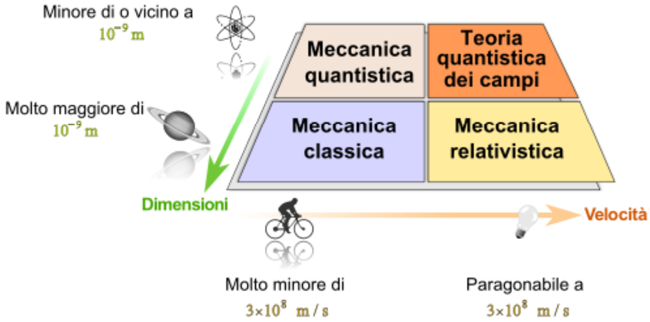
Fondamenti di Meccanica (2.1) Cinematica

Corso di Elementi di Fisica e Biomeccanica
A.A. 2015-2016

Sommario

- Introduzione alla Meccanica (*Cinematica, Dinamica, Statica*)
- Cinematica del *punto materiale*
- Posizione, Spostamento, Traiettoria, Diagramma orario
- Velocità scalare e vettoriale (media ed istantanea)
- Accelerazione scalare e vettoriale (media ed istantanea)
- Legge oraria (di alcuni moti semplici):
  - *Moto rettilineo uniforme*
  - *Moto rettilineo uniformemente accelerato*
  - *Moto parabolico uniformemente accelerato*
  - *Moto circolare uniforme*
  - *Moto curvilineo in due dimensioni*
  - *Moto armonico*
- Moto di un grave in caduta libera
- Effetti dell'accelerazione sul corpo umano

Limiti della Meccanica Newtoniana



- Per velocità prossime a quelle della luce, la Meccanica Newtoniana deve essere sostituita dalla **Meccanica Relativistica** (basata sulla teoria della relatività ristretta di Einstein).

- Per corpi interagenti con dimensioni a scala atomica (es: elettroni) la Meccanica Newtoniana deve essere sostituita dalla **Meccanica Quantistica**.

Introduzione

- La **Meccanica** è quella branca della Fisica che si occupa della descrizione dei moti dei corpi e delle interazioni (forze) responsabili dei moti stessi.

- La Meccanica si suddivide in
  - **Cinematica**
    - *descrive il movimento dei corpi a prescindere dalle cause che li generano*
  - **Dinamica**
    - *considera il moto in funzione delle forze agenti sui corpi*
  - **Statica**
    - *si occupa delle condizioni di equilibrio dei corpi*

Cinematica e punto materiale

- La **cinematica** è il capitolo della fisica che si occupa di *descrivere* il moto degli oggetti senza, tuttavia, porsi il problema di collegare il moto alle cause che lo determinano.

- Nell'ambito della cinematica (e più in generale della meccanica) il più semplice fra i sistemi fisici è quello schematizzabile come un punto materiale.

- Un **sistema fisico** è schematizzabile come **punto materiale** (*ovvero che esso si comporta come un punto materiale*) *se* le sue dimensioni lineari sono piccole rispetto alla precisione con cui ci interessa determinarne lo posizione.

Cinematica e punto materiale

- Da un punto di vista grafico, un punto materiale può essere rappresentato come un punto geometrico.

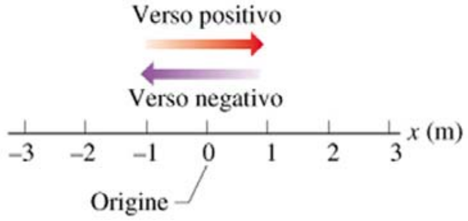
- Per fare ciò è necessario in primo luogo dare la definizione operativa della grandezza fisica **posizione**. L'obiettivo della cinematica sarà poi quello di esprimere la posizione in funzione del tempo.

Introduzione: il moto

- Iniziamo con un moto abbastanza semplice limitato da tre condizioni particolari:
  1. Il moto sia esclusivamente rettilineo, cioè segua una linea retta:
     - verticale (una pietra che cade),
     - orizzontale (una vettura su un'autostrada dritta in piano),
     - Inclinata (sciatore)
  2. Le forze (tirare e spingere) sono le cause del moto tuttavia, nel presente capitolo, studieremo esclusivamente il moto in se stesso e le sue variazioni.
  3. L'oggetto in movimento può essere
     - una particella (un oggetto puntiforme come un elettrone) *oppure*
     - un oggetto che si muove come una particella (tutte le sue parti si muovono solidalmente nella stessa direzione e alla stessa velocità).

Posizione

- Localizzare un oggetto significa identificare la sua posizione relativa a un punto di riferimento.
- Si adotta, quindi, un sistema di riferimento con un'origine (o il punto zero) di un asse.
- In questo caso definirò un "*verso positivo*" (nella direzione dei numeri crescenti) ed un "*verso negativo*" (nella direzione opposta).

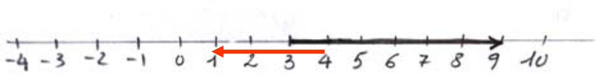


Spostamento

- Una variazione della posizione dell'oggetto è chiamata **spostamento**
- Lo spostamento da un punto x_1 a un altro punto x_2 è indicato come:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

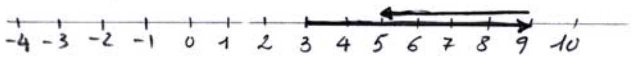
- *Per esempio,*
  - se la particella si muove da x_1=*3 m* a x_2=*9 m*, allora Δx = *(9 m) - (3 m) = + 6 m* (il segno più indica che il moto è nel verso positivo)
  - se la particella si muove da x_1 = *4 m* a $\mathbf{x_2}$ **= 1 m**, allora Δx = *(1 m) - (4 m) = -3 m* (il segno meno indica che il moto è nel verso negativo)



Spostamento

- Ipotizziamo uno spostamento da x_1=*3 m* a x_2=*9 m*, e successivamente da x_2=*9 m* a x_3=*5 m*. Lo spostamento totale sarà

$$\Delta x = x_3 - x_1 = (5\ m) - (3\ m) = +\ 2\ m$$



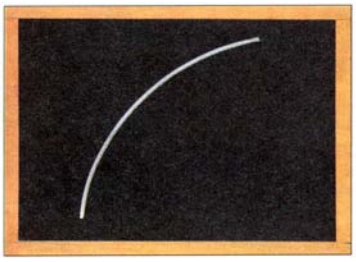
- Se non ci interessa il segno (la direzione dello spostamento) ma solo il modulo (o "*valore assoluto*") possiamo scrivere:

$$|\Delta x| = |x_3 - x_1| = (+5\ m) - (+3\ m) = 2\ m$$

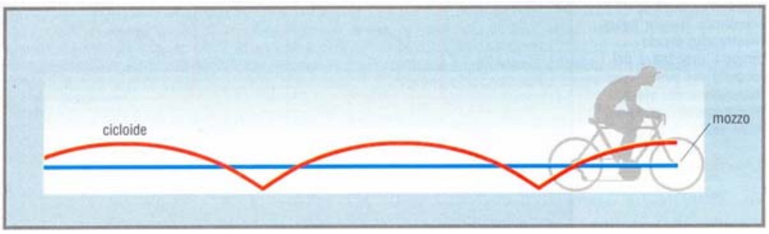
- Lo spostamento, ovviamente, è una grandezza vettoriale (caratterizzata da *direzione*, *verso* e *modulo*).

Traiettoria

- La linea disegnata sulla lavagna è l'insieme delle posizioni attraverso le quali è passata la punta del gesso durante il suo movimento. Questa linea coincide con la traiettoria seguita dalla punta del gesso.

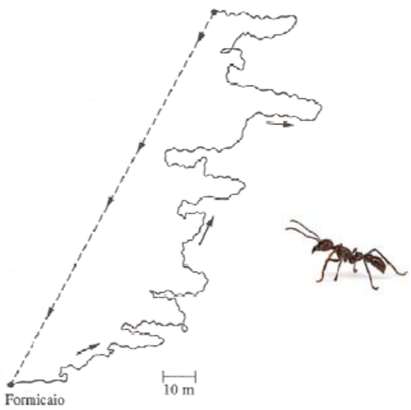


- Esempi di traiettoria del
  – Mozzo della ruota anteriore
  – Valvola della ruota anteriore



Traiettoria

- Definiamo *traiettoria del moto* la linea descritta dal punto materiale durante il suo moto.

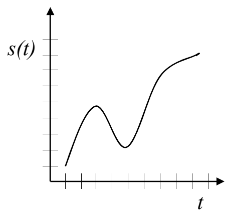


Traiettoria

- *Se la traiettoria é nota*, la descrizione del moto è data dalla posizione del punto lungo di essa in ogni istante.

- Se, per esempio, indichiamo con *s(t)* il tratto di traiettoria percorso dal punto *P* nel tempo *t,* il moto è descritto quando si conosca la relazione tra *s* e *t,* che prende il nome di ***legge oraria***:

$$s = s(t)$$



Traiettoria

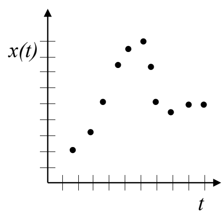
- *Se la traiettoria non è nota*, per descrivere il moto del punto materiale *P* è necessario conoscere le sue coordinate, ad ogni istante, rispetto ad un sistema di assi cartesiani.

$$P(x,y,z)$$

- Il moto è descritto mediante le tre funzioni del tempo:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$ *forma parametrica*

$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

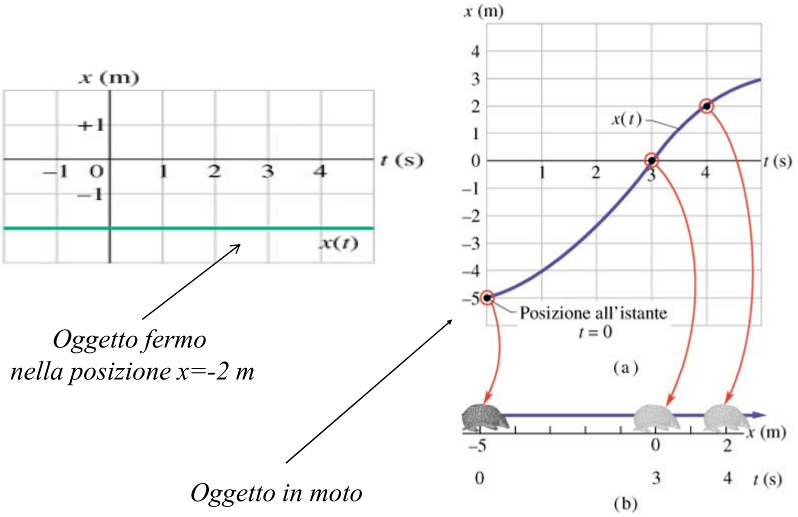


Vettore Spostamento

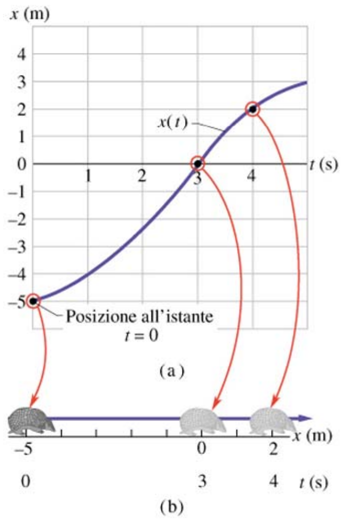
- Il **vettore spostamento** non ci dice nulla sull'effettivo itinerario che la particella percorre.

- I vettori spostamento rappresentano soltanto alcuni aspetti globali del moto, non il moto in sé.

Spostamento di un oggetto in funzione del tempo



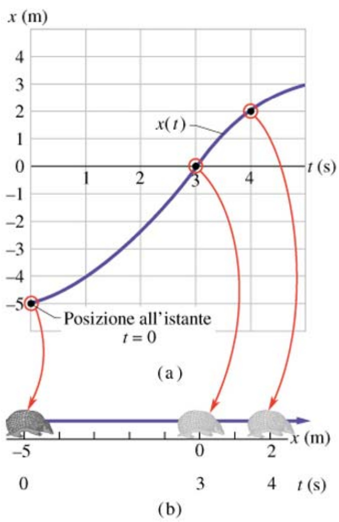
Velocità vettoriale media

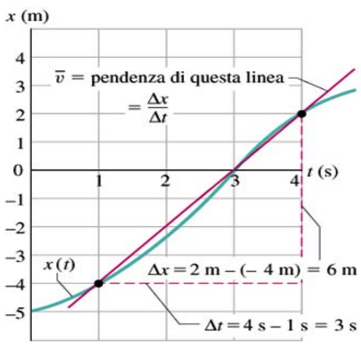


- A che velocità si muove l'oggetto?
- DEF: **velocità vettoriale media**

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

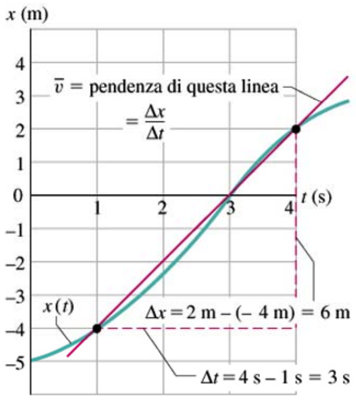
Velocità vettoriale media





$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Velocità vettoriale media



- **v** è la <u>pendenza</u> della retta che unisce due punti sulla curva x(t) $[x_2(t_2)$ e $x_1(t_1)]$
- **v** è una <u>grandezza vettoriale</u> (caratterizzata da *direzione*, *verso* e *modulo*)
- **v** *positiva* corrisponde ad una linea inclinata che sale verso destra
- **v** *negativa* corrisponde a una linea inclinata che sale verso sinistra.

Velocità vettoriale istantanea

- DEF: **velocità vettoriale istantanea**
- Si ottiene a partire dalla velocità vettoriale media restringendo il valore di Δt

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- *La velocità vettoriale in qualunque istante si ottiene dalla velocità vettoriale media restringendo l'intervallo di tempo Δt in modo che si avvicini sempre più allo zero. Man mano che Δt continua a diminuire, la velocità vettoriale media si avvicina a un valore limite che è la velocità vettoriale in quell'istante.*

Velocità vettoriale istantanea

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- Questa equazione rivela due aspetti importanti:
  - essa è, in un istante dato, la velocità con cui una particella cambia la propria posizione x in funzione del tempo t, vale a dire che <u>v è la derivata di x rispetto a t</u>.
  - la velocità vettoriale v di una particella in qualunque istante t è rappresentata dalla <u>pendenza</u> della retta tangente alla curva nel punto di ascissa t.
- La velocità vettoriale istantanea è una grandezza vettoriale (*modulo*, *direzione* e *verso*).

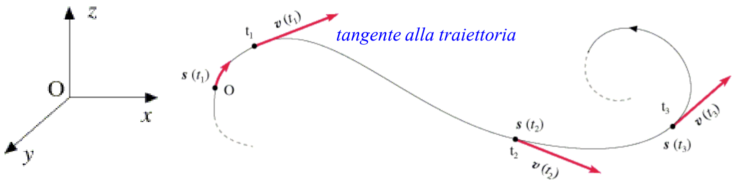
Velocità scalare

- La ***velocità scalare media*** nell'intervallo di *tempo* $\Delta t = t_2 - t_1$ è definita come segue:

$$\langle v \rangle = \bar{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- La ***velocità scalare istantanea*** del corpo in movimento è data dalla derivata dello spazio rispetto al tempo:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$



Velocità vettoriale

- La ***velocità vettoriale media*** nell'intervallo di *tempo* $\Delta t=t_2-t_1$ è definita come segue:

$$\langle\vec{v}\rangle=\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

- La ***velocità vettoriale istantanea*** del corpo in movimento è data da:

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}=\frac{d\vec{s}}{dt}$$

Accelerazione

- Analogamente definiamo ***accelerazione media*** il vettore:

$$\langle\vec{a}\rangle=\frac{\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

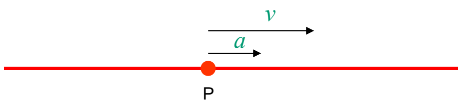
- Definiamo accelerazione istantanea il vettore

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Accelerazione

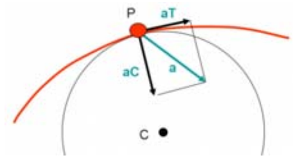
Moto rettilineo

- Se la direzione della velocità *v* è costante nel tempo, e quindi il moto è rettilineo, l'accelerazione è sempre diretta come la velocità e quindi come la traiettoria.

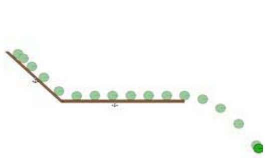


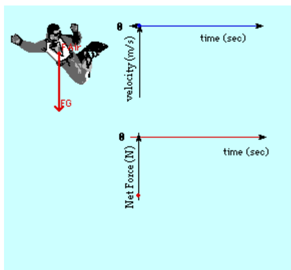
Moto curvilineo

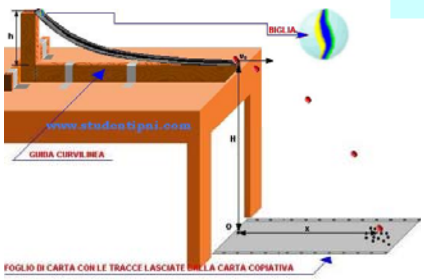
- Per un moto curvilineo, il vettore accelerazione in generale *non* è tangente alla traiettoria e viene caratterizzato da una componente tangente alla traiettoria ed una componente normale alla traiettoria nel punto considerato.

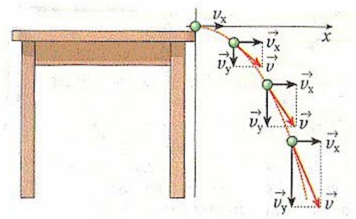


Accelerazione



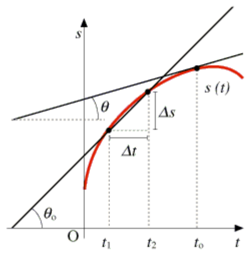






Significato fisico di *v*

- Esempio: moto in una dimensione descritto dalla legge oraria $s = s(t)$.
- Il moto <u>non</u> è necessariamente rettilineo; infatti per una traiettoria qualsiasi, purché nota, $s(t)$ rappresenta la distanza dall'origine sulla traiettoria data.



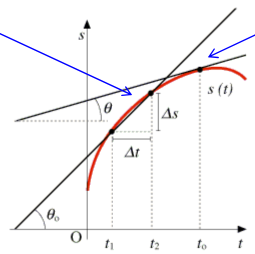
Significato fisico di *v*

- la **velocità scalare media** <*v*> è il rapporto incrementale della legge oraria nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = tg\theta$$

- la **velocità scalare istantanea** è la pendenza della curva che rappresenta la legge oraria nell'istante t_o considerato.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$



Legge oraria di alcuni semplici moti

- Vediamo alcuni esempi di moto dal punto di vista cinematico:
  - *Moto rettilineo uniforme*
  - *Moto rettilineo uniformemente accelerato*
  - *Moto parabolico uniformemente accelerato*
  - *Moto circolare uniforme*
  - *Moto curvilineo in due dimensioni*
  - *Moto armonico*

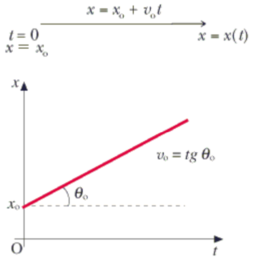
Moto rettilineo uniforme

Caratteristiche:

- la *velocità v* di un oggetto è *costante* in
  - *modulo*
  - *direzione*
  - *verso*
- la traiettoria è rettilinea (assumiamo nella direzione dell'asse *x)*
- **v**=*cost* → *la pendenza della funzione s(t) è costante (s(t)≡x(t))*

- il grafico spazio-tempo è una retta
- la *legge oraria s(t)* è una funzione lineare del tempo:

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$



$$y(x) = mx + q$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = tg\theta_0$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

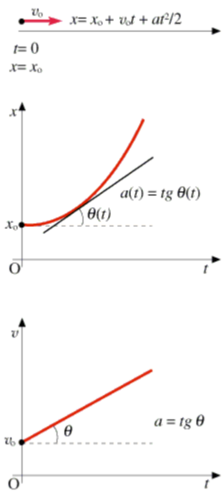
Caratteristiche:

- L'accelerazione ***a*** di un oggetto è *costante* in
  - *modulo*
  - *direzione*
  - *verso*
- La velocità ***v*** (*inizialmente nulla*), *prodotta da* ***a****, ha*
  - *modulo variabile*
  - *direzione uguale quello di* ***a***
  - *verso uguale a quello di* ***a***
- la traiettoria è rettilinea
- il grafico velocità-tempo è una retta (*pendenza costante)*

$$v(t) = v_0 + at$$

- la legge oraria *s(t)* (funzione parabolica di *t*) è :

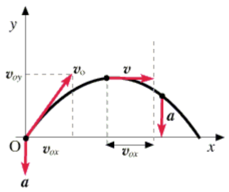
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



Moto parabolico uniformemente accelerato

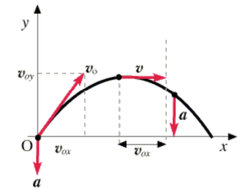
Caratteristiche:

- L'accelerazione ***a*** di un oggetto è *costante* in
  - *modulo*
  - *direzione*
  - *verso*
- *La velocità* $\mathbf{v_0}$ (*inizialmente diretta in direzione differente da quella di* ***a***), *ha*
  - *modulo variabile*
  - *direzione uguale a quello di* ***a***
  - *verso uguale a quello di* ***a***
- la traiettoria non è rettilinea



Moto parabolico uniformemente accelerato

- Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali *x,y* con l'asse *y* diretto in verso opposto a quello di ***a***.



- Il moto può essere allora scomposto in due componenti.

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t$$

direzione *x*
- la componente dell'accelerazione è nulla e il moto risulta uniforme.

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} a t^2$$

direzione *y*
- il moto è uniformemente accelerato con velocità iniziale v_o

- eliminando *t* nelle equazioni precedenti si arriva alla traiettoria del punto mobile

$$y(t) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{a}{v_{0x}^2} x^2$$

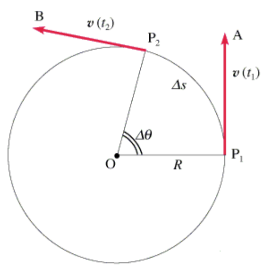
(x_0=0 e y_0=0 per convenienza)

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

Moto circolare uniforme

Caratteristiche:

- moto di un punto *P* che si muove lungo una circonferenza
- La *velocità ha*
  - *modulo costante*
  - *direzione non costante*
  - *verso non costante*



- DEF: *velocità lineare* o *periferica* **v**
  - la velocità con cui si muove il punto *P* lungo la circonferenza

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i}$$

- *DEF: velocità angolare* ω
  - la velocità con cui ruota il raggio *R = OP* della circonferenza

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$$

Moto circolare uniforme

- Dalla definizione di angolo

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \quad \rightarrow \quad \Delta s = \Delta\theta R \quad \xrightarrow{\text{dividendo per } \Delta t} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} R$$

- Ricordando la velocità periferica e la velocità angolare

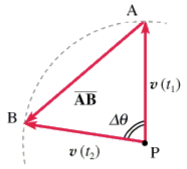
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- Si ottiene la relazione tra velocità angolare e velocità periferica

$$v = \omega R$$

- il modulo dell'accelerazione è, quindi:

$$a = \frac{|v(t_2) - v(t_1)|}{t_2 - t_1} = v\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

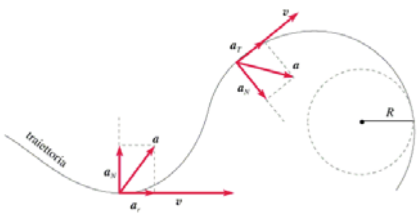


accelerazione centripeta

Moto curvilineo in due dimensioni

Caratteristiche:

- moto di un punto *P* che si muove lungo una traiettoria variamente curvilinea
- La *velocità ha*
  - *modulo non costante*
  - *direzione non costante*
  - *verso costante*



- L'accelerazione è sempre diretta verso la concavità della traiettoria ed ha
  - una componente *tangenziale* $\quad a_T = \dfrac{dv}{dt}$
  - una componente *normale* (o *radiale)* $\quad a_N = \dfrac{v^2}{R}$

Moto armonico

Caratteristiche:

- Moto periodico (*avanti* e *indietro*) di un corpo puntiforme su un segmento assegnato obbedendo ad una *legge oraria* di tipo sinusoidale:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

- A è *l'ampiezza* del moto armonico;
- ω è detta *pulsazione* del moto ($\omega = 2\pi\nu$)
- ν è detta *frequenza* (numero di volte che il punto compie un ciclo completo di moto in un secondo)
- T è detto *periodo* (tempo impiegato dal punto a percorrere un ciclo completo)
- l'angolo ϕ è chiamata *fase iniziale*

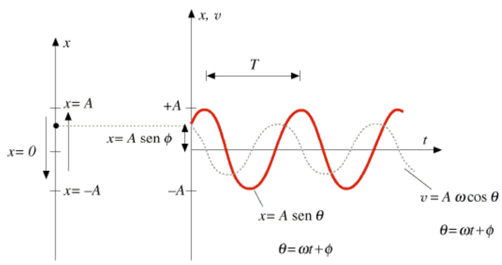


diagramma orario

Moto armonico

- Ricavando *v(t)* e *a(t)* dalla legge oraria

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \xrightarrow{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}} v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}} a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

- Si ottiene

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{a = -\omega^2 x}$$

- Caratteristiche del moto armonico
  - L'accelerazione è proporzionale allo spostamento
  - Il coefficiente di proporzionalità è la pulsazione

Moto armonico

- Ogni volta che un fenomeno fisico può essere rappresentato da un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2\ x(t)$$

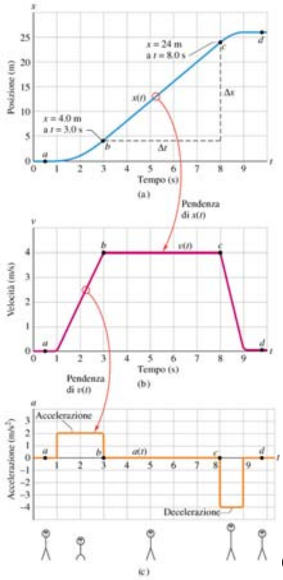
- La soluzione è

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Esempio: ascensore

Moto di un ascensore

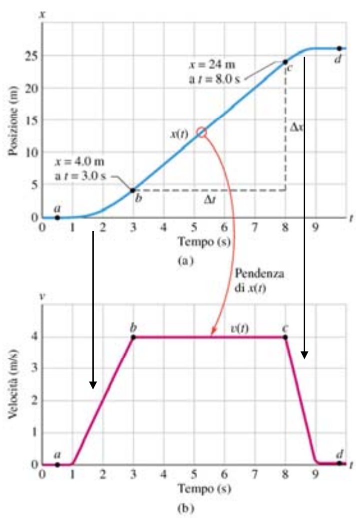
- Moto di una cabina di ascensore
  - che sia inizialmente ferma
  - per poi muoversi verso l'alto
  - e che infine si arresta



Moto di un ascensore

- La pendenza (cioè la velocità) è nulla quando la cabina è ferma (*a, d*)
- Nell'intervallo *bc* (*escludendo i tratti ab e cd*) la pendenza è costante e non nulla:

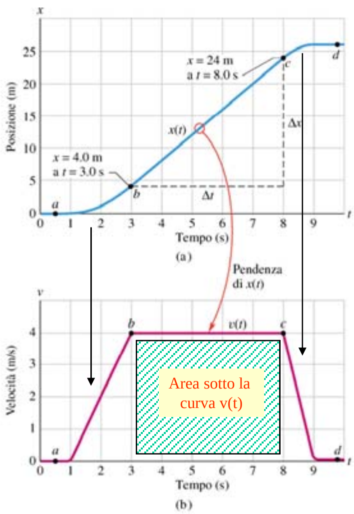
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24.0\,m - 4.0\,m}{8.0\,s - 3.0\,s} = +4.0\,{}^{m}\!/\!_{s}$$



Moto di un ascensore

- Partendo dal grafico di v (sotto) non potremmo ricavare quello di sopra poiché esso mostra solo le variazioni di *x*.
- Se consideriamo l'area sottesa, allora siamo in grado di calcolare la distanza percorsa.
- Tra *b* e *c*:

$$\Delta x = \left(4\,{}^{m}\!/_{s}\right)\underbrace{(8.0\,s - 3.0\,s)}_{\text{per quanto tempo}} = +20\,m$$

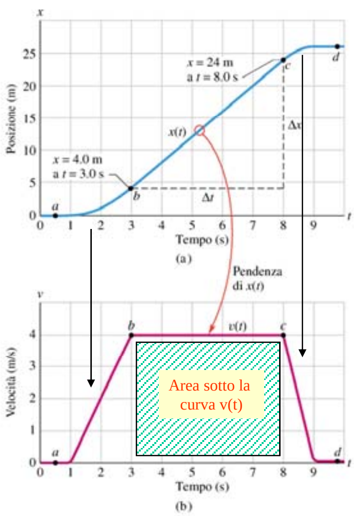


Moto di un ascensore

- La relazione

$$\Delta x = \left(4\,{}^{m}\!/_{s}\right)(8.0\,s - 3.0\,s) = +20\,m$$

- ci dice solo che sono stati percorsi 20 metri ma non ci può dire nulla della reale posizione iniziale dello spostamento.
- Per conoscerla abbiamo bisogno di sapere la posizione *x(t)* in un qualsiasi istante *t*.



Moto di un ascensore

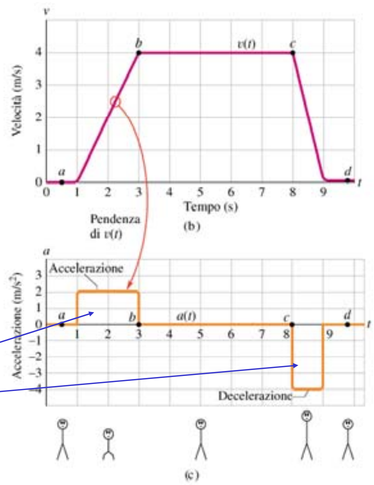
- ogni punto sulla curva *a(t)* è la derivata (ossia la pendenza) del punto corrispondente sulla curva *v(t)*

$$v(t) = \mathrm{cost} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a(t)} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = 0$$

$$v(t)\ \textit{aumenta} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a(t)} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} > 0$$

$$v(t)\ \text{diminuisce} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a(t)} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} < 0$$

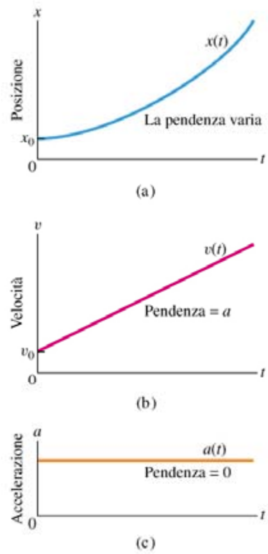
- *Area uguale ma…*
- *In tempi differenti*



Accelerazione costante

- In molti casi l'accelerazione è costante o pressoché costante.
- Un esempio classico è quello di un semaforo a Napoli.

- Studiamo le equazioni fondamentali che consentono di trattare questi casi.



Accelerazione costante

- Se $a = cost$, allora

$$a \equiv \bar{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

- Inoltre

$$t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0 + at}$$

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 + at) = a}$$

- Similmente

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

- e

$$t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 + \bar{v}t}$$

Accelerazione costante

- La velocità media può anche essere scritta come

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

$$v = v_0 + at$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at}$$

$$x(t) = x_0 + \bar{v}t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

Accelerazione costante

- Le equazioni $v(t) = v_0 + at$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

- Costituiscono le equazioni base per il caso *a=cost*
- Da esse possono essere ricavate ulteriori 3 equazioni:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$x(t) = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$$

Accelerazione costante

- Le grandezze che intervengono come variabili in un qualunque problema che riguardi l'accelerazione costante sono 5: $(x - x_o)$, v, t, a, v_0.
- Le seguenti equazioni sono in grado di risolvere tutti i problemi.

Numero dell'equazione	Equazione	Grandezza mancante
2.11	$v = v_0 + at$	$x - x_0$
2.15	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
2.16	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
2.17	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
2.18	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

Moto di un grave in caduta libera

Moto di un grave in caduta libera

Moto di un grave in caduta libera

- I tuffatori:
  - *Cadono tutti alla stessa velocità*
  - *Il loro "peso" determina una differenza?*

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t$$

$$x(t) = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$$

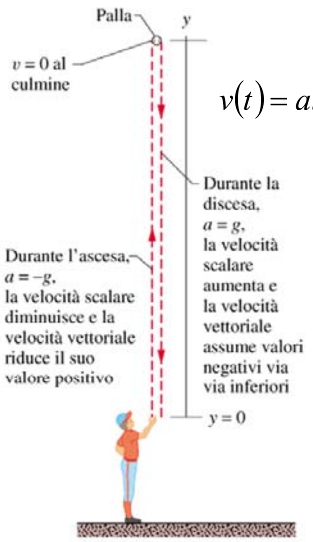
Moto di un grave in caduta libera

- L'accelerazione cui è soggetto un corpo in moto libero, verso l'alto o verso il basso, è
  - Costante (*eliminando l'effetto dell'aria*)
  - Diretta sempre verso il basso (centro della Terra)
  - Non dipende dalla massa
  - Non dipende dalla densità
  - Non dipende dalla forma
    - In pratica è la stessa per qualsiasi oggetto in caduta libera

- Tale accelerazione (*in prossimità della superficie terrestre*) è chiamata accelerazione di gravità:

$$g = 9.8\,\frac{m}{s^2}$$

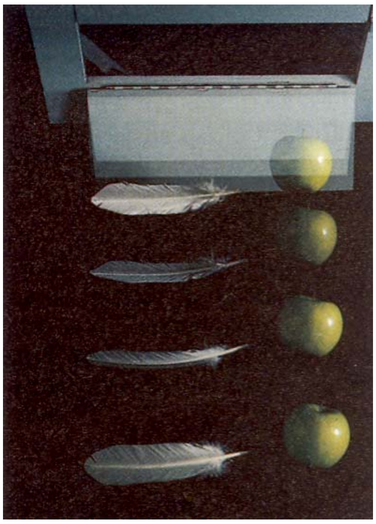
Esempio: lancio in alto



$$v(t) = at + v_0 \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$a = -g = -9.8\ m/s^2$$

Moto di un grave in caduta libera



Moto di un grave in caduta libera

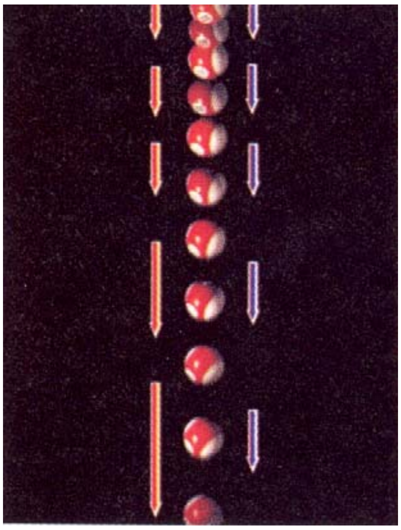


Figura 2.11 Foto "multi-flash" di una palla da biliardo in caduta. Mentre la palla cade, lo spazio tra le immagini successive aumenta, indicando che la palla accelera nel cadere. Il diagramma del moto mostra che la velocità della palla (frecce rosse) aumenta nel tempo mentre la sua accelerazione (frecce viola) rimane costante. (© *Richard Megna 1990, Fundamental Photographs*)

Apollo 15 (1971)

Tuffo alle cascate del Niagara

Il 26 settembre 1993 Dave Munday si gettò giù dalla cascate del Niagara, sul lato canadese, racchiuso in una sfera metallica con un foro di aerazione e precipitò per un'altezza di 48 m nelle acque (e rocce) sottostanti. Assumiamo che la sua velocità iniziale fosse nulla e trascuriamo gli effetti della resistenza dell'aria durante la caduta.

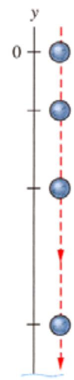
(a) Quanto è durato il volo in caduta di Munday?

SOLUZIONE: Se Munday cadde in volo libero è una idea chiave applicare le equazioni della tabella 2.1. Poniamo l'asse y lungo il tragitto di caduta con $y = 0$ al punto di partenza e verso positivo diretto in alto (fig. 2.10). L'accelerazione è dunque $a = -g$ lungo l'asse y e il punto d'arrivo in acqua si trova a quota –48 m (negativo: è sotto il livello 0). Poniamo l'istante $t = 0$ all'inizio della caduta e la velocità iniziale $v_0 = 0$.

Dalla tabella 2.1 scegliamo l'equazione 2.15 (con la coordinata y) dato che essa contiene il tempo richiesto t e tutte le altre variabili conosciute. Troviamo

$$y - y_0 = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$-48\ \mathrm{m} - 0 = 0t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})t^2$$
$$t^2 = 48/4{,}9$$
$$t = 3{,}1\ \mathrm{s}.$$

Si noti che lo spostamento di Munday $y - y_0$ è negativo perché è caduto nel verso negativo delle y. Si osservi inoltre che la radice quadrata di 48/(4.9) ha due valori: 3,1 e −3,1. Scegliamo il valore positivo perché Munday si è tuffato in acqua *dopo* l'istante $t = 0$ nel quale è cominciata la sua caduta.



t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s²)
0	0	0	–9,8
1	–4,9	–9,8	–9,8
2	–19,6	–19,6	–9,8
3	–44,1	–29,4	–9,8
	–48,0		–9,8

Tuffo alle cascate del Niagara

(b) Munday avrebbe potuto scandire il tempo contando i 3 secondi di caduta, ma non avrebbe potuto vedere di quanti metri fosse caduto allo scadere di ciascun secondo. Determinate la sua posizione a ogni secondo.

SOLUZIONE: Utilizziamo ancora l'equazione 2.15 introducendovi a turno i valori di 1,0 s, 2,0 s, 3,0 s e risolvendola rispetto alla posizione y. I risultati sono illustrati nella figura 2.10.

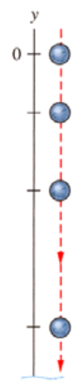
(c) Qual era la velocità di Munday all'impatto con l'acqua?

SOLUZIONE: Per trovare la velocità a partire dai dati iniziali senza utilizzare i valori del tempo di caduta che abbiamo calcolato nella parte (a), riscriviamo l'equazione 2.16 nella forma in y e introduciamo i valori noti:

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) = 0 - (2)(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(-48\ \mathrm{m}),$$

da cui

$$v = -30{,}67\ \mathrm{m/s} \approx -31\ \mathrm{m/s} = -110\ \mathrm{km/h}.$$



t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s²)
0	0	0	–9,8
1	–4,9	–9,8	–9,8
2	–19,6	–19,6	–9,8
3	–44,1	–29,4	–9,8
	–48,0		–9,8

Tuffo alle cascate del Niagara

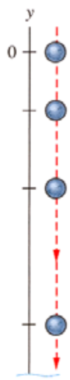
(d) Qual era la velocità di Munday in corrispondenza di ogni secondo del tempo di caduta? Munday si accorgeva dell'aumento di velocità?

SOLUZIONE: Per trovare le velocità a partire dai dati iniziali senza usufruire dei dati di posizione che abbiamo calcolato nella parte (b), poniamo $a = -g$ nell'equazione 2.11 e introduciamo a turno i valori di tempo 1,0 s, 2,0 s, 3,0 s. Per esempio

$$v = v_0 - gt =$$
$$= 0 - (9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(1{,}0\ \mathrm{s}) = -9{,}8\ \mathrm{m/s}.$$

Gli altri risultati si possono leggere nella figura 2.10.

Una volta in caduta libera, Munday non aveva percezione dell'aumento di velocità poiché l'accelerazione durante il volo è costante e pari a $-9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, come annotato nell'ultima colonna di figura 2.10. Percepì naturalmente, e in modo violento, l'impatto con l'acqua, a causa della brusca variazione di accelerazione. (Munday sopravvisse al tuffo, ma dovette in seguito fronteggiare serie conseguenze legali per la sua azione avventata).



t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s^2)
0	0	0	–9,8
1	–4,9	–9,8	–9,8
2	–19,6	–19,6	–9,8
3	–44,1	–29,4	–9,8
	–48,0		–9,8

Effetti dell'accelerazione sul corpo umano

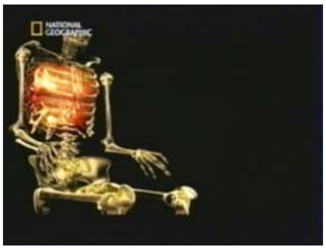
Effetti di ***a*** sul corpo umano

- Il corpo umano reagisce alle accelerazioni (è un accelerometro) ma non alle velocità (non è un tachimetro).
- Quando si sta viaggiando in macchina a 90 km/h o in un aereo che vola a 900 km/h non si ha la consapevolezza corporea del moto.

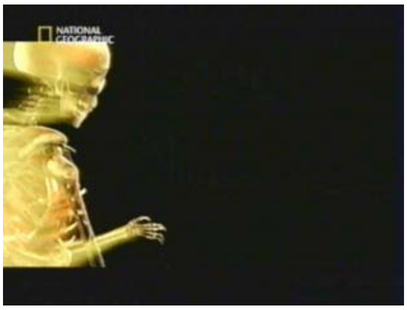
Effetti di ***a*** sul corpo umano

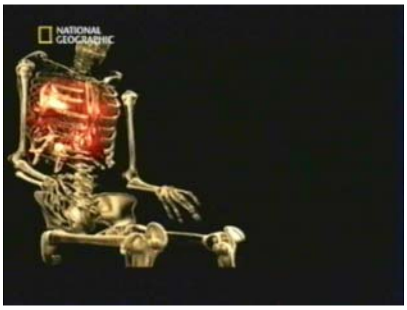
- Il colonnello **John Stapp**, nel 1954, sperimentò un’accelerazione da 0 a 1000 km/h in 5 secondi ed una rapida decelerazione in 2 secondi (equivalente a 40 g) per misurare la tolleranza del corpo umano ad un impatto improvviso.

Effetti di ***a*** sul corpo umano (organi)

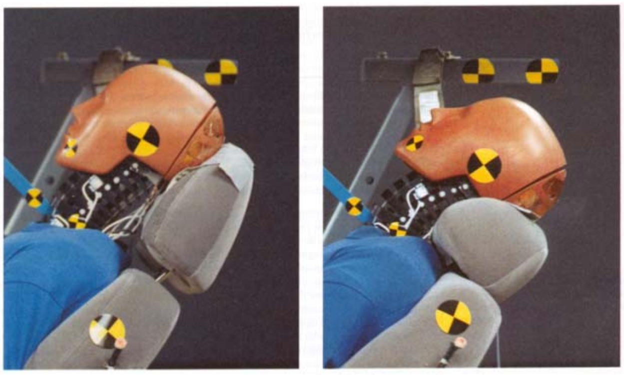


Effetti di ***a*** sul corpo umano (organi)





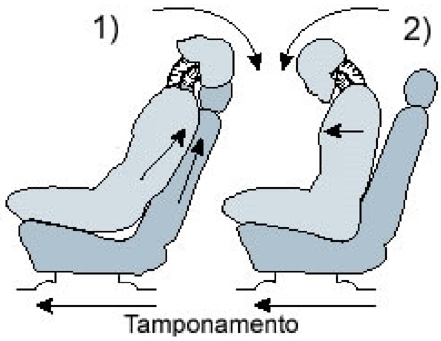
Effetti di *a* sul corpo umano (colpo di frusta)



- Per «**tamponamento**» si intende comunemente la collisione di un veicolo contro il veicolo che lo precede nella medesima direzione.
- La lesione («**colpo di frusta**») è dovuta al ripiegamento indietro del capo al di sopra dello schienale, nel momento in cui il veicolo tamponato viene sospinto in avanti dall'urto. Essa consiste in un allungamento del collo, stirato dall' arretramento della testa.

Effetti di *a* sul corpo umano (colpo di frusta)

- Il colpo di frusta è un evento traumatico che interessa il rachide cervicale. Nella maggior parte dei casi insorge in seguito ad una brusco movimento del capo che supera i limiti fisiologici di escursione articolare.
- Il meccanismo lesivo è tipico degli incidenti automobilistici, soprattutto di quelli in cui il veicolo subisce un tamponamento violento.
- Quando l'autovettura viene tamponata il sedile ed il conducente subiscono una forte accelerazione che li proietta in avanti. Il peso del capo tende per inerzia a conservare la posizione iniziale e, mentre il resto del corpo viene spinto in avanti, la testa viene pressata contro il poggiatesta (danno da iperestensione).
- Successivamente il capo viene proiettato in avanti con una velocità superiore rispetto al resto del corpo (danno da iperflessione).
- Se la vettura è priva di poggiatesta, o questi sono regolati in modo scorretto, il danno da iperestensione sarà maggiore. In assenza di airbag saranno invece più gravi i traumi da iperflessione poiché la testa non verrà frenata nella sua corsa ed andrà a sbattere violentemente contro il volante.



Effetti di ***a*** sul corpo umano (colpo di frusta)

Problema svolto 2.8

In un test di studio delle lesioni cervicali conseguenti ai tamponamenti stradali, si fissa un fantoccio a un poltrona, che viene poi spinta violentemente in avanti per simulare la collisione di una vettura che segue con velocità, poniamo, di 10,5 km/h. La figura 2.13a riporta l'accelerazione del torace e della testa del fantoccio durante tutte le fasi d'urto, che comincia all'istante $t = 0$. L'accelerazione del torace inizia 40 ms più tardi, il tempo in cui lo schienale si comprime e «assorbe» inizialmente l'impatto. L'accelerazione del capo inizia dopo altri 70 ms. Qual è la velocità del torace in questo momento?

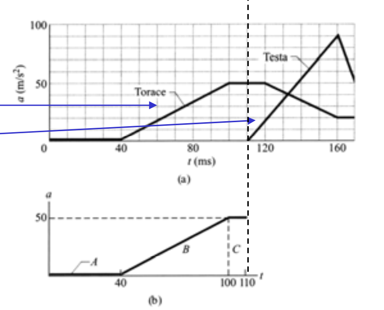


Figura 2.13 a) Curva $a(t)$ per il torace e per la testa di un fantoccio sottoposto a una simulazione d'impatto in un veicolo tamponato. (b) Suddivisione in tre zone del tratto di curva relativo al torace, per facilitare il calcolo dell'area sottesa col metodo grafico.

SOLUZIONE *L'idea chiave* consiste nel calcolare la velocità del torace per integrazione sul grafico della sua accelerazione $a(t)$. La sua velocità iniziale è $v_0 = 0$ all'istante $t_0 = 0$, inizio del processo. Vogliamo troverne la velocità v_1 all'istante $t_1 = 110$ ms, quando la testa comincia ad accelerare.

Combinando le equazioni 2.22 e 2.23 otteniamo

$$v_1 - v_0 = \left(\begin{array}{c} \text{area sottesa dalla curva} \\ \text{entro gli estremi } t_0 \text{ e } t_1 \end{array} \right) . \qquad (2.26)$$

Per comodità di calcolo dividiamo l'area in questione in tre zone (fig. 2.13b). Da 0 a 40 ms abbiamo la zona A, che è di area nulla:

$$\boxed{\text{area}_A = 0 .}$$

Da 40 ms a 100 ms si estende la zona B di forma triangolare, la cui area è

$$\boxed{\text{area}_B = \tfrac{1}{2}(0{,}060 \text{ s})(50 \text{ m/s}^2) = 1{,}5 \text{ m/s} .}$$

Da 100 ms a 110 ms la zona C ha forma di rettangolo con area

$$\boxed{\text{area}_C = (0{,}010 \text{ s})(50 \text{ m/s}^2) = 0{,}50 \text{ m/s} .}$$

Introducendo i dati nella (2.26) otteniamo

$$v_1 - 0 = 0 + 1{,}5 \text{ m/s} + 0{,}50 \text{ m/s} ,$$

da cui

$$v_1 = 2{,}0 \text{ m/s} = 7{,}2 \text{ km/h} .$$

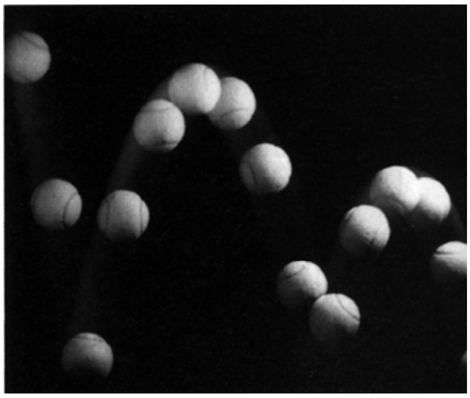
Quando il capo comincia a muoversi il torace ha già una velocità di 7,2 km/h. I ricercatori ritengono che tale differenza di velocità nelle prime fasi del processo sia responsabile di lesioni al collo. Il ripiegamento all'indietro della testa avviene dopo e può aggravare il danno specie in assenza di poggiatesta.

Moto bidimensionale

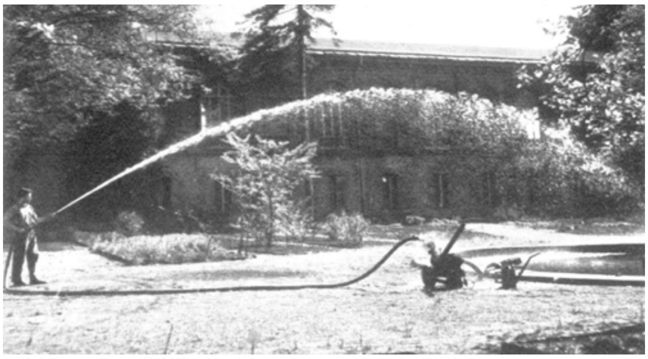
Antonietta Di Martino

Moto dei proiettili

- DEF: **proiettile** è qualsiasi corpo che cada in caduta libera soggetto solo all’accelerazione di gravità, *g*.



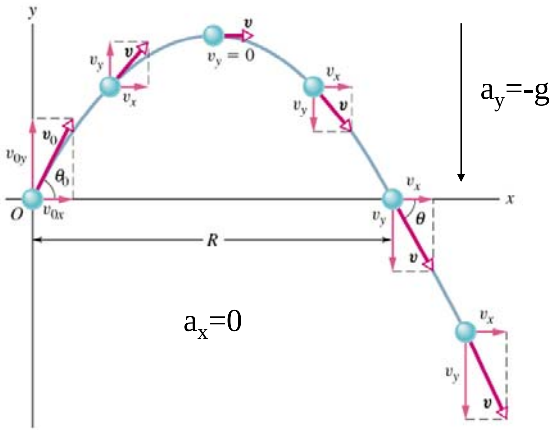
Il “budello”



Moto dei proiettili

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$$

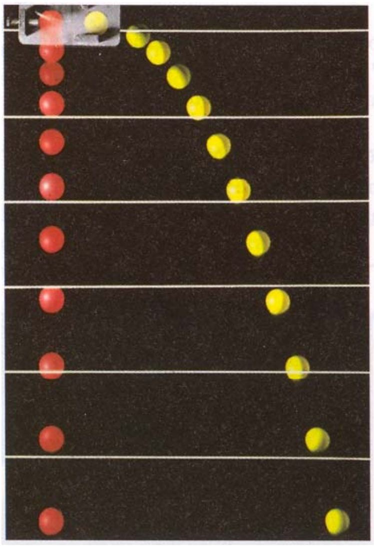
$$v_{0x} = |\vec{v}_0| \cos\theta_0$$
$$v_{0y} = |\vec{v}_0| \sin\theta_0$$



- Durante il moto bidimensionale, il *vettore posizione* **r(t)** ed il *vettore velocità* **v(t)** cambiano continuamente; **a** invece è costante e diretto verso il basso (a_x=0)

Indipendenza dei moti orizzontale e verticale

- Fotografia stroboscopica di due palle da golf, una lasciata cadere da ferma e l'altra sparata orizzontalmente.
- Il loro moto verticale è identico, visto che ciascuna copre la stessa distanza verticale nello stesso intervallo di tempo.
- Il fatto che una delle due si muova orizzontalmente mentre cade non ha alcun effetto sul suo moto verticale.
- Il moto verticale è indipendente da quello orizzontale.



Equazione della traiettoria (moto orizzontale)

- Equazioni di riferimento per il moto

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$$
$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$
$$v_x^2(t) = v_{0x}^2 + 2a_x\left(x(t) - x_0\right)$$

- Moto orizzontale

$$a_x = 0 \longrightarrow v_x = \text{cost} = v_{0x}$$
$$x(t) = x_0 + v_{0x} t$$
$$x(t) = x_0 + \left(v_0 \cos\theta_0\right) t$$

moto puramente uniforme

Equazione della traiettoria (moto verticale)

- Equazioni di riferimento per il moto

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$
$$v_y^2(t) = v_{0y}^2 + 2a_y \left(y(t) - y_0\right)$$

- Moto verticale

$$a_y = \text{cost} = -g$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$y(t) = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_y^2(t) = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g\left(y(t) - y_0\right)$$

moto determinato dalla gravità

Equazione della traiettoria

- Per trovare la traiettoria del proiettile basta eliminare il tempo t dalle seguenti

$$x(t) = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)\, t$$
$$y(t) = y_0 + (v_0 \cos\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

- Ottenendo (*eliminando t*) l'equazione della traiettoria:

$$\boxed{y(t) = (\tan\theta_0)\, x - \frac{g x^2}{2(\cos\theta_0)^2}}$$

- Che rappresenta l'equazione di una parabola

$$y(t) = ax + bx^2$$

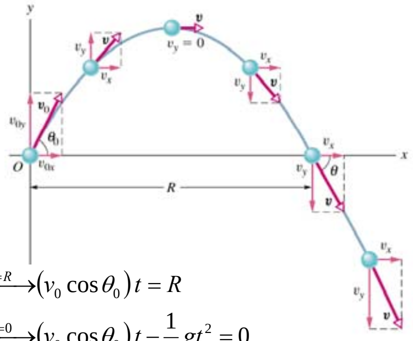
Conservazione della velocità orizzontale

Figura 4.13 La componente verticale della velocità di questo appassionato dello *skate-board* varia, ma non la componente orizzontale, che coincide con la velocità dell'attrezzo, il quale rimane quindi sempre verticalmente sotto di lui, consentendogli di ritrovarlo nell'atterraggio.

Conservazione della velocità orizzontale

Gittata orizzontale

- La gittata di un proiettile è la distanza orizzontale coperta dallo stesso quando passa per la stessa quota di partenza da cui è partito.



- Dalle eq.

$$x(t) = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)t \xrightarrow{x(t)-x_0=R} (v_0 \cos\theta_0)t = R$$

$$y(t) = y_0 + (v_0 \cos\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{y(t)-y_0=0} (v_0 \cos\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

- Eliminando t:

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0} \xrightarrow{\sin(2\theta_0)=2\sin\theta_0\cos\theta_0} \boxed{R = \frac{2v_0^2}{g}\sin 2\theta_0}$$

Valida solo se la quota finale è uguale a quella iniziale

Gittata orizzontale: considerazioni

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0}$$

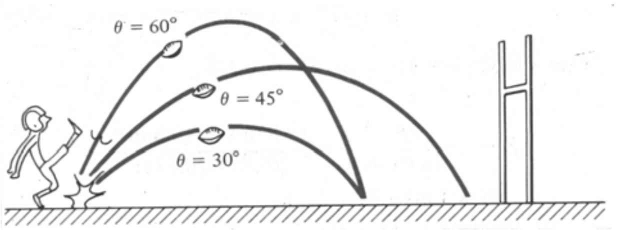
$$\theta = 30° \to \begin{Bmatrix}\sin\theta = 0.500 \\ \cos\theta = 0.866\end{Bmatrix} \to R = 0.866\frac{v_0^2}{g}$$

$$\theta = 90° \to \begin{Bmatrix}\sin\theta = 1 \\ \cos\theta = 0\end{Bmatrix} \to R = 0$$

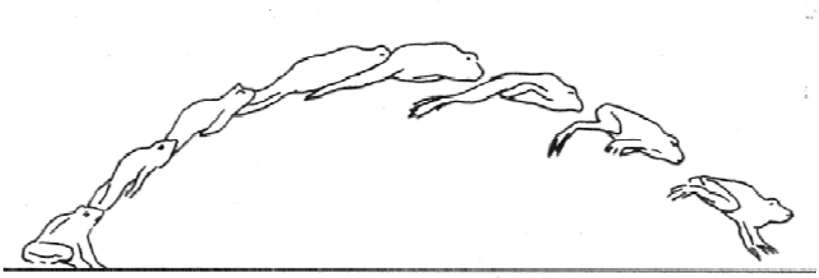
$$\theta = 60° \to \begin{Bmatrix}\sin\theta = 0.866 \\ \cos\theta = 0.500\end{Bmatrix} \to R = 0.866\frac{v_0^2}{g}$$

$$\theta = 0° \to \begin{Bmatrix}\sin\theta = 0 \\ \cos\theta = 1\end{Bmatrix} \to R = 0$$

$$\theta = 45° \to \begin{Bmatrix}\sin\theta = 0.707 \\ \cos\theta = 0.707\end{Bmatrix} \to R = \frac{v_0^2}{g}$$



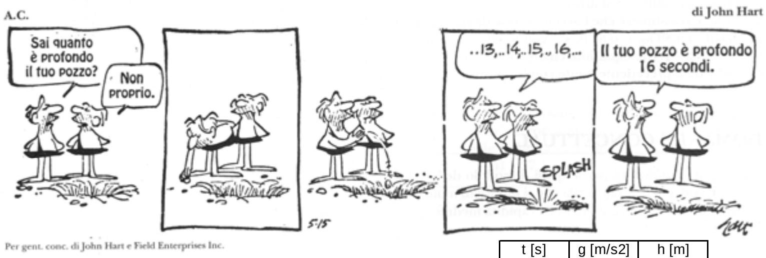
Salto della rana



- Le rane saltano spesso con un angolo di lancio di circa 45°, l’angolo cioè che determina la massima gittata sulla terra in piano

Esercizi

Problemi concettuali



$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

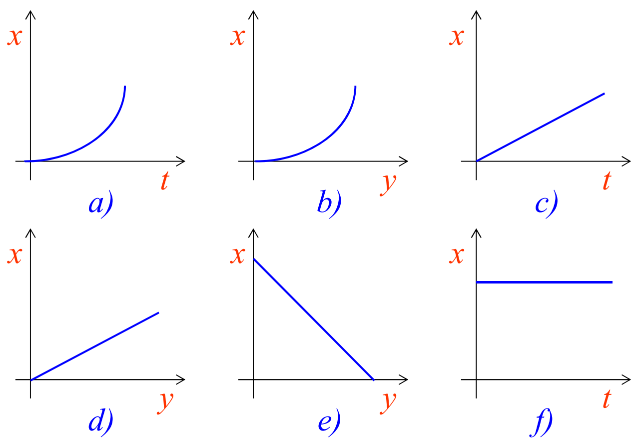
$$h(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

t [s]	g [m/s2]	h [m]
0	9,8	0,00
1	9,8	4,90
2	9,8	19,60
3	9,8	44,10
4	9,8	78,40
5	9,8	122,50
6	9,8	176,40
7	9,8	240,10
8	9,8	313,60
9	9,8	396,90
10	9,8	490,00
11	9,8	592,90
12	9,8	705,60
13	9,8	828,10
14	9,8	960,40
15	9,8	1102,50
16	9,8	1254,40

Esercizio

ADD
2015-2016

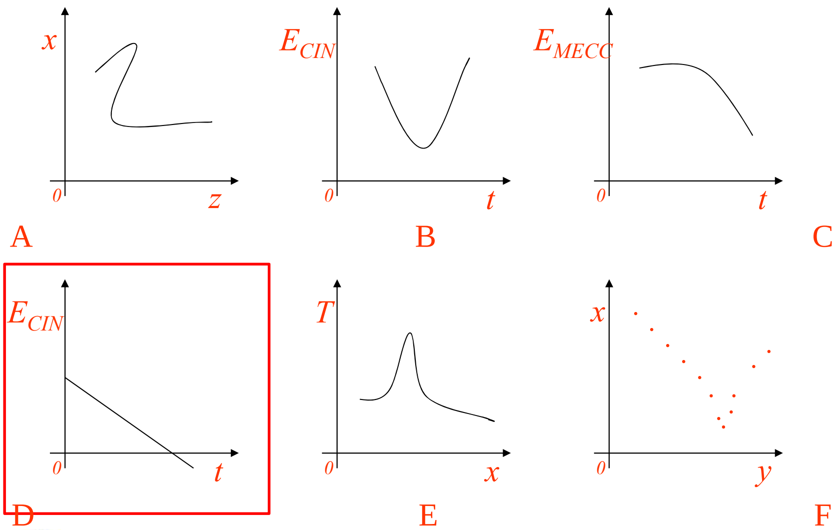
- Quale dei seguenti diagrammi rappresenta un moto rettilineo uniforme ?



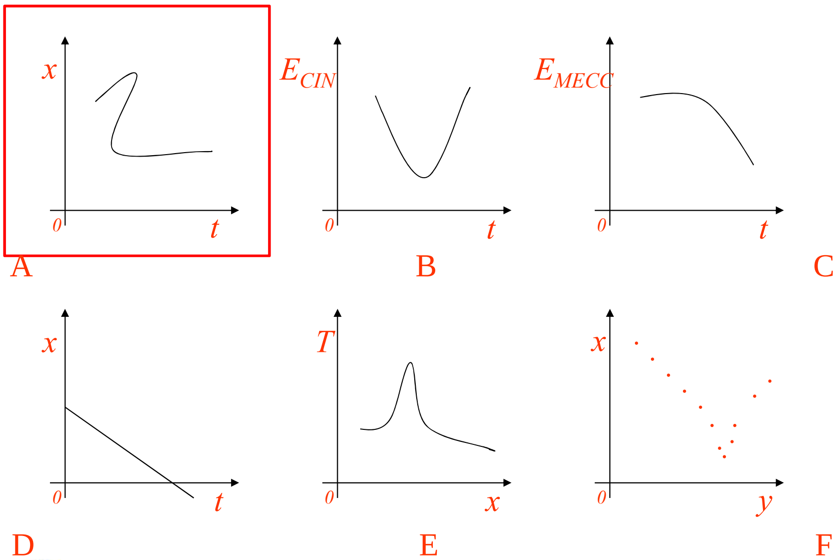
Concetto di funzione con significato fisico

- Quale dei seguenti grafici non ha significato fisico (*x,y,z=coordinate spaziali, t=tempo, T=temperatura,* E_{MECC}*=Energia meccanica,* E_{CIN}*=Energia cinetica, l'origine degli assi vale zero in qualsiasi scala*)

Concetto di funzione con significato fisico

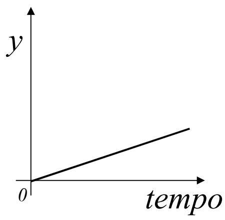


Concetto di funzione con significato fisico



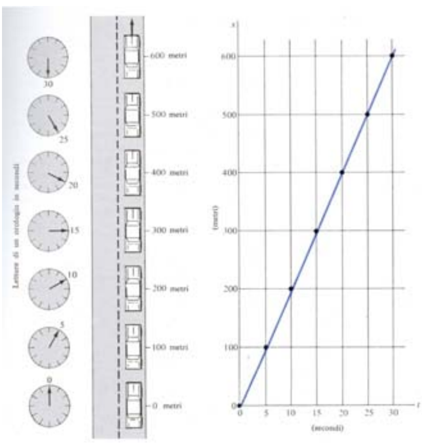
Concetto di funzione con significato fisico

- Il grafico seguente si riferisce al moto di un corpo in caduta libera nel vuoto.



- Quale delle seguenti grandezze fisiche rappresenta la variabile “*y*” sull’asse delle ordinate?
  A. La velocità
  B. La posizione
  C. L’accelerazione
  D. L’energia cinetica
  E. Nessuna delle precedenti

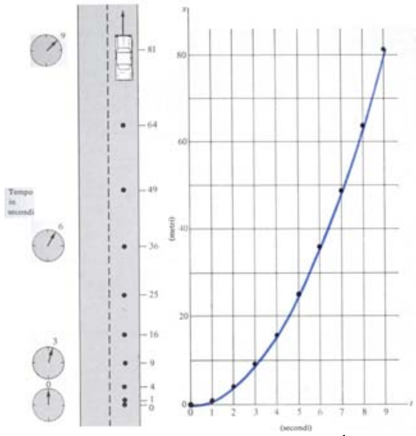
Moto senza/con accelerazione



$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x(t) = v_0 t$$

$$[f(x) = mx + c]$$



$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} a\right) t^2$$

$$[f(x) = ax^2 + bx + c]$$

Salto verticale

Salto verticale

- Per analizzare la capacità relativa di salto di vari animali, si possono usare le equazioni del moto uniformemente accelerato.

TABELLA 1.5

Rincorse di accelerazione e altezze verticali di salto per alcuni animali. Tutte le distanze sono espresse in metri

	Rincorsa di accelerazione (d)	Altezza verticale (h)
Uomo	0.5	1.0
Canguro	1.0	2.7
Boscimane, giovane	0.16	2.2
Rana	0.09	0.3
Cavalletta	0.03	0.3
Pulce	0.0008	0.1

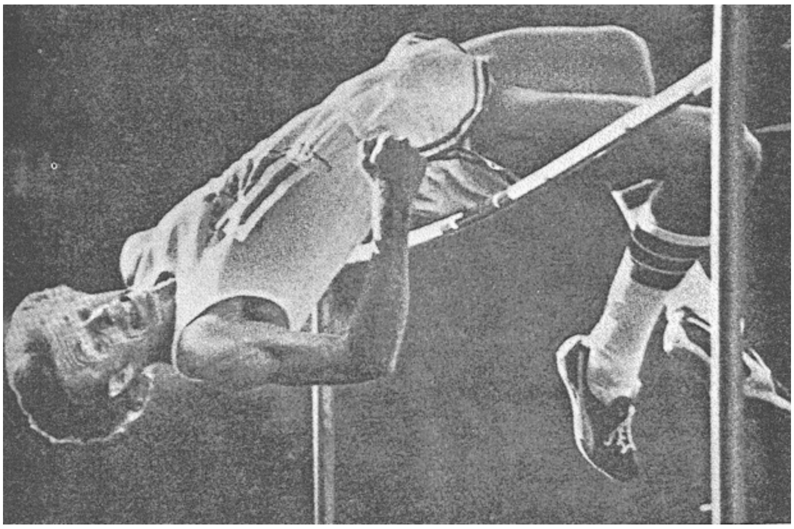
- Notare che il salto verticale per l'uomo è minore del record registrato per il salto in alto, che è di circa 2 m. Questo perché un uomo alto 1.8 m (*circa 6 piedi*) si trova già in una posizione per saltare una sbarra a circa metà della sua altezza ruotando il corpo in posizione orizzontale.

Salto verticale

- Il metodo di salto per l'uomo, chiamato «***Western Roll***», non è usato da altri animali, per cui le altezze elencate nella Tabella precedente sono quelle appropriate per fare un confronto di abilità nel salto.

Western Roll

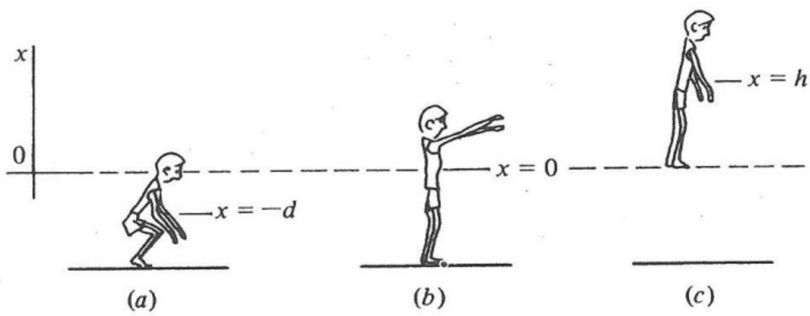
Fosbury Flop



Salto verticale

- Gli animali fanno salti da fermi piegando le zampe ed estendendole rapidamente: Generalmente la rincorsa di accelerazione *d* è alquanto più corta delle zampe dell'animale.
- Una volta che l'animale si è sollevato da terra, esso è soggetto alla sola accelerazione di gravità, per cui si applicano le formule per il moto uniformemente accelerato.
- Si può analizzare anche la fase di decollo se si fa l'approssimazione che l'accelerazione a durante il decollo sia costante. Questa approssimazione è usata nell'esempio seguente.

Salto verticale



Salto verticale

- Qual è la velocità v_f di decollo per un uomo
- Qual è l'accelerazione al decollo a_f

- Assegniamo la coordinata x alla distanza corrispondente al punto di mezzo dell'individuo
  - il verso $+x$ punta verso l'alto
  - l'origine $x = 0$ quando la persona è ferma nella posizione iniziale

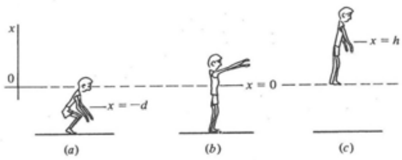
- velocità v_f di decollo
  - l'accelerazione vale $-g$
  - la velocità passa dal valore $v_f = v_f$ a $v_f = 0$
  - l'altezza cambia della quantità $(x - x_0) = h = 1$ m

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$
$$0 = v_f^2 + 2gh$$
$$v_f^2 = 2gh \rightarrow v_f = \sqrt{2gh} = 4.4\, m/s$$

TABELLA 1.5

Rincorse di accelerazione e altezze verticali di salto per alcuni animali. Tutte le distanze sono espresse in metri

	Rincorsa di accelerazione (d)	Altezza verticale (h)
Uomo	0.5	1.0
Canguro	1.0	2.7
Boscimane, giovane	0.16	2.2
Rana	0.09	0.3
Cavalletta	0.03	0.3
Pulce	0.0008	0.1



Salto verticale

- Qual è la velocità v_f di decollo per un uomo
- Qual è l'accelerazione al decollo a_f

- accelerazione al decollo a_f
  - assumiamo che l'accelerazione a_f sia costante.
  - la velocità cresce da $v=0$ a $v=v_f$
  - l'altezza cambia di $(x - x_0) = d = 0.5\ m$.

- Quindi

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$
$$v_f^2 = 2a_f d$$
$$a_f = \frac{h}{d} g = 19.6\, m/s^2$$

TABELLA 1.5

Rincorse di accelerazione e altezze verticali di salto per alcuni animali. Tutte le distanze sono espresse in metri

	Rincorsa di accelerazione (d)	Altezza verticale (h)
Uomo	0.5	1.0
Canguro	1.0	2.7
Boscimane, giovane	0.16	2.2
Rana	0.09	0.3
Cavalletta	0.03	0.3
Pulce	0.0008	0.1