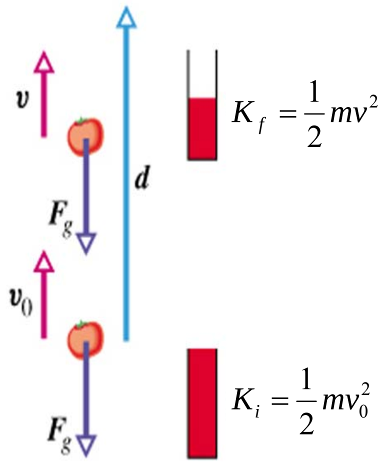
$$\boxed{L_g = mgd\cos(180°) = -mgd}$$

ascesa

- Nella fase di caduta

$$\boxed{L_g = mgd\cos(0°) = mgd}$$

discesa



Lavoro della forza gravitazionale

- Supponiamo, ora, di "sollevare" ed "abbassare" un corpo applicando una forza.

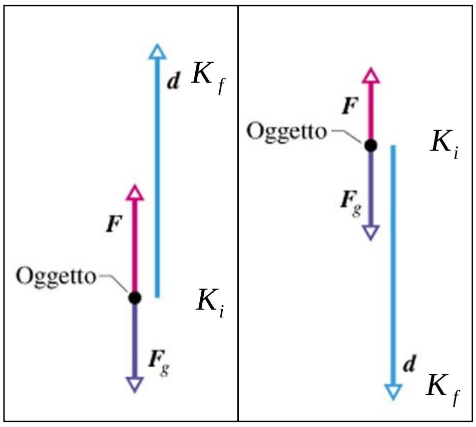
$$\Delta K = K_f - K_i = L_a + L_g$$

- Corpo fermo:

$$K_f = K_i = 0 \Rightarrow L_a + L_g = 0$$

- Variazione dell'energia cinetica

$$K_f = K_i \Rightarrow L_a + L_g = 0$$



$$\boxed{\Rightarrow L_a = -L_g}$$

Lavoro della forza gravitazionale

$$\boxed{L_a = -L_g}$$

- Significa che la forza applicata trasferisce al corpo materiale la stessa quantità di energia che gli viene sottratta dalla forza di gravità.

- Oppure

- Il lavoro compiuto dalla forze applicata al corpo materiale è l'opposto del lavoro compiuto dalla forza di gravità.

Lavoro della forza elastica

Forza elastica

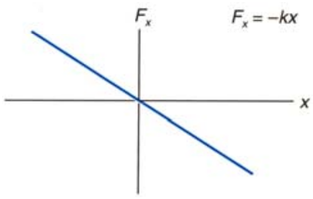
- Fin qui abbiamo considerato il lavoro compiuto da forze costanti.
- In genere, tuttavia, gran parte delle forze con le quali abbiamo a che fare non sono assolutamente costanti, e possono variare sia nello spazio che nel tempo.

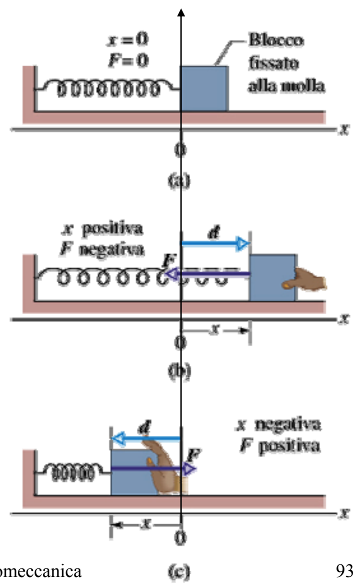
$$\vec{F}(x, y, z, t)$$

- Ad esempio, la forza esercitata su un corpo materiale da una **molla** dipende dall'entità dell'allungamento o della compressione della molla stessa.

Lavoro della forza elastica

- DEF: **stato di riposo**: quello nel quale il blocco è fermo in assenza di forze esterne (la mano!)
- DEF: **forza di richiamo**: è la forza che agisce sul blocco una volta che si sia allungata o compressa la molla con una forza esterna applicata con la mano.





Definizione della forza elastica

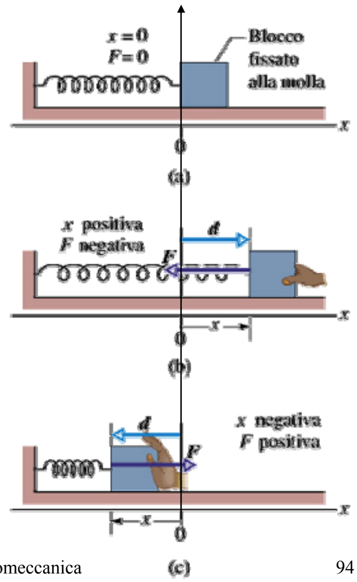
- Nella maggior parte dei casi (ovvero per la maggior parte della molle) si può ritenere che se la molla è *estesa* o *compressa* di un piccolo tratto (rispetto alla sua elongazione a riposo) vale la seguente relazione:

$$\boxed{F_x = -k\,x}$$

Legge di Hooke

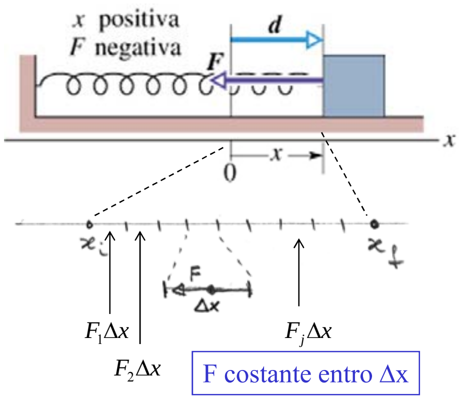
Costante elastica della molla

- Proprietà
  - La forza è sempre orientata nel verso opposto di quello dello spostamento
  - Maggiore è k, più rigida è la molla
  - La forza F_x è variabile!!!



Lavoro compiuto dalla forza elastica

- Ipotesi di partenza:
  - La molla è priva di massa (*m* trascurabile rispetto alla massa del blocco)
  - la molla è ideale (obbedisce perfettamente alla legge di Hooke)
  - il contatto tra blocco e pavimento è privo d'attrito
  - il blocco si comporta come un corpo puntiforme.



- Sommando su tutti gli spostamenti

$$L_{molla} = (-F_1\Delta x) + (-F_2\Delta x) + \ldots + (-F_j\Delta x) + \ldots + (-F_{ultimo}\Delta x)$$

$$L_{molla} = \sum(-F_j\Delta x)$$

Lavoro compiuto dalla forza elastica

$$L_{molla} = (-F_1\Delta x) + (-F_2\Delta x) + \ldots + (-F_j\Delta x) + \ldots + (-F_{ultimo}\Delta x)$$
$$L_{molla} = \sum(-F_j\Delta x)$$

- Se facciamo tendere a zero lo spostamento Δx:

$$L_{molla} = \int_{x_i}^{x_f} -F_j dx$$

$$F_x = -kx$$

$$L_{molla} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k\int_{x_i}^{x_f} xdx = -\frac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

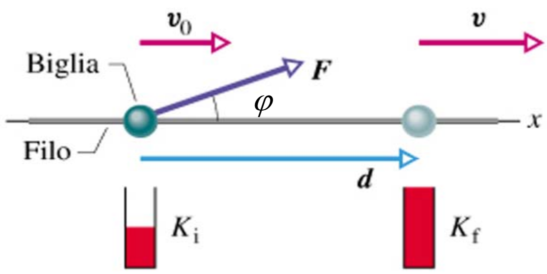
$$\boxed{L_m = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2}$$

Lavoro compiuto dalla forza elastica

Lavoro da una forza generica

Lavoro svolto da una forza generica

- Consideriamo il caso di una forza F non costante (in intensità, non in direzione e verso) che agisce nella direzione dello spostamento.
- F(x) varia in funzione di x.

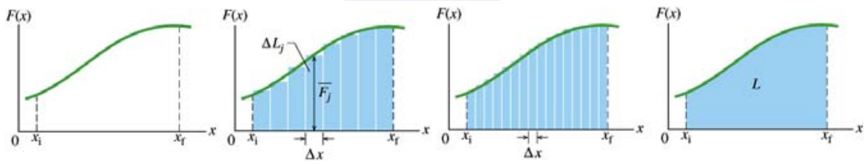


Lavoro svolto da una forza generica

$\cancel{L = \vec{F} \cdot \vec{d}}$ poiché F non è costante

- Scegliamo, quindi, spostamenti finiti Δx entro i quali prendiamo il valor medio di F(x)

$\boxed{\Delta L_j = \overline{F}_j \Delta x}$ valore dell'area del rettangolo



Sommando su tutti i rettangoli si ottiene il valore approssimato di L

$$L = \sum \Delta L_j = \sum \left(\overline{F}_j \Delta x\right)$$

- Al limite per Δx→0, otterremo il risultato esatto:

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \left(\overline{F}_j \Delta x\right)$$

Lavoro svolto da una forza generica

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \left(\overline{F}_j \Delta x \right)$$

- Questo limite è la definizione di integrale della funzione F(x) tra i limiti x_i e x_f :

$$\boxed{L = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx}$$

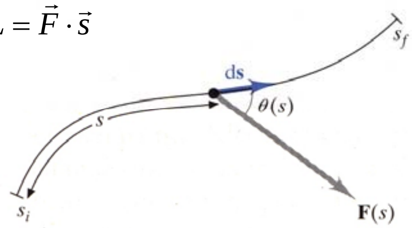
Lavoro svolto da una forza variabile

Generalizzazione con una forza variabile

- Un corpo si muove lungo una traiettoria arbitraria che comincia in s_i e termina in s_j. Durante il moto su di esso agisce una forza il cui modulo e la cui direzione orientata variano entrambi in modo arbitrario.
- La posizione s di un punto qualsiasi sulla traiettoria è la sua distanza da s_i misurata lungo la traiettoria.
- Non possiamo il lavoro per mezzo dell'equazione:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

  - **F** non è costante,
  - il vettore **s** non è definito



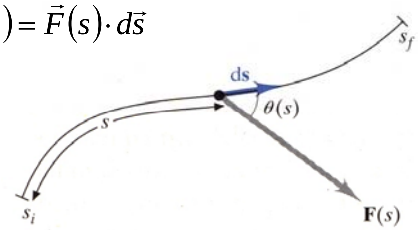
Generalizzazione con una forza variabile

- Suddividiamo la traiettoria in un numero infinito di segmenti rettilinei infinitesimi ds. Ciascun segmento ha in realtà proprietà vettoriali: sebbene la sua lunghezza sia infinitesima, ogni segmento ha una direzione orientata definita:

$$d\vec{s} = ds\,d\hat{s}$$

- Il lavoro infinitesimo, mentre il corpo si muove lungo la traiettoria, è

$$dL(s) = \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$



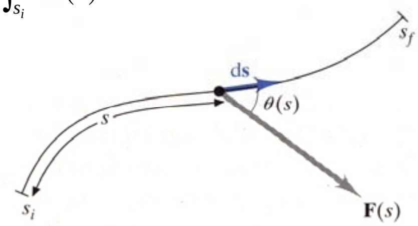
Generalizzazione con una forza variabile

- Il lavoro infinitesimo, mentre il corpo si muove lungo la traiettoria, è

$$dL(s) = \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

- Il lavoro totale L compiuto dalla forza F(s) lungo l'intera traiettoria è:

$$L = \int_{s_i}^{s_j} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$



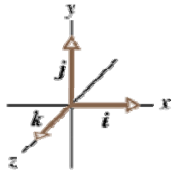
Estensione tridimensionale

- Se consideriamo un corpo sul quale agisce una forza:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

- Poiché:

$$d\vec{r} = (dx)\hat{i} + (dy)\hat{j} + (dz)\hat{k}$$



- Il lavoro infinitesimo dL svolto da **F** sul corpo è:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

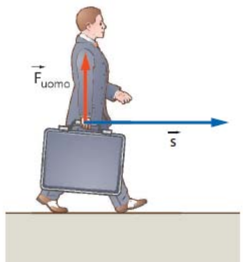
- Ed il lavoro totale risulta:

$$\boxed{L = \int_{r_i}^{r_f} dL = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dx + \int_{z_i}^{z_f} F_z dx}$$

Lavoro e fatica

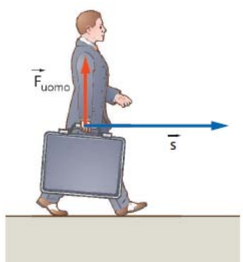
Lavoro e Fatica

- Se trasportiamo una cassa su per le scale, la fatica che sperimentiamo cresce sia all'aumentare del peso della cassa, sia all'aumentare della lunghezza della salita. In questo caso la grandezza fisica «*lavoro*», proporzionale sia alla forza che allo spostamento, descrive piuttosto bene anche la nostra sensazione di *fatica*.
- Per definizione, però, un uomo che porta una valigia lungo un percorso orizzontale compie un lavoro nullo, perché la forza e lo spostamento sono perpendicolari.
- Naturalmente, per trasportare la valigia questa persona non fa una fatica nulla. In questo caso, quindi, la grandezza fisica «*lavoro*» non corrisponde alla nostra sensazione di fatica.



Lavoro e Fatica

- La contraddizione è soltanto apparente: i nostri muscoli striati non sono in grado di «*bloccarsi*» e rimanere immobili per sostenere la valigia; mentre la trasportiamo, essa ci piega verso il basso e noi continuiamo a rispondere, anche senza accorgercene, con microscopici ma continui movimenti verso l'alto dei muscoli del braccio.
- In ognuno di questi spostamenti la forza che esercitiamo e lo spostamento sono paralleli, per cui il lavoro che compiamo è positivo.
- È la somma di questi lavori che noi avvertiamo come fatica.



Potenza meccanica

Potenza meccanica

- DEF: la **potenza** è la rapidità con la quale viene sviluppato una certa quantità di lavoro.
- DEF: **potenza media** è la rapidità con la quale una forza in un intervallo di tempo Δt compie una certa quantità di lavoro:

$$\boxed{\overline{P} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F}\,\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

- DEF: **potenza istantanea** è la rapidità istantanea con la quale viene svolto una certa quantità di lavoro:

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}}$$

Potenza meccanica: unità di misura

- L'unità S.I. della potenza è il Joule al secondo [$^J/_s$] detta chiamata **watt** (W):

$$\boxed{1\,W = 1\,{}^{J}\!/\!_{s}}$$

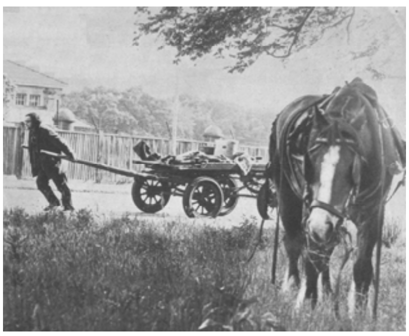
- Il watt prende nome da **James Watt** (1736-1819), il quale apportò importanti miglioramenti alla macchina a vapore.
- Watt introdusse l'idea *dell'horsepower* (cavallo-vapore, hp) come unità di potenza per specificare la velocità con la quale queste macchine compivano lavoro.
- Il cavallo-vapore è definito dalla relazione

$$\boxed{1\,cavallo\ vapore = 1CV = 1hp = 735.5\,W}$$

Horse Power

- Il cavallo-vapore *(horsepower)* (1 hp = **735.5** W) è un'unità di potenza definita in base a una stima dell'entità di lavoro che un cavallo può compiere nell'unità di tempo; nella realtà un cavallo non può erogare costantemente questa potenza.
- Un uomo, d'altra parte, può erogarne pressappoco il 5 per cento per un'ora circa. Si potrebbe definire il *manpower* ponendolo pari a **37** W.

- Il termine "*manpower*" è invece usato con un significato completamente diverso e indica il numero di persone che lavorano in una ditta o impresa.



Potenza meccanica

- Ricordando

$$\overline{P} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

- Si deduce che il lavoro può essere anche espresso come

$$\Delta L = \overline{P}\ \Delta t$$

- La cui unità di misura è il watt-ora [Wh]. Il suo multiplo kWh è impiegato per specificare il lavoro prodotto dall'energia elettrica (vedi bollette ENEL) nelle nostre abitazioni.

Potenza meccanica

- Se consideriamo un corpo materiale in moto unidimensionale sul quale agisca una forza **F**, possiamo scrivere

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{(F\cos\varphi)dx}{dt} = (F\cos\varphi)\frac{dx}{dt} = (F\cos\varphi)v$$

- Generalizzando, otterremo

$$\boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

*Il SUV in figura, applicando una forza **F** alla baracca facendole raggiungere una velocità **v**, sviluppa una potenza P*

Rendimento

- Una macchina meccanica trasforma *energia cinetica K* o energia potenziale U, di qualsiasi natura, in *lavoro meccanico*.
- Se sono presenti forze non conservative (es. attrito) parte dell'energia iniziale è dispersa e non convertita totalmente in lavoro.

- DEF: rendimento – rapporto tra il lavoro utile,, prodotto dalla macchina, e l'energia totale impiegata per compierlo:

$$\eta = \frac{L}{E_{TOT}}$$