Vettori ed algebra vettoriale

Corso di Elementi di Fisica e Biomeccanica
A.A. 2015-2016

Sommario

- Grandezze scalari e vettoriali
- Definizione di vettore
  - Vettore Spostamento
- Operazioni sui vettori
  - Scomposizione di un vettore
  - Somma e differenza di vettori (metodo grafico ed analitico)
- Proprietà dei vettori
- Impiego dei versori
- Prodotto di vettori
  - Prodotto di un vettore per uno scalare
  - Prodotto scalare
  - Prodotto vettoriale
- Concetto di Gradiente
- Flusso di un vettore

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

- Spesso non è sufficiente un numero (*rapporto tra la grandezza data e quella campione scelta come unità di misura* per caratterizzare una grandezza fisica misurata.
  - Esempio: spostamento
    - dire a una persona di spostarsi di 3 metri non indicherebbe alla stessa dove andare, non essendo stati specificati una direzione e un verso.
  - Esempio: velocità.
    - Affermare che un oggetto si muove a 50 km/ora non è un'informazione completa poiché non contiene indicazioni sulla direzione e il verso della velocità stessa.
- Per caratterizzare alcune grandezze fisiche è necessario quindi utilizzare "**enti matematici**" più complessi dei semplici numeri.
-

Introduzione

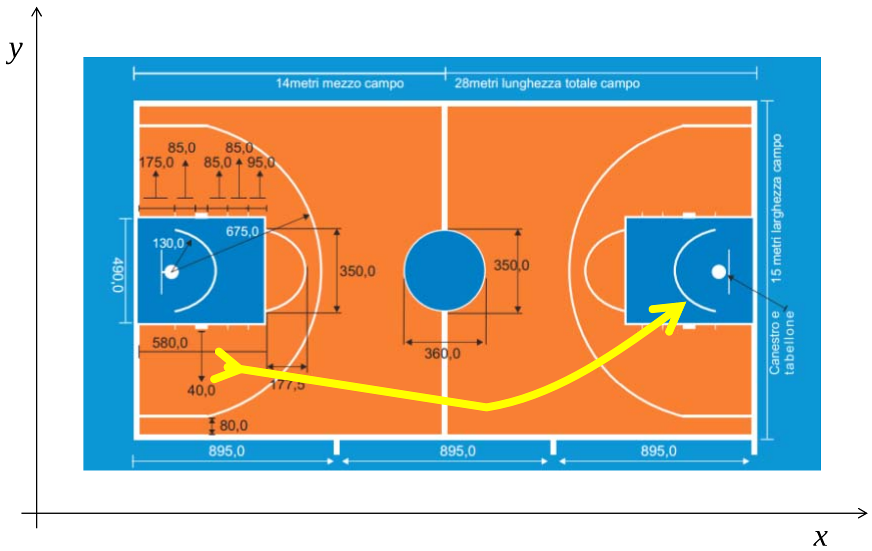
- Nella Fisica trattiamo differente grandezze:
  - **Grandezze adimensionali**:
    - *Numero puro*
    - *Rapporto*
    - *Percentuale*
  - **Grandezze scalari**:
    - *Temperatura*
    - *Massa*
    - …
  - **Grandezze vettoriali**
    - *Spostamento*
    - *Velocità*
    - *Accelerazione*
    - *Forza*
    - …
- Queste ultime necessitano di un nuovo linguaggio e dell'analisi vettoriale

Grandezze scalari

- Definiamo grandezze scalari quelle grandezze che, stabilita una unità di misura, siano completamente caratterizzate da un numero che rappresenta il rapporto tra la grandezza considerata e l'unità di misura.
- Grandezze scalari:
  - Pressione
  - Lavoro
  - Energia
  - Massa
  - Tempo
  - Temperatura
  - Viscosità
  - …
- Per nessuna di queste è necessario individuare una "direzione" nello spazio ma solo, ed esclusivamente, un "*valore numerico*"

Spostamento su 1 dimensione

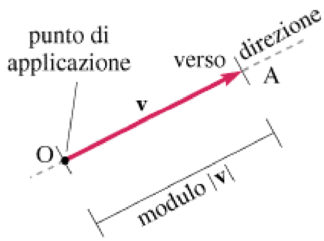
Spostamento su 2 dimensioni



Spostamento su 3 dimensioni

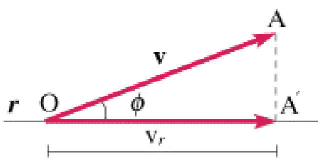
Definizione di “vettore”

- Un **vettore** è un ente individuato da
  - un'intensità, o ***ampiezza*** o modulo,
  - da una ***direzione***, cioè da una linea retta lungo la quale agisce, e
  - da un **verso**, cioè da uno dei due sensi possibili lungo la retta
- Una **grandezza vettoriale** è una grandezza che si può rappresentare con un vettore
- Grandezze vettoriali
  - Spostamento
  - Velocità
  - Accelerazione
  - Forza
  - ….



Componente di un vettore.

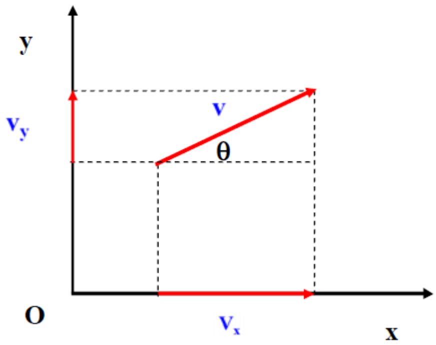
- La componente di un vettore è la sua proiezione su un asse;



$$v_x = v\cos\phi$$

Scomposizione di un vettore a 2 dimensioni

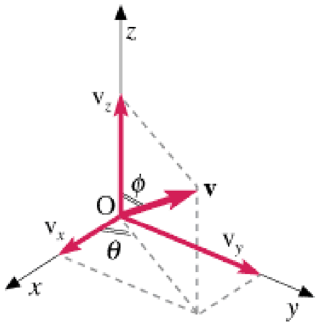
- Il concetto di componente di un vettore può essere impiegato per rappresentare il vettore in un sistema di assi cartesiani (x,y)



$$v_x = v\cos\theta$$
$$v_y = v\sin\theta$$
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$tg\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v\sin\theta}{v\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Scomposizione di un vettore a 3 dimensioni

- Il concetto di componente di un vettore può essere impiegato per rappresentare il vettore in un sistema di assi cartesiani (x,y,z)



$$v_x = v\cos\theta\sin\phi$$
$$v_y = v\sin\theta\sin\phi$$
$$v_z = v\cos\phi$$
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Radianti

- Gli angoli misurati rispetto all'asse x, a partire dalla semiretta positiva, sono positivi se vengono misurati in senso antiorario, e negativi se sono misurati in senso orario.
- Per esempio 210° e -150° sono angoli che individuano la stessa direzione.
- Gli angoli si possono misurare in gradi o in radianti (*rad*). Si possono confrontare le due misure ricordando che un angolo giro equivale a 360° e a 2π *rad*.
- Così, se fosse necessario, per esempio, convertire 40° in radianti, si può scrivere

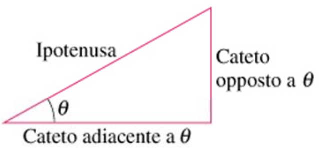
$$40° \, \frac{2\pi \; rad}{360°} = 0{,}70 \; rad$$

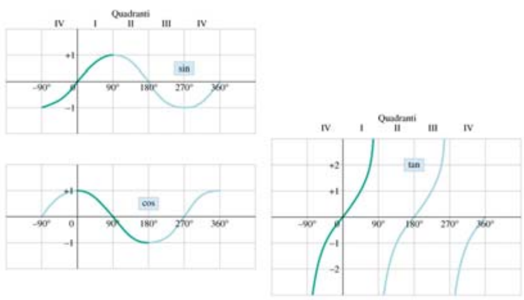
Funzioni trigonometriche

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

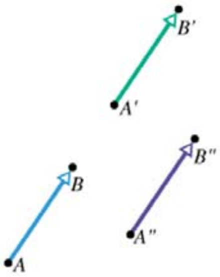
$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{cateto adiacente a } \theta}$$





Vettore Spostamento

- Le frecce da A a B, da A' a B' e da A" a B" hanno uguale modulo, direzione e verso.
- Esse rappresentano un uguale **spostamento** (stesso cambiamento di posizione per la particella)
- Traslando un vettore non si modifica il suo valore, se non variano il suo modulo, la sua direzione e il suo verso.



(a)

(b)

Vettore Spostamento

- Il vettore spostamento non ci dice nulla sull'effettivo itinerario che la particella percorre.

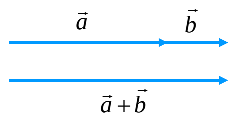
- I vettori spostamento rappresentano soltanto alcuni aspetti globali del moto, non il moto in sé.

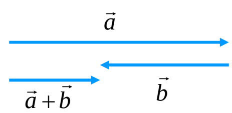
Somma di vettori

- Lo spostamento composto (A→B → C) può essere rappresentato senza tener conto del percorso effettivo:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

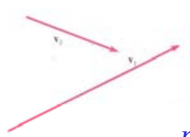
$$\boxed{\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}}$$ *Somma vettoriale*

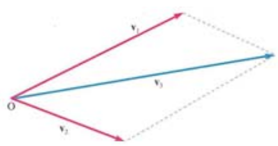




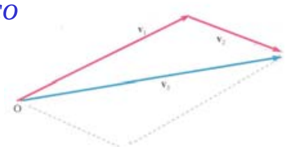
Somma di vettori (metodo grafico)

- Consideriamo due vettori aventi lo stesso punto di applicazione (origine).
- Se i vettori non hanno la stessa origine, uno di essi (o entrambi) verrà trasportato parallelamente a se stesso fino a che le origini coincidano.
- Se i vettori non hanno la stessa origine, uno di essi (o entrambi) verrà trasportato parallelamente a se stesso fino a che la coda di uno coincida con la punta dell'altro.





metodo grafico

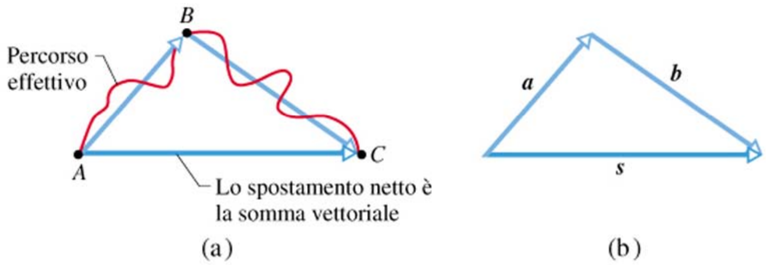


Somma di vettori (metodo grafico)

- Lo spostamento composto (A→B → C) può essere rappresentato senza tener conto del percorso effettivo:

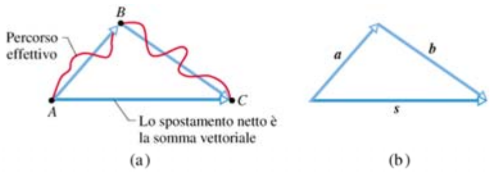
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\boxed{\overline{s} = \overline{a} + \overline{b}} \qquad \textit{Somma vettoriale}$$



Metodo di somma grafico

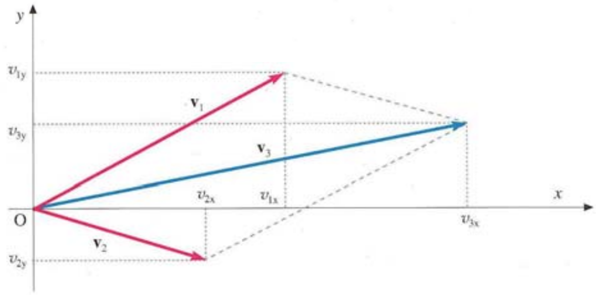
- Il procedimento per sommare graficamente due vettori **a** e **b** è suggerito nella figura:
  1. Si traccia su un foglio il vettore **a** in una scala comoda e alla sua giusta inclinazione;
  2. Si traccia il vettore **b** nella stessa scala con la sua inclinazione e con la coda coincidente con la punta del vettore **a**;
  3. la somma vettoriale **s** si costruisce tracciando una freccia dalla coda di **a** alla punta di **b**.



- Tale procedimento tiene conto sia del modulo sia della direzione e del verso; può essere facilmente generalizzato per sommare più di due vettori.

Somma di vettori (metodo analitico)

- La somma vettoriale si può eseguire anche tramite le componenti dei vettori rispetto ad un determinato sistema di riferimento

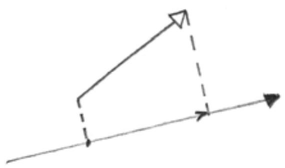


metodo analitico

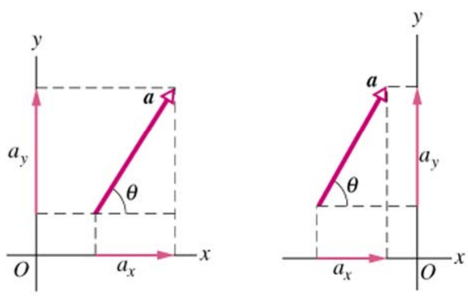
$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} + v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} + v_{2y} \\ v_{3z} = v_{1z} + v_{2z} \end{cases}$$

Metodo di somma per componenti

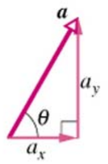
- **DEF**: *Componente di un vettore è la sua proiezione su un asse*



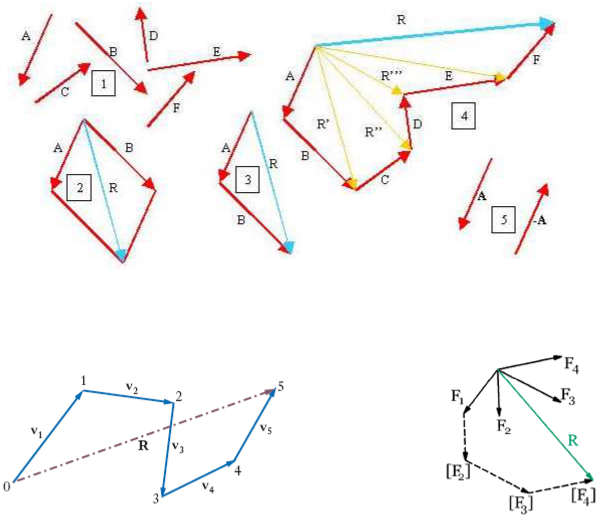
- Scomposizione di un vettore:



$$a_x = |\vec{a}|\cos\theta = a\cos\theta$$
$$a_y = |\vec{a}|\sin\theta = a\sin\theta$$



Somma di più vettori



Differenza di due vettori (metodo grafico)

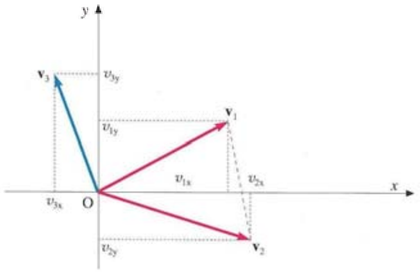
- La differenza tra i vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ è data dal vettore $\boldsymbol{v_3}$ che, sommato a $\boldsymbol{v_2}$ fornisce il vettore $\boldsymbol{v_1}$: $\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_3}$ e quindi $\boldsymbol{v_3} + \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1}$
- Il vettore differenza è rappresentato dall'altra diagonale del parallelogramma di lati $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$

metodo grafico

Differenza di due vettori (metodo analitico)

- Operando sulle componenti si può eseguire la differenza di due vettori prendendo semplicemente la differenza delle componenti corrispondenti (si introduce un segno meno al posto della somma).

$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} - v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} - v_{2y} \\ v_{3z} = v_{1z} - v_{2z} \end{cases}$$

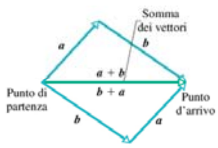


metodo analitico

Proprietà dei vettori

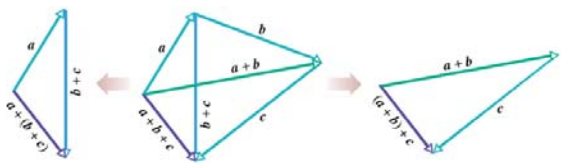
- Proprietà commutativa

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$$



- Proprietà associativa

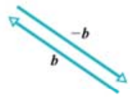
$$\boxed{\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)}$$



Proprietà dei vettori

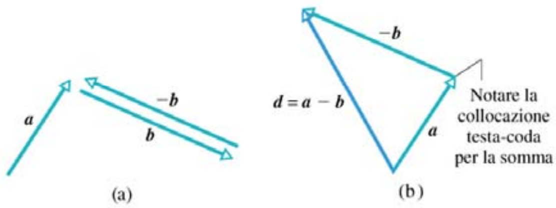
- Esistenza del vettore opposto

$$\boxed{\vec{b} + \left(-\vec{b}\right) = \vec{0}}$$



- Sottrazione di vettori

$$\boxed{\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)}$$



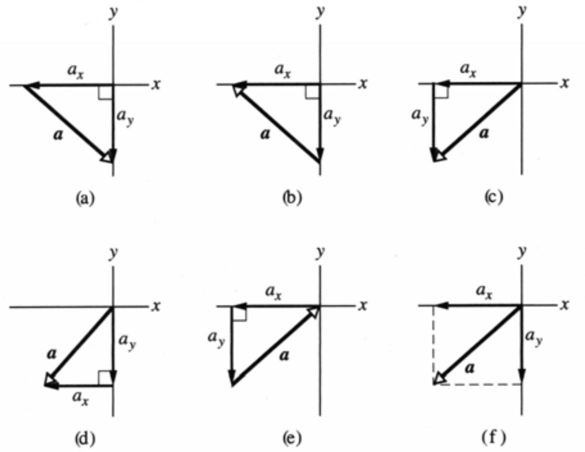
Proprietà dei vettori

- Manipolazioni algebriche:

$$\boxed{\vec{d} + \vec{b} = \vec{a} \quad oppure \quad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}}$$

Verifica 2

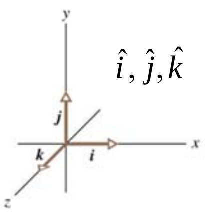
- Quali tra i metodi indicati per combinare le componenti x e y del vettore **a** sono appropriati per individuare il vettore stesso?



Versori

- **DEF**: *Versore (vettore unitario) è un vettore di lunghezza unitaria (modulo = 1). disposto in una particolare direzione*

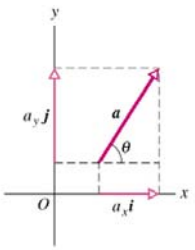
Sistema destrorso di coordinate ortogonali (mano destra)



$$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$



$$\boxed{\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath}}$$

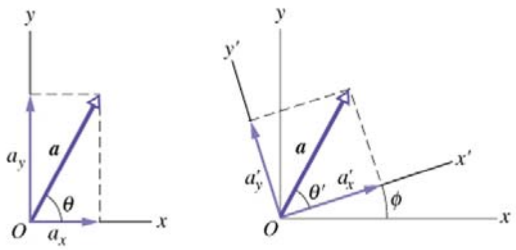
Addizione di vettori

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \\ r_z = a_z + b_z \end{cases} \qquad \begin{aligned} \vec{r} &= (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k} \\ \vec{r} &= r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} =$$

$$\vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \Rightarrow \begin{cases} d_x = a_x - b_x \\ d_y = a_y - b_y \\ d_z = a_z - b_z \end{cases} \qquad \begin{aligned} \vec{d} &= (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k} \\ \vec{d} &= d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k} \end{aligned}$$

Rotazione degli assi



$$a = \text{cost} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a'^2_x + a'^2_y}$$

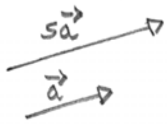
$$\theta = \theta' + \phi$$

Prodotto di vettori

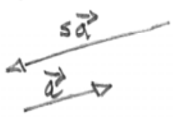
- L'algebra vettoriale presenta tra modi per l'operazione di moltiplicazione con i vettori:
  - Prodotto di un vettore per uno scalare
  - Prodotto scalare
  - Prodotto vettoriale

Prodotto di un vettore per uno scalare

$$s\vec{a} \rightarrow |s\vec{a}| = |s|\,|\vec{a}|$$



$s>0$



$s<0$

Prodotto scalare

- Definizione

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi}$$

- Proprietà commutativa

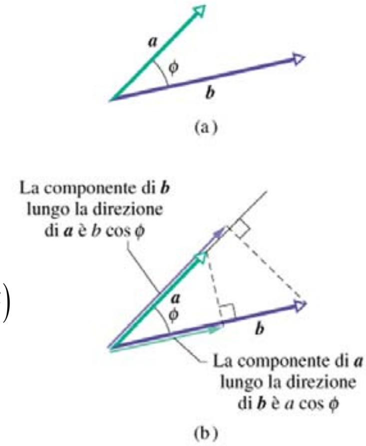
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\right)\cdot\left(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Proprietà distributiva

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$



Prodotto vettoriale

- Definizione

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\varphi}$$

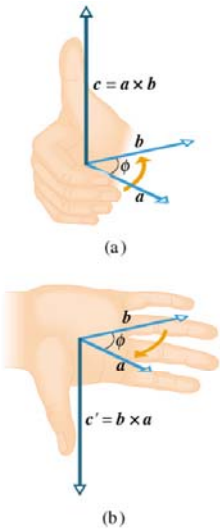
- Componenti

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{z}\right)\times\left(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{z}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_y b_z - b_y a_z\right)\hat{i} + \left(a_z b_x - b_z a_x\right)\hat{j} + \left(a_x b_y - b_x a_y\right)\hat{k}$$

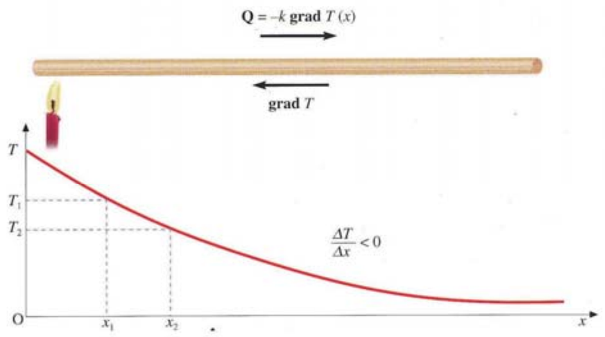
- Il prodotto vettoriale NON é commutativo

$$\vec{b}\times\vec{a} = -\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$



Gradiente vettoriale

- Consideriamo una funzione *f(x)*.
- Ipotizziamo, giusto per esempio, che *f(x)* rappresenti l'andamento della temperatura lungo un filo metallico rettilineo: la direzione del filo fornisce l'asse *x*.



Gradiente vettoriale

- Se vogliamo descrivere la variazione (aumento o diminuzione) della grandezza *f(x)* lungo la coordinata *x*, dobbiamo definire:
  - L'entità della variazione stessa,
  - la direzione e
  - il verso.

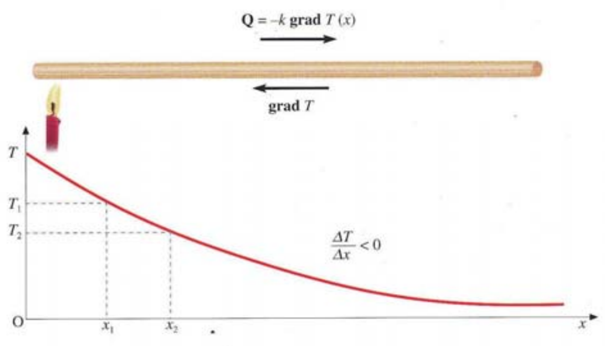
- Dobbiamo, quindi, associare un vettore la variazione di *f(x)*

Gradiente vettoriale

- Definiamo gradiente della funzione scalare *f(x)* il vettore ***v***
  - il cui modulo è dato dalla derivata di *f(x)* rispetto ad *x*
  - la direzione è quella dell'asse *x* e
  - il verso quello per cui il rapporto incrementale risulta positivo:

$$\vec{v} = \overline{grad}\ f(x) \begin{cases} \text{modulo}: & \dfrac{df(x)}{dx} \\ \text{direzione}: & asse\ x \\ \text{verso}: & \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \end{cases}$$

Caso del filo di rame

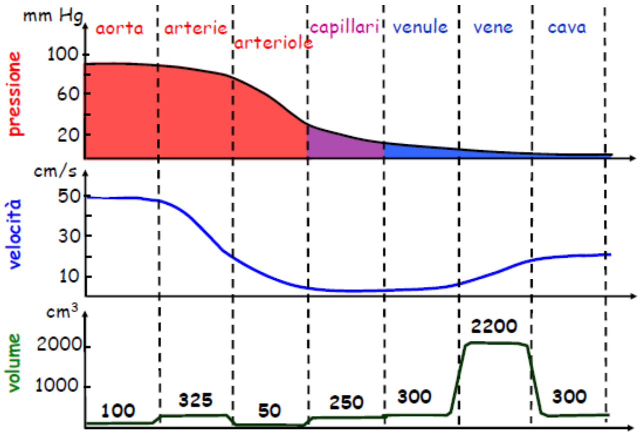


- Il calore Q si diffonde seguendo la legge:

$$Q = k\frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \vec{Q} = -k\ \overline{grad}\ T(x)$$

Gradiente vettoriale

- In modo analogo *f(x)* può rappresentare i valori della pressione lungo un vaso sanguigno.



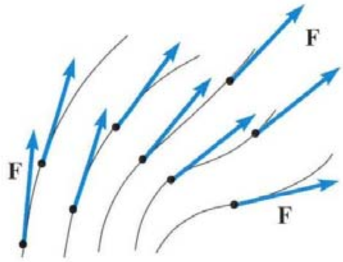
Gradiente vettoriale di *f(x,y,z)*

- Più in generale una grandezza fisica scalare può variare da punto a punto nello spazio (ad esempio la temperatura in un ambiente) ed essere rappresentata da una funzione *f(x,y,z)* dipendente da tre variabili indipendenti. In questo caso il vettore gradiente è definito tramite le derivate lungo i tre assi *x, y e z (che si chiamano "derivate parziali")*:

$$\vec{v} = \overline{grad}\ f(x,y,z) \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ v_y = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ v_z = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

Digressione sul flusso

- Si consideri una regione dello spazio in ogni punto della quale è definibile un vettore ***F*** : tale regione è chiamata campo vettoriale.
- Si chiamano linee di forza del vettore ***F*** le linee tangenti punto per punto alla direzione del vettore ***F***



Digressione sul flusso

- In un campo vettoriale ***F*** si prenda una superficie S_i divisa in tante areole su ognuna delle quali sia talmente piccola da potersi considerare piana.
- Sia $\boldsymbol{F_i}$ il vettore al centro dell'areola S_i
- Si definisce ***flusso del vettore F*** attraverso la superficie orientata S_i il prodotto scalare:

$$\Phi_i = \vec{F}_i \cdot S_i \hat{n} = F_i S_i \cos \alpha_i$$