

# *Fondamenti di Meccanica (4)*

## *Statica e Meccanica Rotatoria*

Corso di Fisica  
A.A. 2024-2025



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

1

## Sommario

- Introduzione
- Equilibrio di un corpo rigido
  - Momento di una forza
  - Condizione di equilibrio per un punto materiale
  - Condizione di equilibrio per un corpo solido
- Coppia di forze
- Vincolo
- Macchine semplici
  - Leve meccaniche
  - Carrucola, puleggia, camma
- Baricentro, centro di gravità, centro di massa
- Dinamica traslatoria e rotatoria del corpo rigido



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

2

## Sommario

- Elasticità e Legge di Hooke
- Forze di contatto
  - Attrito statico
  - Attrito dinamico
- Resistenza del mezzo



## Introduzione

- Dopo aver trattato la
  - Dinamica traslatoria (dei corpi che seguono traiettorie rettilinee o curvilinee)
- affrontiamo
  - la Statica dei corpi rigidi e dei corpi deformabili (*indispensabile per stabilire lo stato di equilibrio delle articolazioni e le modalità di frattura delle ossa*)
  - la Dinamica rotatoria che tratta il moto di corpi che ruotano attorno a un asse
- Queste tre parti ci consentiranno di comprendere fenomeni come
  - Fratture
  - Deambulazione
  - Percezione delle rotazioni



# Statica

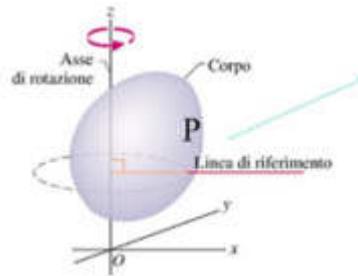
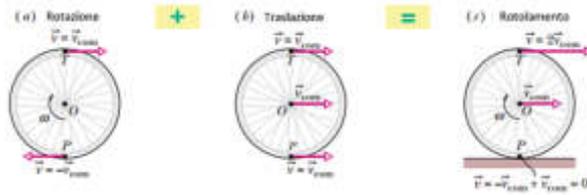


## Statica

- La **Statica** studia le forze che agiscono su un corpo in *equilibrio* e in *quiete*.
- Anche se non vi è moto, le leggi di Newton consentono di
  - individuare le forze che agiscono su varie parti delle strutture portanti di ponti o di edifici, o anche di strutture biologiche, come mandibole, braccia e colonne vertebrali.
  - comprendere come ottenere l'amplificazione di una forza (*guadagno meccanico delle macchine semplici, come le numerose leve che agiscono all'interno del corpo umano*).
  - individuare le condizioni di equilibrio e di stabilità.
- La Statica è, quindi, molto utile in diversi campi tanto diversi come l'ingegneria, l'anatomia, la terapia fisica e l'ortodonzia.



## Moto di roto-traslazione



## Momento di una forza

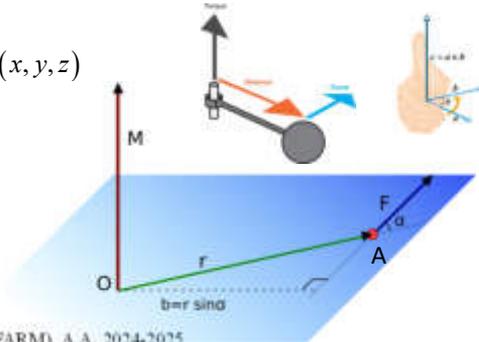


## Momento di una forza

- Prima di considerare le condizioni di equilibrio dei corpi, introduciamo la definizione di momento di una forza rispetto ad un punto  $O$ .
- Consideriamo un **corpo rigido** (non deformabile, qualunque forza agisca su di esso) sul quale agisce una forza  $F(x,y,z)$ , applicata nel punto  $A(x,y,z)$ , e un punto  $O(x',y',z')$  qualsiasi.
- Si definisce **momento**  $M(x,y,z)$  di una forza  $F(x,y,z)$  rispetto al punto  $O$  il prodotto vettoriale:

$$\vec{M}(x, y, z) = \vec{r}(x, y, z) \times \vec{F}(x, y, z)$$

$$|\vec{M}| = F r \sin\alpha = Fb$$



## Condizioni di equilibrio



## Equilibrio

- Iniziamo discutendo le condizioni di equilibrio di un **corpo rigido**: un oggetto, cioè, esteso nello spazio, la cui forma e grandezza non variano sotto l'azione delle forze applicate, come una palla da biliardo o un osso.
- **Equilibrio di un punto materiale**
  - Condizione necessaria e sufficiente ad assicurare che un punto materiale in quiete rimanga in quiete è che la risultante delle forze applicate sia nulla;
    - applicata ad un corpo rigido, questa condizione significa che il corpo, considerato come un tutt'uno, non accelererà, ovvero rimarrà in equilibrio traslazionale.
- **Equilibrio di un corpo rigido libero di ruotare**
  - Condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo rigido: l'assenza di un momento risultante.
    - Se le forze che agiscono su di esso hanno un momento risultante non nullo, il corpo rigido comincerà a ruotare.
- Inoltre, per studiare l'equilibrio e la stabilità, bisogna far uso del concetto di
  - baricentro
  - centro di gravità
  - centro di massa



## Condizioni di equilibrio

- Condizione di equilibrio per un **punto materiale**

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{NET} = \vec{R} = 0$$

- Condizione di equilibrio per un **corpo rigido**

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{NET} = \vec{R} = 0$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_T^{est} = 0$$



## Condizioni di equilibrio

- Condizione di equilibrio per un punto materiale

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_i \vec{F}_i = \vec{R} = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R} = 0 \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

**NON trasla**

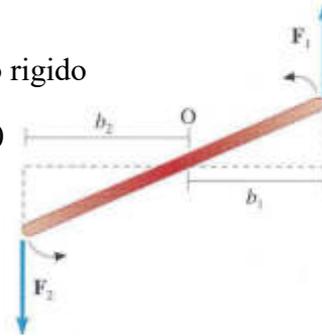
- Condizione di equilibrio per un corpo rigido

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_T^{est} = 0$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 \neq 0$$

$$M_T = F_1 b_1 + F_2 b_2 \neq 0$$

**ruota**

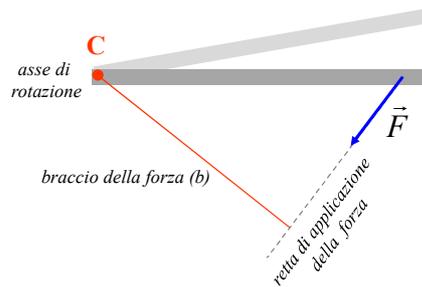


## Esempi



## Momento della forza

- Dato un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso, e una forza  $\vec{F}(x,y,z)$  agente su di esso e appartenente a un piano perpendicolare a tale asse, consideriamo il modulo del **momento della forza** rispetto all'asse come il prodotto del modulo della forza per il suo braccio.
- Il braccio é la minima distanza fra l'asse e retta di applicazione della forza.



$$|\vec{M}| = Fr \sin \phi = Fb$$

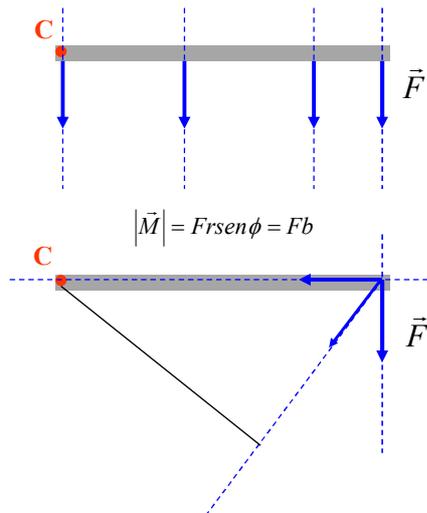
Dimensioni ed unità di misura

$$[M] = [FL] = [MLT^{-2}L] = [ML^2T^{-2}]$$

$$Nm = kg \, m^2 \, s^{-2}$$



## Momento della forza



- Il braccio della forza (e conseguentemente il momento) aumenta all'aumentare della distanza fra punto di applicazione della forza e centro di rotazione.

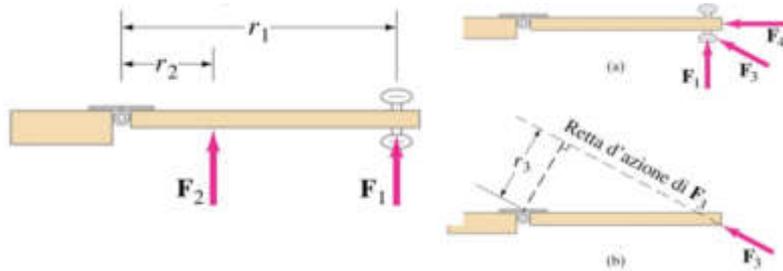
- Il braccio della forza (e il momento) aumenta quanto più la forza è perpendicolare alla retta fra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione.

*Il braccio della forza (e il momento) è nullo quando la retta di applicazione della forza passa per il centro di rotazione C.*



## Apertura/chiusura di una porta

- Quindi applicando una forza ad una porta, la rotazione dipende da:
  - distanza del punto di applicazione dall'asse libero di rotazione (*braccio*)
  - direzione (e verso) della forza rispetto al punto di applicazione
  - dall'intensità della forza

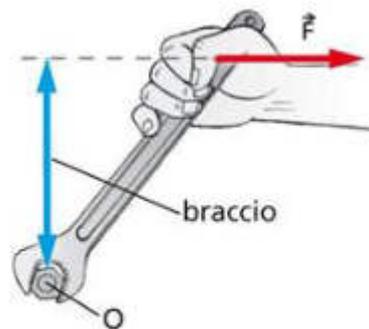


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

24

## Momento della forza: Chiave inglese

- Il momento di una forza  $F$  rispetto a un punto  $O$  è uguale al prodotto dell'intensità  $F$  della forza per il braccio  $b$ .



$$\text{momento della forza (N} \cdot \text{m)} = M = Fb$$

forza (N)  
braccio (m)

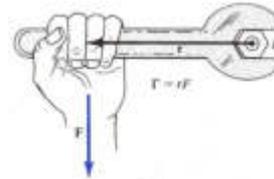


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

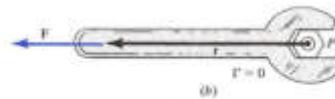
27

## Momento della forza: Chiave inglese

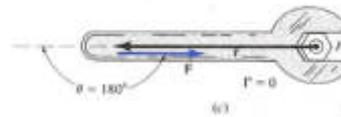
$$|\vec{M}| = Fr \sin\theta = Fb$$



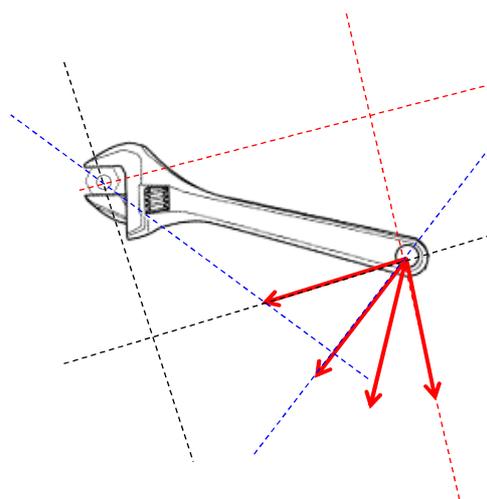
$$|\vec{M}| = Fr \sin\theta = 0$$



$$|\vec{M}| = Fr \sin\theta = 0$$



## Momento della forza: Chiave inglese



## Coppie di forze



## Momento di una coppia di forze

- Si dice **coppia di forze** un sistema di due forze  $\mathbf{F}(x,y,z)$  uguali e opposte agenti su rette d'azione parallele.
- La distanza tra le rette d'azione è detta braccio e si indica con  $b$ .



- Possiamo verificare facilmente che *una coppia di forze, agendo su un corpo rigido, inizialmente in quiete, ne determina la rotazione.*
- La coppia è tanto più efficace nel produrre la rotazione
  - quanto più intense sono le forze,
  - quanto maggiore è la distanza tra le loro rette d'azione.



## Momento di una coppia di forze

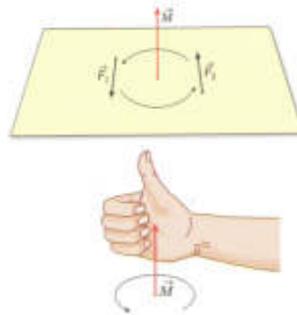
- La grandezza che esprime l'efficacia di una coppia è il momento di una coppia  $M$ :

$$M = Fb$$

- Poiché non è detto le forze siano complanari (forze disposte nello spazio rispetto al corpo rigido), è necessario che il momento della coppia  $M$  indichi anche la direzione dell'asse di rotazione del corpo rigido:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_r^{est} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = F_1 b_1 + F_2 b_2 = \\ &= (F_1 + F_2) b_1 = 2F_1 b_1 = F_1 (2b_1) = Fb \end{aligned}$$



## Momento di una coppia di forze

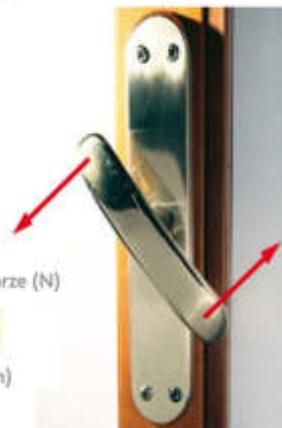
- Il momento di una coppia di forze è dato dalla somma dei momenti delle forze rispetto al punto medio  $O$ .
- Esso è uguale al prodotto dell'intensità  $F$  di una forza per la distanza  $d$  tra le rette d'azione delle due forze.

momento della coppia (N · m)

$$M = Fd$$

intensità di una delle forze (N)

distanza (m)





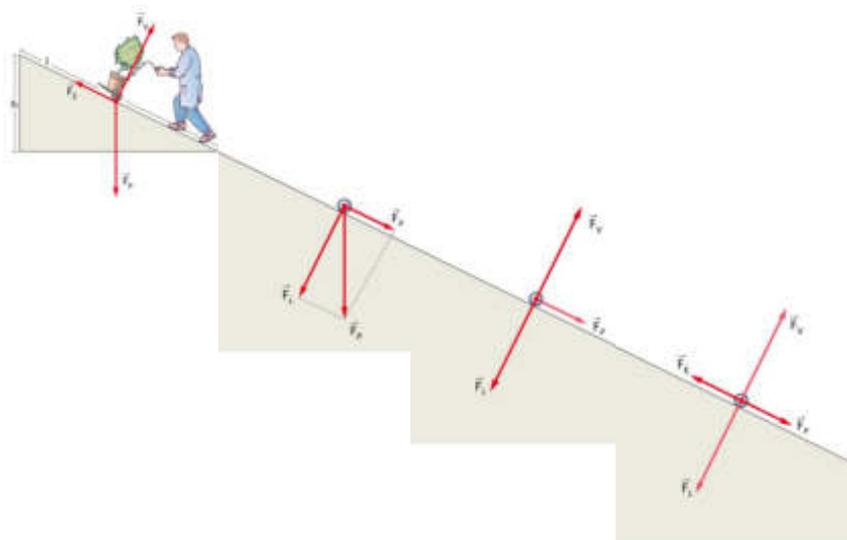
## Momento di una coppia di forze



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

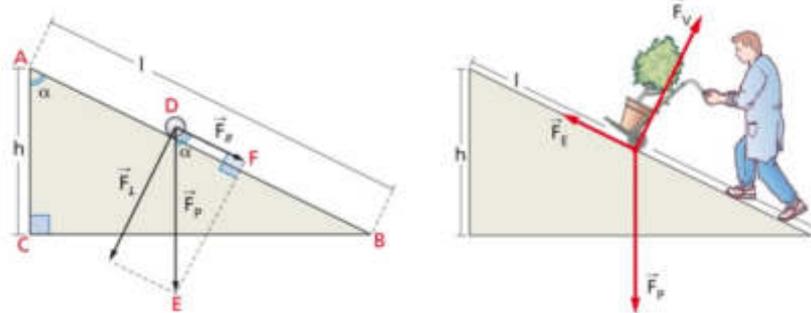
40

## Equilibrio su un piano inclinato



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

42



- Condizione di equilibrio:

$$|\vec{F}_{EQ}| = |F_g| \cos \alpha = |F_g| \frac{h}{l}$$

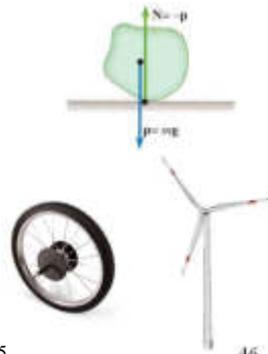


## Vincolo



## Vincolo

- Definizione di vincolo
  - Un vincolo è l'elemento che può limitare la mobilità di un corpo.
- I *vincoli fissi ideali* sono elementi che non si spostano, né si deformano sotto l'azione di forze.
- Un esempio di vincolo fisso ideale è piano orizzontale su cui è poggiato un corpo
- Un altro esempio sono gli assi di rotazione di pendoli, di ruote, di eliche e così via.

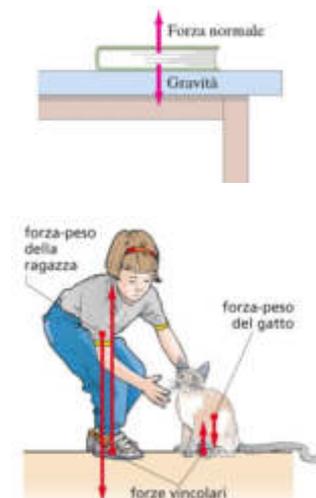


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

46

## Vincolo

- Corpo in equilibrio  $F_{NET}=0$
- Un vincolo è un oggetto che impedisce ad un corpo di compiere alcuni movimenti.
- Il vincolo adatta la propria reazione alla forza attiva che agisce su di esso.
- Tutti i vincoli possono rompersi se sottoposti a forze eccessive.



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

47

## Vincolo

- Se il corpo rigido è vincolato in un punto, le condizioni di equilibrio si semplificano.

- La condizione di equilibrio rispetto ad un moto traslatorio è automaticamente soddisfatta.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{NET} = \vec{R} = 0$$

- Di conseguenza condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo vincolato in un punto è la sola condizione di equilibrio rotazionale.

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_T = 0$$



## Leve meccaniche

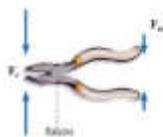
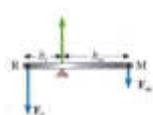


## Leve meccaniche

- Definizione: una leva meccanica è un'asta rigida
- Corpo libero di ruotare intorno ad un asse fisso.
  - Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che sia nulla la somma vettoriale delle proiezioni sull'asse di rotazione dei momenti delle forze applicate al corpo.
- Un'asta rigida, chiamata *leva*, girevole intorno ad un asse perpendicolare all'asta stessa, detto *fulcro*, è il sistema meccanico (o macchina) più semplice mediante il quale è possibile fare equilibrio tra
  - una forza  $F_m$  detta *motrice*, applicata a uno dei suoi punti (M),
  - e una forza  $F_r$  detta *resistente*, applicata a un altro suo punto (R).

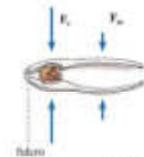
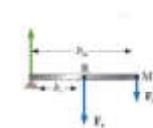


## Leve meccaniche



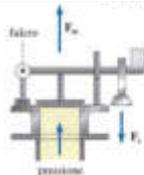
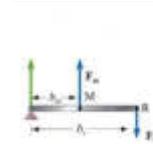
1° tipo (pinza)

Leva del 1° tipo:  
pinza.



2° tipo (schiaccianoci)

Leva del 2° tipo:  
schiaccianoci.



3° tipo

Leva del 3° tipo:  
valvola di sicurezza.



## Leve meccaniche: guadagno

- Nell'ipotesi che le due forze agiscano in un piano perpendicolare al fulcro, l'equilibrio è:

$$\vec{M}_T^{est} = 0$$

$$|\vec{M}_T^{est}| = M_1 + M_2 \rightarrow b_m F_m - b_r F_r = 0 \rightarrow b_m F_m = b_r F_r$$

- Il rapporto adimensionale è detto “**guadagno meccanico**”:

$$G = \frac{F_r}{F_m} = \frac{b_m}{b_r}$$

- Leve vantaggiose

- Braccio della forza è maggiore del braccio della resistenza

$$b_m > b_r \Rightarrow F_m < F_r$$

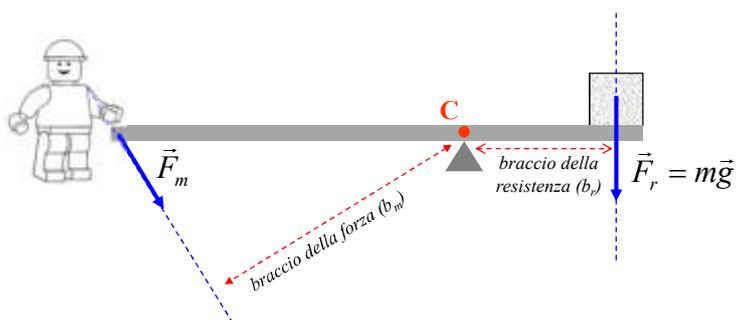
- Leve svantaggiose

- Braccio della forza è minore del braccio della resistenza

$$b_m < b_r \rightarrow F_m > F_r$$



## Leva meccanica



- Equilibrio:

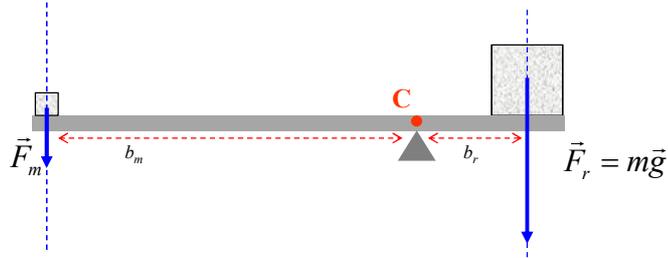
$$M^{est} = 0 \Rightarrow b_m F_m - b_r F_r = 0 \rightarrow b_m F_m = b_r F_r$$

$$F_m = \frac{b_r}{b_m} F_r$$



## Leva meccanica

- È possibile equilibrare/spostare un carico elevato con una forza minima

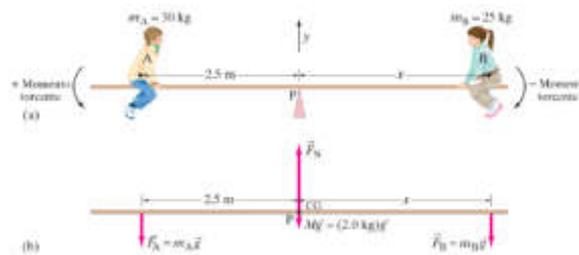


$$F_m = \frac{b_r}{b_m} F_r$$



## Esempio: altalena

- A quale distanza deve essere posizionata la bambina per bilanciare il maschietto?



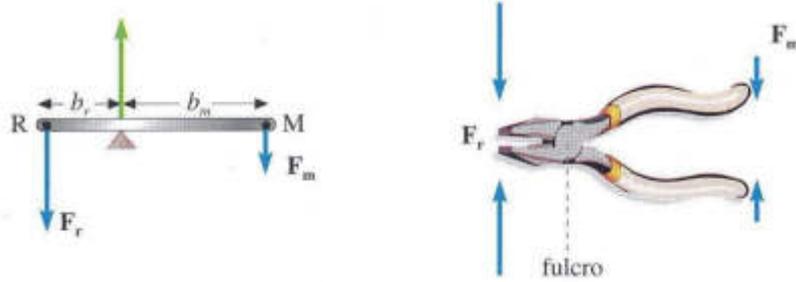
$$\vec{F}_A \times \vec{r}_A = \vec{F}_B \times \vec{r}_B$$

$$m_A g r_A = m_B g x \Rightarrow x = \frac{m_A}{m_B} r_A = 3 \text{ m}$$



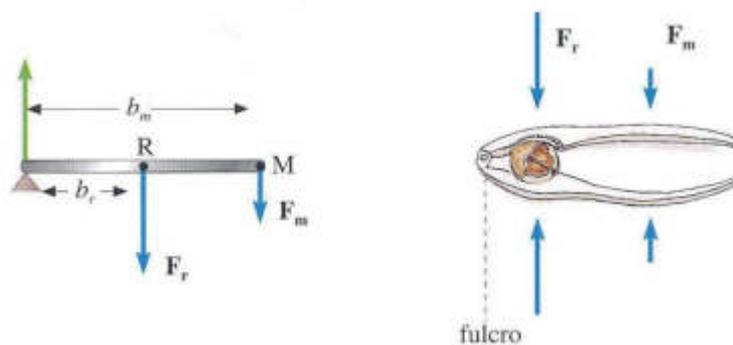
## Leva di 1° tipo

- Il fulcro è posto tra  $R$  ed  $M$ .
- Il guadagno può essere sia maggiore sia minore di uno.



## Leva di 2° tipo

- $R$  è posizionato tra il fulcro ed  $M$ .
- Il guadagno è sempre maggiore di uno (*vantaggiose*).

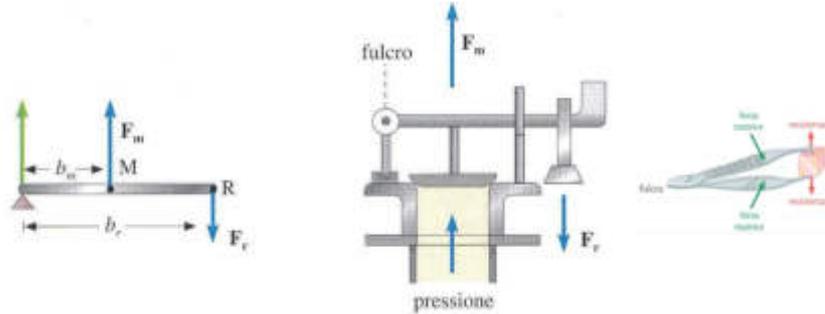


- Carriola



## Leva di 3° tipo

- M è intermedio fra il fulcro ed R
- Il guadagno G è sempre minore di uno (*svantaggiose*).



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

60

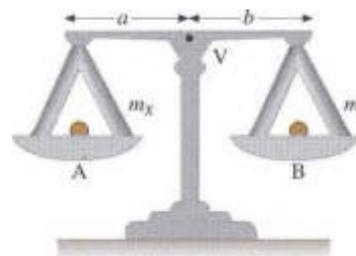
## Bilancia (Leva di 1° tipo)

$$\vec{R} = 0$$

- è automaticamente soddisfatta

$$\vec{M}_T = 0$$

- si riduce ad un'equazione scalare.



$$m_x g a = m_1 g b \quad \rightarrow \quad m_x = m_1 \frac{b}{a}$$

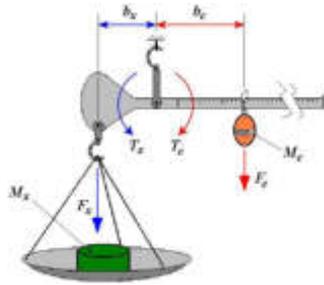
$$a = b \quad \rightarrow \quad m_x = m_1$$



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

61

## Stadera



$$M_x g b_x = M_c g b_c \rightarrow M_x = M_c \frac{b_c}{b_x}$$

$$b_x = \frac{b_c}{10} \rightarrow M_x = 10M_c$$



## Vantaggio/Svantaggio cinematico

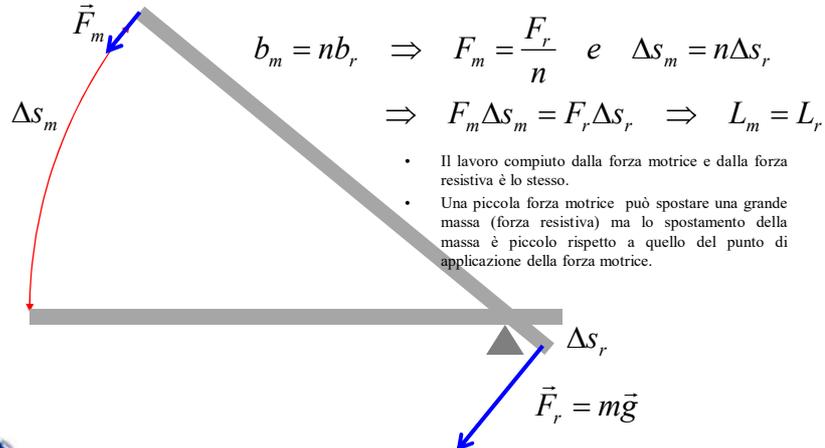
- **Vantaggio statico**
  - Si ha quando impiegando una minore  $F_m$  si può vincere una maggiore  $F_r$  (*leva vantaggiosa*); in questo caso la velocità e l'ampiezza del movimento sono piccole, si ha quindi uno *svantaggio dinamico*.
- **Svantaggio statico**
  - Si ha quando impiegando una maggiore  $F_m$  si può contrastare una minore  $F_r$  (*leva svantaggiosa*); in questo caso la velocità e l'ampiezza del movimento sono grandi, si ha quindi uno *vantaggio dinamico*.
- In definitiva:

**VANTAGGIO STATICO = SVANTAGGIO DINAMICO**  
**SVANTAGGIO STATICO = VANTAGGIO DINAMICO**

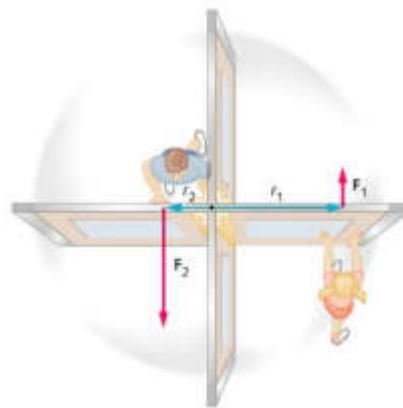


## Vantaggio/Svantaggio cinematico

- Le leve anatomiche sono in maggioranza svantaggiose.
- Una leva *svantaggiosa dal punto dinamico* può *risultare vantaggiosa dal punto di vista cinematico* (degli spostamenti e delle velocità) e viceversa.



## Esempio



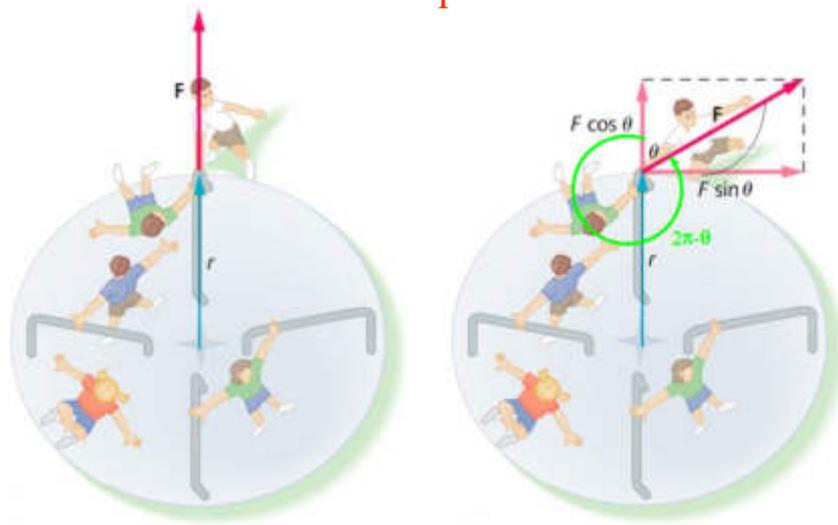
$$\vec{M}_1 = \vec{F}_1 \times \vec{r}_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{F}_2 \times \vec{r}_2$$

$$|\vec{M}_T^{est}| = M_1 + M_2 \rightarrow b_1 F_1 + b_2 F_2 \neq 0 \rightarrow \text{rotazione}$$



## Esempio



$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} = 0$$

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \rightarrow \text{rotazione}$$

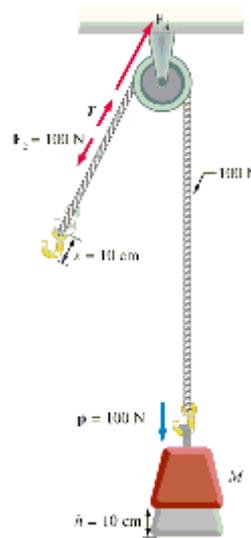


## Carrucola e puleggia



## Carrucola fissa

- La carrucola fissa è costituita da una ruota rigida, con scanalatura fissata al centro ad un sostegno rigido.
- Nella scanalatura passa una fune o un cavo, che sostiene una Resistenza (forza resistente) da vincere mediante una forza motrice (Potenza) applicata al capo opposto di essa.
- L'utilità della carrucola risiede nella possibilità di invertire la direzione e il verso della Potenza rispetto alla Resistenza.

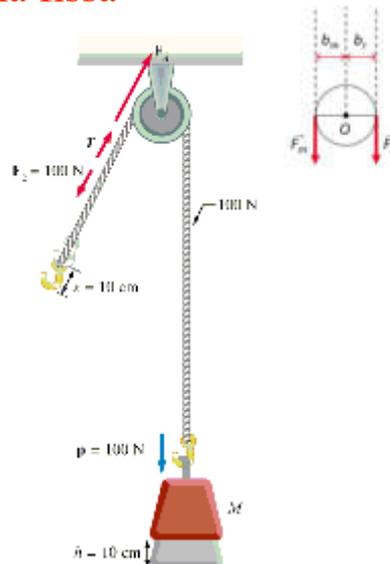


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

80

## Carrucola fissa

- La carrucola fissa è un esempio di leva di 1° tipo
  - Il *fulcro* è rappresentato dall'asse di rotazione (che vincola il moto)
  - La *forza motrice* è applicata lateralmente a distanza del raggio (braccio)
  - La *forza resistiva* è applicata lateralmente a distanza del raggio (braccio)
- È anche conosciuta anche come *macchina di Atwood*.



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

82

## Carrucola fissa

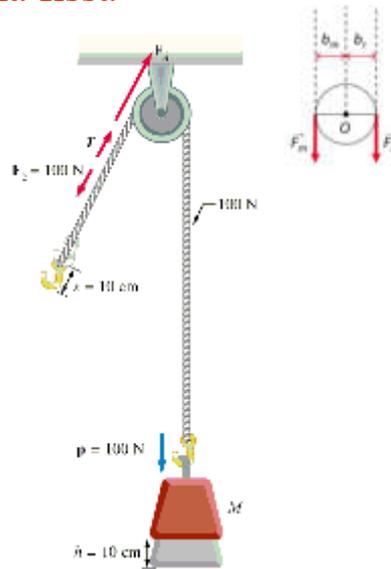
- in assenza di
  - forza di tensione  $T$  della corda
  - forza di attrito tra la puleggia e la corda

- La forza resistente e la forza motrice sono uguali:

$$\vec{P} = \vec{F}_m \rightarrow G = 1$$

- Nella realtà sia la tensione che l'attrito (opposte a  $F_m$ ) non sono nulle e il guadagno è maggiore dell'unità:

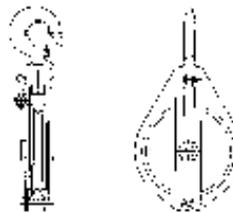
$$\vec{P} = \vec{F}_m \xrightarrow{T \neq 0, F_A \neq 0} G$$



## Carrucola e Puleggia

- **Carrucola (fissa)**

- Macchina semplice adatta al sollevamento di carichi



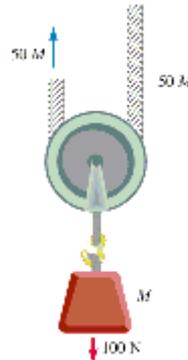
- **Puleggia (mobile)**

- Organo di trasmissione costituito da un disco rotante attorno al proprio asse



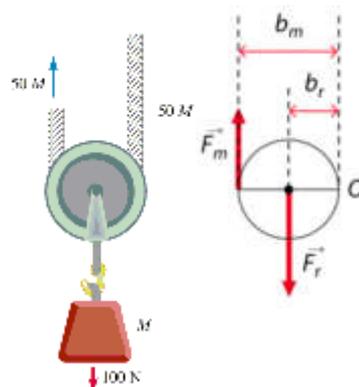
## Carrucola mobile

- Nella carrucola mobile, un capo della fune è fisso, mentre all'altro capo si applica una forza motrice (Potenza) che muove una Resistenza (forza resistente) applicata alla staffa centrale della carrucola stessa.
- Quest'ultima, quindi si muove nel verso opposto alla trazione, trascinando con sé il peso agganciato.



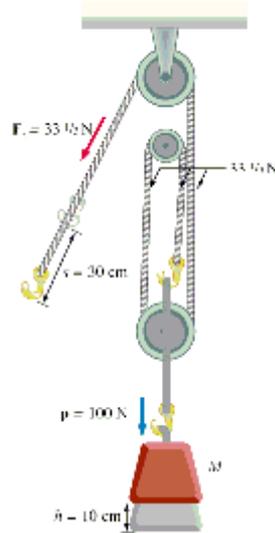
## Carrucola mobile

- La carrucola mobile è un esempio di leva di 2° tipo
  - Il *fulcro* è rappresentato dall'attacco fisso
  - La *forza motrice* è applicata a distanza del diametro (braccio) dal capo mobile della fune
  - La *forza resistiva* è applicata al centro della ruota
  - Il *braccio della forza motrice* è pari al diametro della puleggia
  - Il *braccio della forza resistente* è pari al raggio della puleggia

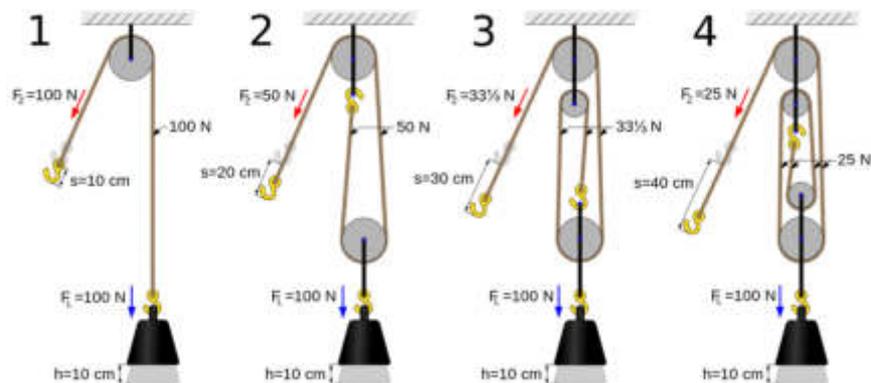


## Carrucola composta

- La carrucola composta è un esempio di leva di 2° tipo
  - Il *fulcro* è rappresentato dall'attacco fisso
  - La *forza motrice* è applicata a distanza del diametro (braccio) dal capo mobile della fune
  - La *forza resistiva* è applicata al centro della ruota



## Carrucola composta



## Ercolina (LAT machine)



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

92

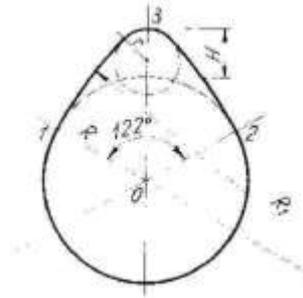
## Cable Tower



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

93

# Camme

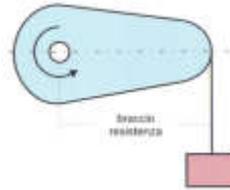


# Leva di serraggio a camma eccentrica



## Carrucola a camma

- La camma è una carrucola a forma di ellisse, anziché di cerchio; quindi si hanno due raggi diversi, che si alternano durante la rotazione, variando, così, i bracci della forza motrice (potenza) e della forza resistente (resistenza).



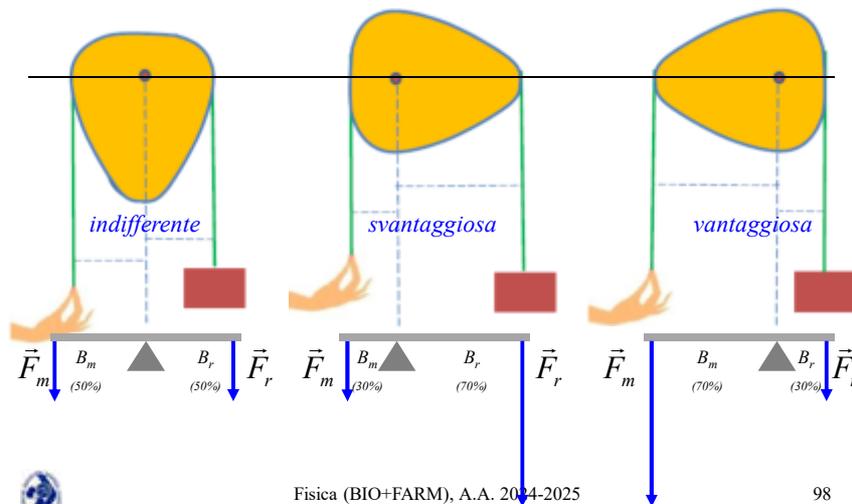
- Il principio è sfruttato nelle macchine moderne della cultura fisica, per variare lo sforzo muscolare (Potenza), durante l'esecuzione di un movimento.
- Durante l'effettuazione della maggior parte dei movimenti, infatti, i bracci di leva che intervengono, cambiano in continuazione, e ciò comporta uno sforzo muscolare variabile.

- L'introduzione delle camme con un orientamento opportuno, permette di mantenere uno sforzo costante durante l'arco del movimento, diminuendo o aumentando il braccio di leva, della puleggia.



## Carrucola a camma

- La particolare forma ellittica consente di avere differenti rapporto tra forza motrice e la forza resistiva per i rispettivi bracci ( $F_m b_m$  e  $F_R b_R$ )

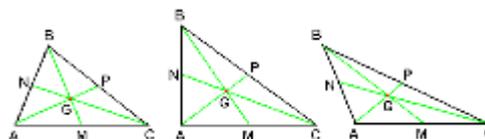
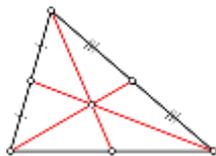


# Baricentro, Centro di massa, Centro di gravità

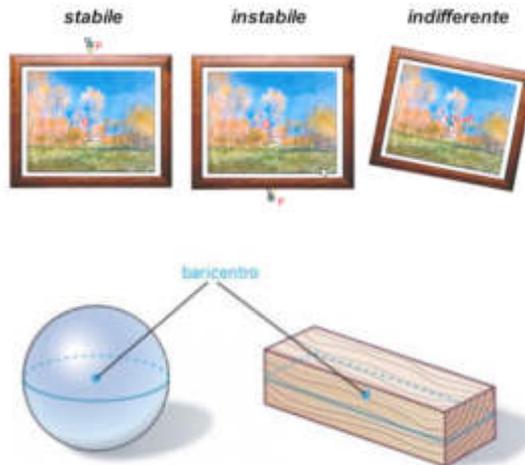


## Baricentro geometrico

- In geometria, il **baricentro** o **centroide** o **centro geometrico** di una figura bidimensionale è la “*posizione media*” di tutti i suoi punti, ovvero la media aritmetica delle posizioni di ciascuno di essi.
- La definizione si estende a qualunque figura  $n$ -dimensionale in uno spazio euclideo  $n$ -dimensionale: il suo **centroide** è la posizione media di tutti i punti in tutte le direzioni coordinate:
  - se la figura presenta un iperpiano di simmetria, il centroide giace su di esso;
  - se sono presenti più iperpiani di simmetria, il centroide giace sulla loro intersezione.



## Baricentro geometrico

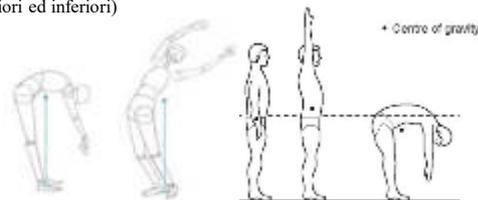


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

108

## Centro di Massa

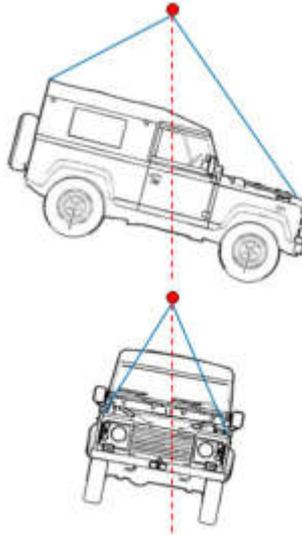
- Nella meccanica classica, il **centro di massa (CM)** di un sistema è il punto geometrico corrispondente al *valor medio della distribuzione della massa del sistema nello spazio*.
- Nel caso particolare di un corpo rigido, il centro di massa
  - ha una posizione fissa rispetto ad un sistema rigido
  - può non coincidere con la posizione di alcuno dei punti materiali che costituiscono il sistema fisico
- Per il corpo umano, ad esempio
  - Il CM non è un punto anatomico fisso in posizione, in alcuni casi può trovarsi fuori del corpo
  - La posizione del CM può variare in funzione della distribuzione delle masse che compongono il corpo (testa, tronco, arti superiori ed inferiori)



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

109

## Centro di massa



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

110

## Centro di gravità

- In fisica il **centro di gravità** è il punto al quale è applicata la forza risultante di tutte le forze di gravità parallele.
  - può coincidere con il **centro di massa** di un corpo, e anche con il suo **baricentro**, il che porta spesso a ritenere questi tre termini intercambiabili.
- **Baricentro=Centro di massa**
  - perché il baricentro coincida con il centro di massa di un corpo, questo
    - deve avere densità uniforme (omogeneo),
    - la distribuzione della materia del corpo deve avere alcune proprietà di simmetria;
- **Baricentro=Centro di gravità**
  - perché coincida con il centro di gravità, il baricentro deve coincidere con il centro di massa del corpo, che deve inoltre essere in un campo gravitazionale uniforme



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

111

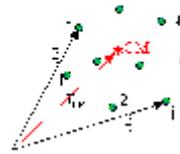
## Centro di Massa

- Dato un sistema di più particelle

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum_i m_i$$

- La posizione del **Centro di Massa (CM)** è rappresentata dal vettore

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots = \sum_i m_i\vec{r}_i$$



$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

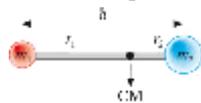
$$z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

*In 3 dimensioni*



## Centro di Massa: 2 particelle

- Nel caso di due particelle:

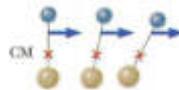


$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

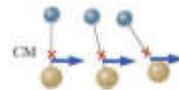
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2$$

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

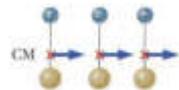
- *Il sistema ruota in senso orario se la forza viene applicata al di sopra del CM*



- *Il sistema ruota in senso antiorario se la forza viene applicata al di sotto del CM*



- *Il sistema si muove nella direzione della forza se quest'ultima viene applicata nel CM*

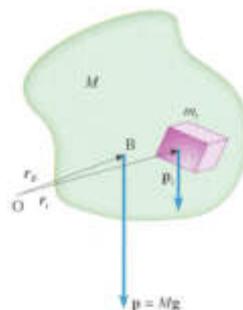


## Centro di Massa

- Per un corpo continuo di dimensioni finite si impiega il calcolo integrale:

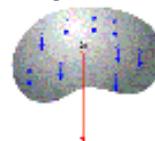
$$M = \int_M dm = \int_V \rho(r) dV$$

$$Mr_{CM} = \int_V \rho(r) \vec{r} dV$$



## Centro di gravità

- La forza peso che agisce su un corpo di massa  $M$ , sottoposto all'azione della gravità, è la risultante di tante forze di gravità elementari quante sono le particelle materiali di cui è costituito il corpo.



- Si definisce **Centro di Gravità (Baricentro)** di un corpo il punto di applicazione della forza di gravità che agisce su di esso.

$$Mg\vec{r}_B = m_1g\vec{r}_1 + m_2g\vec{r}_2 + m_3g\vec{r}_3 + \dots = \sum_i m_i g\vec{r}_i$$

$$Mg\vec{r}_B = \int_V d(r)g\vec{r} dV$$



## Centro di massa e Centro di gravità

- Dalle due equazioni per il C.M. e il C.G.

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots = \sum_i m_i\vec{r}_i$$

$$Mg\vec{r}_B = m_1g\vec{r}_1 + m_2g\vec{r}_2 + m_3g\vec{r}_3 + \dots = \sum_i m_i g\vec{r}_i$$

- Si ottengono

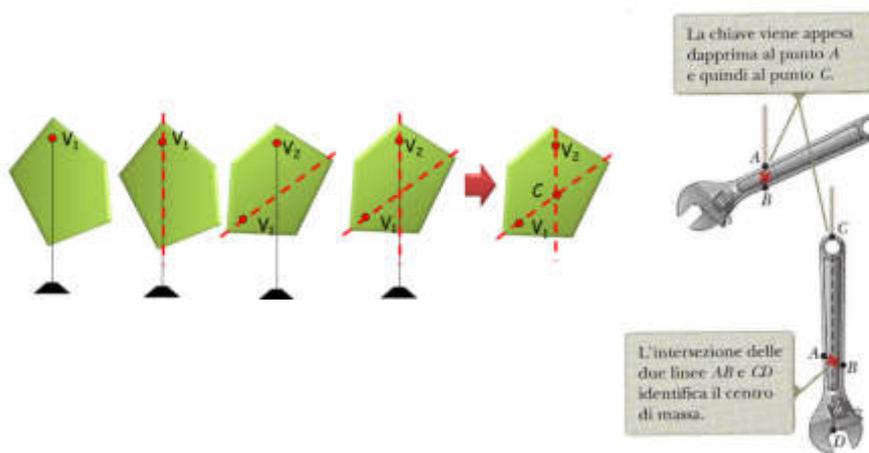
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{1}{M} \sum_i m_i\vec{r}_i$$

$$\vec{r}_B = \frac{m_1g\vec{r}_1 + m_2g\vec{r}_2 + m_3g\vec{r}_3 + \dots}{m_1g + m_2g + m_3g + \dots} = \frac{1}{Mg} \sum_i m_i g\vec{r}_i$$

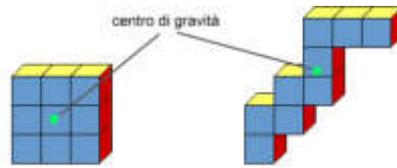
- Il C.M. coincide con il C.G. se l'accelerazione di gravità  $g$  non varia nel volume occupato dal corpo



## Determinazione del CM (bilanciamento)



## Centro di gravità



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

126

## Centro di gravità

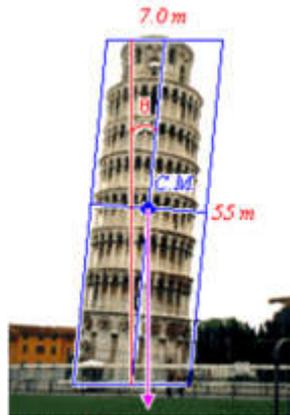


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

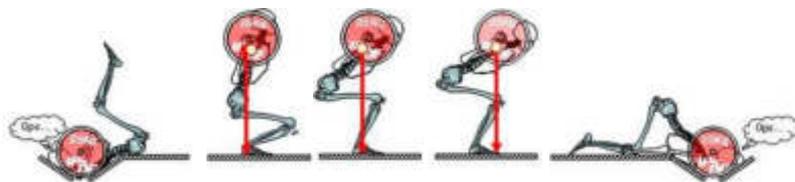
127

## Esempio: Torre di Pisa

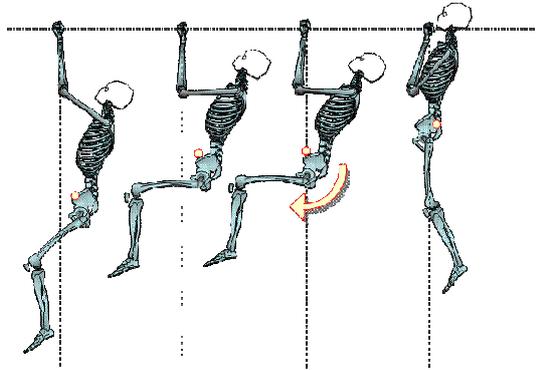
- La torre di Pisa è alta 50 m e ha un diametro di 7 m. La sommità della torre è fuori piombo di 5.2m (1997).
- La torre crollerà a terra quando la proiezione del centro di massa uscirà fuori dalla struttura di fondazione.
- Vogliamo stimare qual è il valore limite dell'angolo di inclinazione, superato il quale si ha il crollo.
- La stima si ottiene facilmente schematizzando la torre come un cilindro pieno con densità uniforme. In questo caso il centro di massa coincide col baricentro geometrico del cilindro ed è individuato dall'intersezione della linea che unisce le mezzerie della base e della sommità con la linea che unisce le mezzerie di due pareti opposte. La condizione limite si ha quando la sommità è fuori piombo di 7m (cioè si è spostato di altri 1.8m). L'angolo limite è  $q = \arcsin(7/55) = 7.5^\circ$  e la pendenza  $i = \tan(q) = 13.17\%$ .



## Squat



## Sospensione

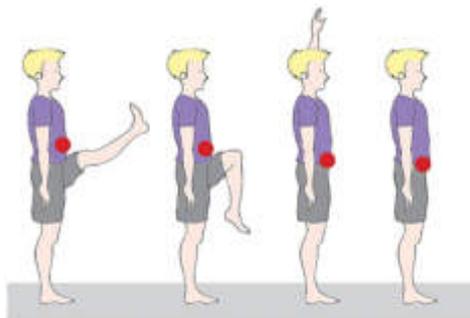


## Identificazione del centro di massa del corpo umano



## Centro di Massa

- Variazione della posizione del centro di massa (cerchio rosso) in relazione alle diverse posizioni dei segmenti corporei.

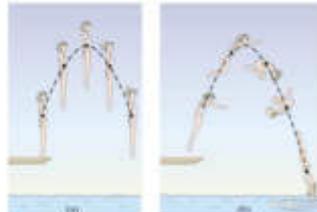


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

138

## Centro di massa del corpo umano

- Talvolta è utile conoscere la posizione del Centro di Massa.
- Il CM di un oggetto in caduta libera segue (*sotto alcune condizioni*) la stessa traiettoria di un singolo corpuscolo microscopico, sebbene l'oggetto di dimensioni finite possa anche ruotare o cambiare la sua forma.
- Ciò semplifica l'analisi dei salti, degli esercizi ginnici e di altre attività atletiche, oltre che del moto dei corpi rigidi.



- Esempio:
  - Nella terapia fisica, un uomo amputato con un arto artificiale, che è più leggero dell'arto naturale, ha il centro di massa spostato. Si deve tener conto di ciò nel programmare la riabilitazione della persona.



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

140

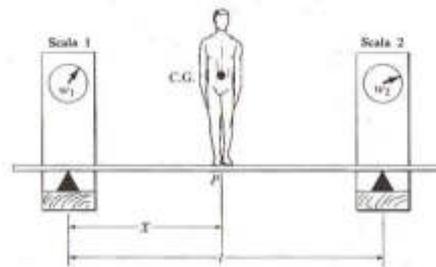
## Centro di massa del corpo umano

- Per gli esseri viventi (uomini e animali) si impiega una tecnica differente.
  - Una tavola di lunghezza  $l$  è sostenuta alle sue estremità da cunei a spigolo vivo appoggiati ciascuno sul piatto di una bilancia regolata in modo tale da leggere zero quando sulla tavola non è appoggiato alcun peso.
  - Con la persona sulla tavola, le due bilance forniscono due valori di massa.
- Equilibrio per rotazione (rispetto al punto  $P$ )

$$\vec{M}_T^{est} = 0 \rightarrow -Xm_1 + (l - X)m_2 = 0$$

- da cui

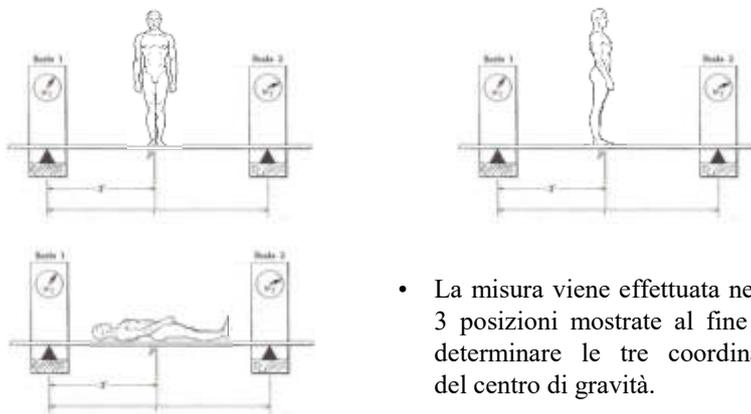
$$X = \frac{lm_2}{m_1 + m_2}$$



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

142

## Baricentro del corpo umano



- La misura viene effettuata nelle 3 posizioni mostrate al fine di determinare le tre coordinate del centro di gravità.

$$X = \frac{lm_2}{m_1 + m_2} \qquad Y = \frac{lm_2}{m_1 + m_2} \qquad Z = \frac{lm_2}{m_1 + m_2}$$

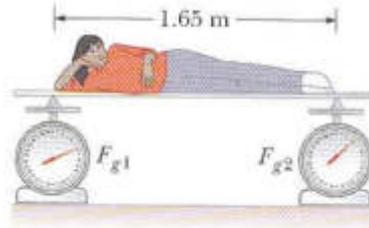


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

143

## Esempio

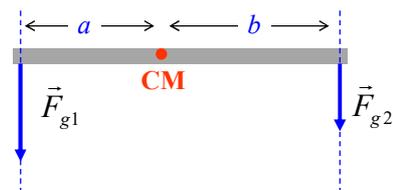
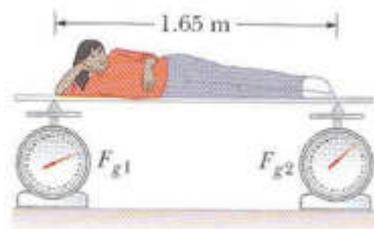
- Negli studi di Fisiologia capita spesso di dover determinare la posizione del CM di un essere umano.
- Supponiamo che le due bilancie (separate di 1.65 m) misurino  $F_{g1}=380$  N e  $F_{g2}=320$  N.



- *A quale distanza dai piedi della donna si trova il suo CM?*



## Esempio



$$\begin{cases} F_{g1}a = F_{g2}b \\ a + b = \text{cost} \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{F_{g1}}{F_{g2}}a \\ a + b = 165 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{F_{g1}}{F_{g2}}a \\ a + \frac{F_{g1}}{F_{g2}}a = 165 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{380}{320}a \\ a \left(1 + \frac{380}{320}\right) = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1.1875a \\ a \cdot 2.1875 = 165 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1.1875a \\ a = 75.43 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 89.57 \\ a = 75.43 \end{cases}$$





## Centro di Massa

- Dato un sistema di più particelle

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum_i m_i$$

- La posizione del **Centro di Massa** (CM) è rappresentata dal vettore

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots = \sum_i m_i\vec{r}_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

*In 3 dimensioni*



## Moto del centro di massa

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots = \sum_i m_i\vec{r}_i$$

- derivando rispetto al tempo

$$M \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{r}_3}{dt} + \dots = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots = \sum_i m_i\vec{v}_i$$

- da cui

$$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}$$

- derivando rispetto al tempo una seconda volta:

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \dots = \sum_i m_i\vec{a}_i$$

- da cui

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i$$



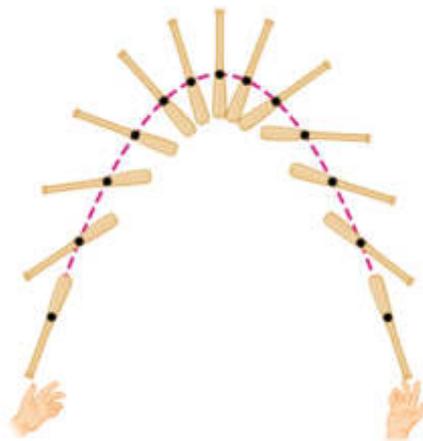
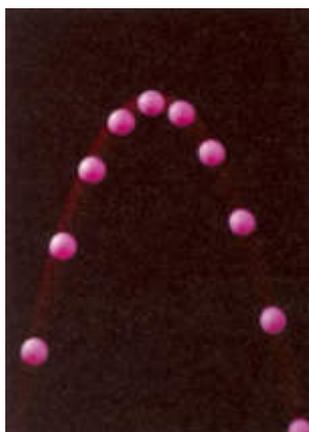
## Moto del centro di massa

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i \quad \begin{array}{l} 2^\circ \text{ Legge di Newton} \\ \text{Per un corpo rigido} \end{array}$$

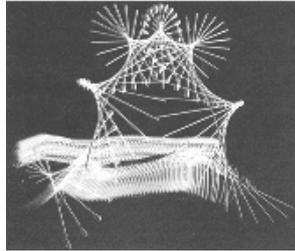
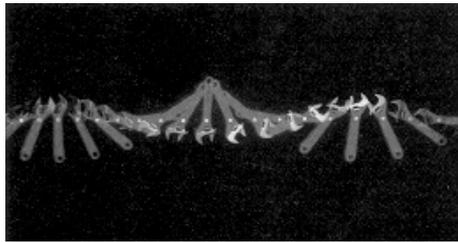
- Il Centro di Massa di un sistema di particelle si muove come una particella di massa  $M$  sotto l'influenza delle forze esterne agenti sul sistema
- (le eventuali forze interne si eliminano a due a due per il terzo principio della dinamica)



## Moto di un sistema di punti materiali



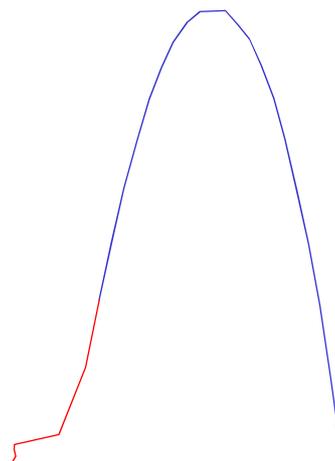
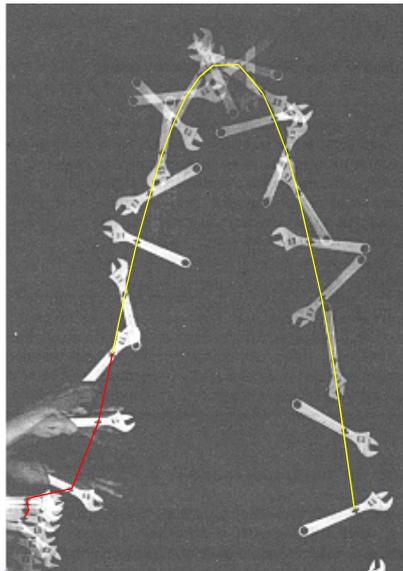
## Moto del C.d.M. sotto forze esterne



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

158

## Esempio

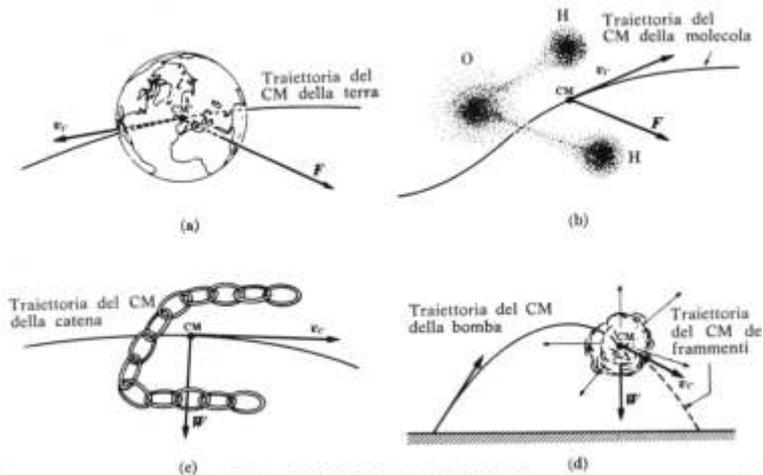


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

159

## 2<sup>a</sup> Legge di Newton

- Affrontiamo ora lo studio del moto del C.M. esaminando come esso si muovo sotto l'azione di una forza esterna.



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

160

## 2<sup>a</sup> Legge di Newton

- Applicazione della 2<sup>o</sup> Legge di Newton:

$$\vec{F}_{NET} = M \vec{a}_{CM}$$

- Considerazioni:

- $F_{NET}$  è la somma vettoriale di tutte le forze esterne che agiscono sul sistema (le forze interagenti fra parti del sistema sono chiamate forze interne ma non devono essere incluse nel calcolo).

$$\vec{F}_{NET} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- M è la massa totale del sistema, costante (sistema chiuso).

$$M = \sum m_i$$

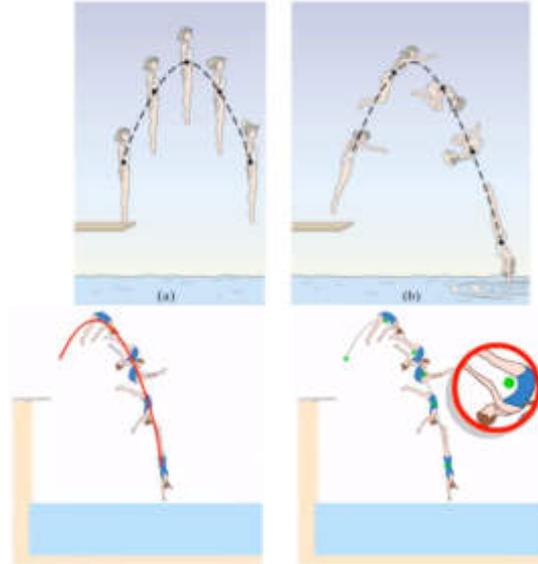
- $a_{CDM}$  è l'accelerazione del centro di massa del sistema (non è fornita dall'equazione alcuna informazione sull'accelerazione dei singoli punti materiali del sistema)



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

161

## 2<sup>a</sup> Legge di Newton



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

162

## Elasticità



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

166

## Elasticità e Legge empirica di Hooke

- Nei casi finora studiati abbiamo considerato **corpi rigidi**, cioè *non deformabili*.
- Nella realtà, i corpi sono *deformabili*, anche se spesso in modo impercettibile.
  - **Def:** Un corpo solido si dice **elastico** se riprende la sua forma originale una volta rimossa le cause della deformazione.
  - **Def:** Un corpo solido si dice **plastico** se la deformazione rimane costante nel tempo, anche eliminandone le cause.



## Elasticità e Legge empirica di Hooke

- Per i corpi elastici vale la Legge di Hooke che, nel caso di allungamento di un corpo, è:

$$\frac{|\vec{F}|}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

*sforzo (stress)*
*stiramento*

*modulo di elasticità di Young*

- $F$ : forza applicata
- $A$ : area della sezione del corpo
- $l$ : lunghezza del corpo
- $\Delta l$ : allungamento del corpo
- $E$ : modulo di elasticità di Young

$$\frac{|\vec{F}|}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \sigma = E \varepsilon$$

*stiramento*
*sforzo (stress)*



## Elasticità e Legge di Hooke

$$\frac{|\vec{F}|}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

$\swarrow$  sforzo (stress)       $\searrow$  stiramento  
 $\downarrow$  modulo di elasticità di Young

**TABELLA 3.3** Modulo di Young per diversi materiali

MATERIALE	$E$ ( $\text{N m}^{-2}$ )	MATERIALE	$E$ ( $\text{N m}^{-2}$ )
acciaio	$2 \cdot 10^{11}$	legno duro	$1 \cdot 10^{10}$
vetro	$7 \cdot 10^{10}$	tendine	$2 \cdot 10^7$
mattonc	$2 \cdot 10^{10}$	cartilagine (costole)	$1.2 \cdot 10^7$
ossa (lungo l'asse) trazione	$1.8 \cdot 10^{10}$	gomma	$1 \cdot 10^6$
ossa (lungo l'asse) compressione	$0.9 \cdot 10^{10}$	vasi sanguigni	$2 \cdot 10^5$



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

169

## Legge di Hooke per deformazioni di volume

- La legge di Hooke è valida anche per deformazioni di volume:

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}$$

$\swarrow$  variazione di pressione       $\searrow$  variazione di volume  
 $\downarrow$  modulo di compressione

il segno meno indica che ad una diminuzione di pressione corrisponde un aumento di volume



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

171

## Legge di Hooke per deformazioni di membrana

- La legge di Hooke è valida anche per le deformazioni di una membrana:

$$\frac{F}{l} = k \frac{\Delta S}{S}$$

*forza applicata, per unità di lunghezza, alla membrana*

*costante elastica della membrana*

*variazione di superficie*



## Forze di contatto



## Tenuta in curva



## Introduzione alle Forze di contatto

$$\vec{F}_{net}(x, y, z) = m\vec{a}(x, y, z)$$

- La seconda legge di Newton è l'equazione del moto.
- Se conosciamo le forze che agiscono su un corpo, allora, date la posizione iniziale e la velocità iniziale del corpo, possiamo applicarla e determinare il suo moto successivo.
- In alcuni casi questo procedimento viene rovesciato: misurando il moto di un corpo determiniamo le forze ad esso applicate.
- Applichiamo questa strategia per studiare la natura delle forze di contatto.



## Introduzione alle Forze di contatto

- In questo capitolo ci concentreremo su:
  - la forza d'attrito,
  - la forza di resistenza del mezzo
- Nel caso della auto di Formula 1:
  - La **forza d'attrito** che agisce sui pneumatici è fondamentale nelle accelerazioni, per esempio nell'uscita dai box o all'uscita dalle curve (*se l'auto incontra una chiazza d'olio... addio attrito e probabilmente addio macchina!*).
  - La **forza di resistenza** del mezzo che agisce sulla vettura, in questo caso una forza aerodinamica, va limitata il più possibile per evitare all'auto consumi eccessivi e quindi più rifornimenti (*anche una sosta di 14 s può costare la gara al pilota*).



## Forze di contatto

- Le forze di contatto, di cui chiunque ha esperienza quotidiana, hanno tra l'altro, come effetto ovvio, di impedire ai corpi di compenetrarsi.
- L'interazione fondamentale responsabile di queste forze è la **forza elettromagnetica** agente tra gli atomi e le molecole, la quale opera al livello dei loro costituenti, elettroni e nuclei. A questo livello microscopico, le forze di contatto coinvolgono molte particelle e sono assai complesse e non del tutto comprese.
- Fortunatamente il **comportamento macroscopico** di queste forze è molto più semplice, e noi considereremo le forze di contatto soltanto a quest'ultimo livello.



## Descrizione delle Forze di contatto

- Un modo conveniente di descrivere le forze di contatto che agiscono tra le superfici piane di due corpi solidi consiste nello scomporre la forza di contatto in due forze:
  - una parallela alla superficie di contatto (*forza d'attrito*)
  - una perpendicolare alla superficie di contatto (*forza normale*)
- Esse vengono poi trattate come forze distinte.



## Esperimento concettuale 1

- Facciamo scivolare un libro appoggiato su un tavolo. Come ci si aspetta, il libro rallenta e alla fine si ferma.
- Il libro, cioè, è sottoposto a un'accelerazione con direzione parallela alla superficie del tavolo e con verso opposto a quello del vettore velocità.
- La seconda legge di Newton vuole perciò che il libro sia sottoposto a una forza parallela alla superficie del tavolo, anch'essa in verso opposto alla sua velocità. Questa forza è una forza d'attrito.



## Esperimento concettuale 2

- Facciamo scivolare orizzontalmente il libro “spingendolo” in modo che esso si muova a velocità costante sulla superficie del tavolo.
- *La forza applicata è l'unica forza orizzontale che agisce sul libro?*
- **No**, perché altrimenti accelererebbe.
- La seconda legge di Newton ci assicura che esiste almeno un'altra forza, contrapposta alla nostra e dello stesso modulo, capace di *equilibrarla*. Questa seconda forza è una forza d'attrito, diretta parallelamente alla superficie del tavolo.



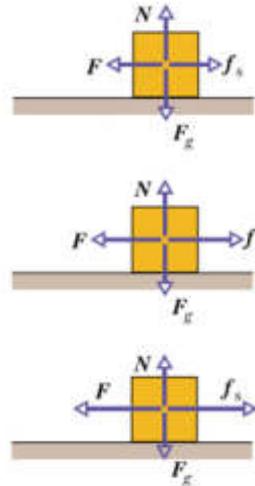
## Esperimento concettuale 3

- Supponiamo che una pesante cassa stia sul pavimento.
- Se tentiamo di spostarla orizzontalmente non si muove.
  - La seconda legge di Newton impone l'esistenza di una seconda forza agente sulla cassa in grado di bilanciare la nostra. E per bilanciarla deve essere uguale in modulo e direzione ma di verso opposto. Questa seconda forza è una forza d'attrito.
- Se spingiamo la cassa con maggiore forza, la cassa continua a non muoversi.
  - La forza di attrito sembra in grado di dosare la propria intensità in maniera tale che le due forze continuino a equilibrarsi.
- Se spingiamo con tutte le nostre energie, la cassa comincia a scivolare.
  - La forza di attrito può arrivare fino a un massimo d'intensità, ma non oltre. Se noi siamo in grado di superare questo suo valore massimo, la cassa si muove.



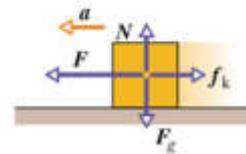
## Esperimento concettuale: dettaglio

- aumentando l'intensità della forza applicata, aumenta anche l'intensità della **forza di attrito statico**  $f_s$ ;
- conseguentemente il blocco resta ancora fermo.



## Esperimento concettuale: dettaglio

- quando la forza applicata supera un certo valore, il blocco «strappa» bruscamente il suo contatto con il piano del tavolo e accelera.
- La forza di attrito che si oppone ora al moto è detta **forza di attrito dinamico** (o **cinetico**)  $f_k$ .



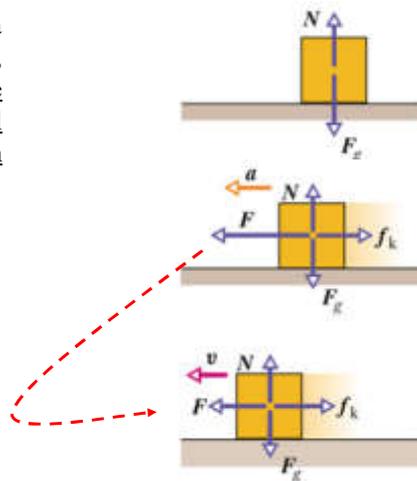
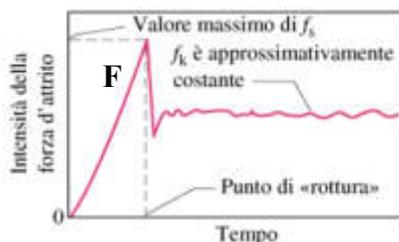
- Di solito

$$f_k < \max|f_s|$$



## Esperimento concettuale: dettaglio

- Per far muovere il blocco sulla superficie a velocità costante, dovremo in generale diminuire la forza applicata non appena il blocco si è messo in movimento.



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

186

## Proprietà empiriche dell'attrito

- Se il corpo non è in moto,

$$f_s = -F_{\text{parallela}}$$

- L'intensità di  $f_s$  può raggiungere un valore massimo

$$f_s \leq \mu_s F_N \quad f_s = f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N$$

- dove  $\mu_s$  è il **coefficiente di attrito statico** (adimensionale).

- Se il corpo comincia a scivolare lungo la superficie, l'intensità della forza di attrito decresce rapidamente fino al valore  $f_k$  dato da

$$f_k = \mu_k F_N$$

- Dove  $\mu_k$  è il **coefficiente di attrito dinamico** (adimensionale).

- $\mu_s$  e  $\mu_k$  dipendono dalla natura delle superfici ( $\mu_k < \mu_s$ )



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

188

## Forza di attrito dinamico

- Si noti che  $F_k$  si oppone a  $v$
- Inoltre, sperimentalmente, si nota
  - $F_k$  dipende dalla natura e dalle condizioni delle due superfici, e  $\mu_k$  solitamente cade nell'intervallo tra 0.1 circa e 1.5 circa (vedi  $\mu_d$  nella tabella nella trasparenza successiva)
  - $F_k$  (o  $\mu_k$ ) è indipendente dalla velocità, per basse velocità relative delle due superfici, manifestando solo un lieve decremento al crescere di tale velocità.
  - $F_k$  (o  $\mu_k$ ) è indipendente dall'area di contatto in un'ampia gamma di aree.



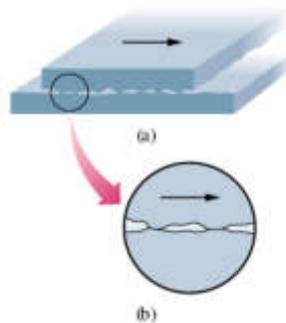
## Coefficienti d'attrito

	$\mu_s$	$\mu_d$
Acciaio su acciaio	0.74	0.57
Alluminio su acciaio	0.61	0.47
Rame su acciaio	0.53	0.36
Gomma su cemento	1.0	0.8
Legno su legno	0.25-0.5	0.2
Vetro su vetro	0.94	0.4
Legno grasso su neve bagnata	0.14	0.1
Legno grasso su neve secca	—	0.04
Metallo su metallo (lubrificato)	0.15	0.06
Ghiaccio su ghiaccio	0.1	0.03
Teflon su teflon	0.04	0.04
Articolazioni negli uomini	0.01	0.003



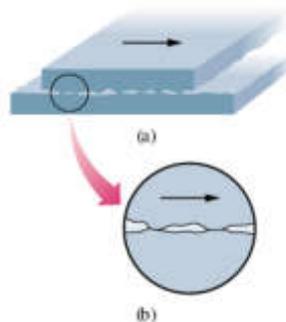
## Origine dell'attrito statico

- Fondamentalmente la forza di attrito è una forza che agisce tra gli atomi superficiali di un corpo e quelli di un altro. Se due superfici di metallo levigate e accuratamente lucidate sono messe a contatto sotto vuoto spinto, non possono essere fatte scivolare l'una rispetto all'altra: esse infatti si saldano a freddo l'una contro l'altra, formando un unico blocco di metallo.
- Anche i blocchi lucidati a specchio del comparatore di un attrezzista meccanico, portati a contatto nell'aria, si incollano fra loro quasi altrettanto strettamente, e si possono separare soltanto con un violento sforzo di torsione. In circostanze normali, tuttavia, questo contatto intimo di atomo con atomo non è possibile. Perfino una superficie di metallo molto ben lucidata, come quella che si vede nella figura, è ben lontana da poter essere definita piana su scala atomica. Inoltre le superfici degli oggetti di tutti i giorni hanno strati di ossidi e altre impurità solide che riducono la possibilità di saldature a freddo.



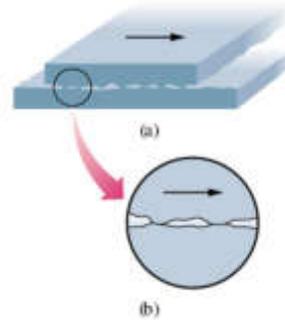
## Origine dell'attrito statico

- Quando due superfici sono collocate l'una contro l'altra, solo i loro punti più sporgenti si toccano.
- L'effettiva area microscopica di contatto è molto minore dell'apparente area macroscopica di contatto, per un fattore che può arrivare fino a  $10^4$ .
- Molti dei punti di contatto si saldano a freddo. Queste microsaldature danno luogo all'attrito statico quando una forza applicata tende a far slittare le superfici una sull'altra.



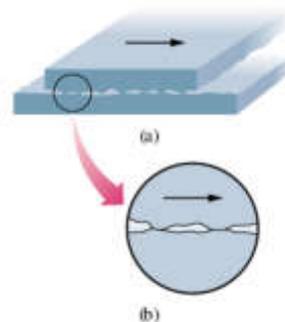
## Origine dell'attrito dinamico

- Quando si tira facendo strisciare una superficie sull'altra, si provoca dapprima uno stiramento delle saldature e, dopo lo strappo iniziale, una continua successione di risaldature e di strappi.
- La forza d'attrito dinamico  $f_k$  che si oppone al moto è il vettore somma delle forze dovute a questi microcontatti casuali.
- Se si premono maggiormente le due superfici, sono molti di più i punti che si saldano a freddo. Di conseguenza, occorre una forza molto maggiore per far scorrere una superficie sull'altra.
- La forza di attrito statico  $f_s$  ha un valore massimo più elevato. Anche quando le superfici strisciano l'una contro l'altra vi sono molti più punti di contatto temporaneo, e così anche la forza d'attrito dinamico  $f_k$  ha un'intensità maggiore.



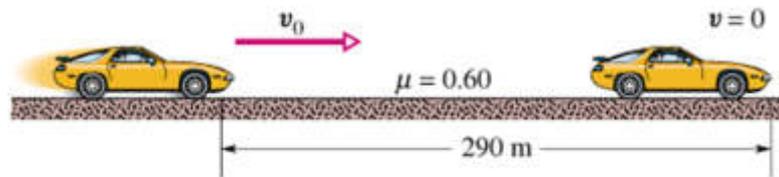
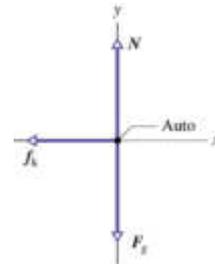
## Origine dell'attrito dinamico

- Ed è proprio la rapida successione di questi brevissimi periodi di adesione e slittamento che provoca quello stridulo rumore che è caratteristico dello sfregamento relativo di due superfici secche.
- Così si produce lo stridio dei pneumatici su un fondo asciutto, il cigolio di cardini arrugginiti e il fastidioso suono prodotto a volte dal gesso sulla lavagna. Altre volte però uno sfregamento fra superfici asciutte può provocare un suono piacevole, come quando un archetto, alternando adesioni a slittamenti, «saltella» su una corda di violino.



## Frenata in corsa

Se le ruote di un'auto sono «bloccate» (è cioè impedita la loro rotazione) durante una frenata di emergenza, l'auto scivola sul fondo stradale. Pezzi di pneumatico strappati e piccoli frammenti di asfalto fuso formano le «tracce di frenata» rivelatrici della saldatura a freddo intervenuta durante lo slittamento. Il record per le tracce di frenata più lunghe su un'autostrada aperta al pubblico sembra sia stato stabilito nel 1960 da una Jaguar sull'autostrada M1 in Gran Bretagna (fig. 6.3a): 290 m! Ammettendo che fosse  $\mu_k = 0,60$ , a che velocità stava andando l'auto all'istante del bloccaggio delle ruote?



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

196

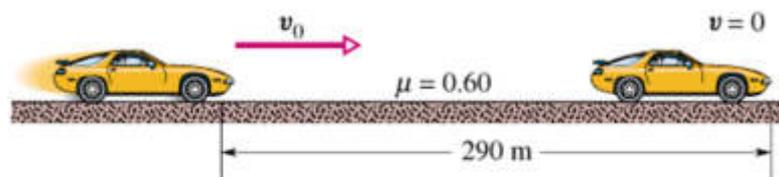
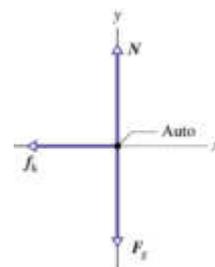
## Frenata in corsa

- Supponendo che l'accelerazione fosse costante, usiamo:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- Assumiamo, inoltre, che l'unica forza agente sia la forza di attrito dinamico nel verso opposto al quello del moto.

$$F_{NET,x} = ma_x \Rightarrow -f_k = ma$$



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

197

## Frenata in corsa

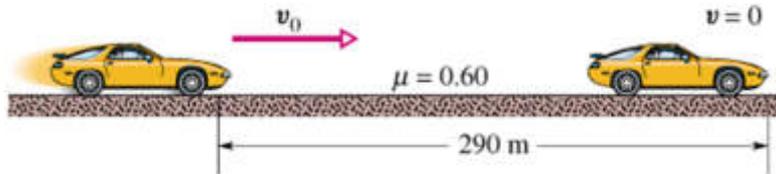
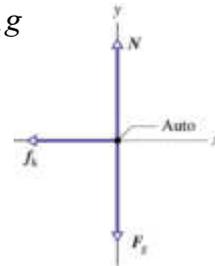
$$\left. \begin{array}{l} f_k = \mu_k F_N \\ F_N = F_g = mg \end{array} \right\} \Rightarrow a = -\frac{f_k}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g$$

- Che sostituito nella

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- Fornisce:

$$v_0 = \sqrt{2\mu_k g(x - x_0)} = 210 \text{ km/h}$$

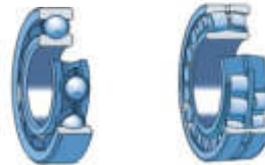


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

198

## Attrito nei fluidi

- Le forze di attrito nei fluidi sono chiamate **forze viscosse** e sono spesso molto piccole in confronto alle forze d'attrito tra superfici solide.
- L'uso di liquidi lubrificanti, come gli oli, che aderiscono alle superfici dei metalli formando degli strati che si muovono con queste, riduce molto l'attrito.

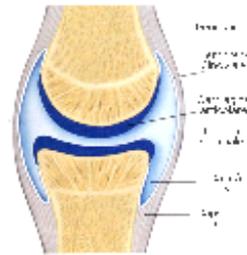
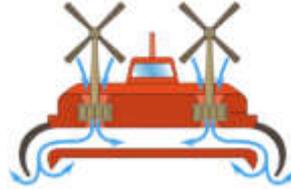


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

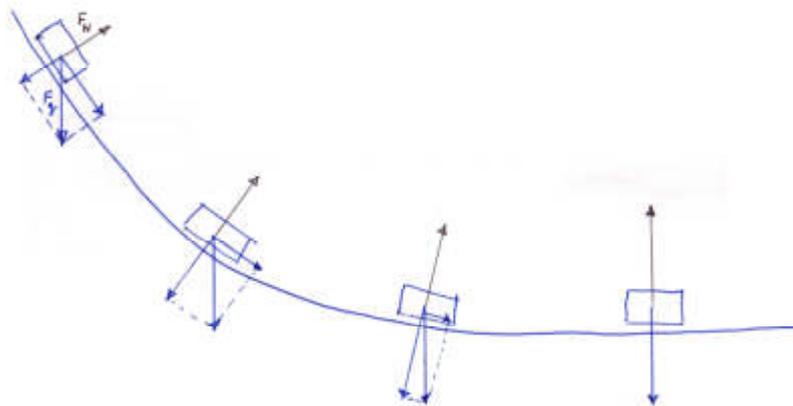
199

## Attrito nei fluidi

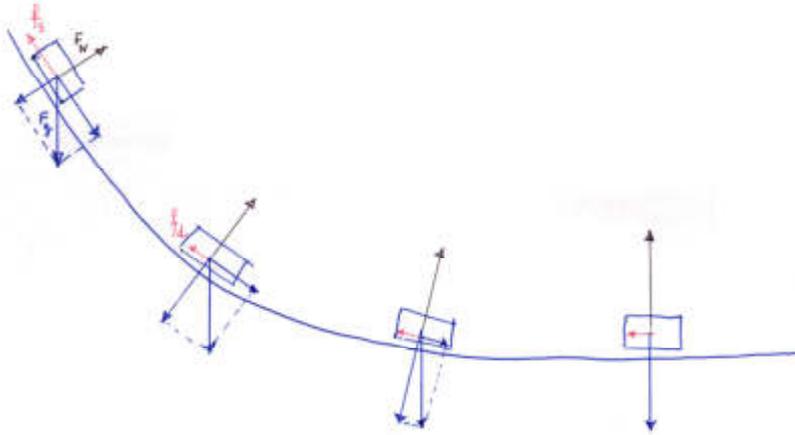
- Uno strato d'aria fornisce un supporto quasi privo d'attrito come, ad esempio, nel caso di un veicolo a cuscino d'aria del tipo «hovercraft»
- Nel movimento, tutti gli attriti presenti nelle ginocchia e nelle altre giunture delle gambe sono ridotti da un lubrificante (**fluido sinoviale**) che è spremuto attraverso la cartilagine che riveste le giunture ogni volta che queste si muovono.
- Quando la giuntura è ferma, esso è riassorbito, aumentando l'attrito e facilitando la posizione fissa.



## Scivolo 1



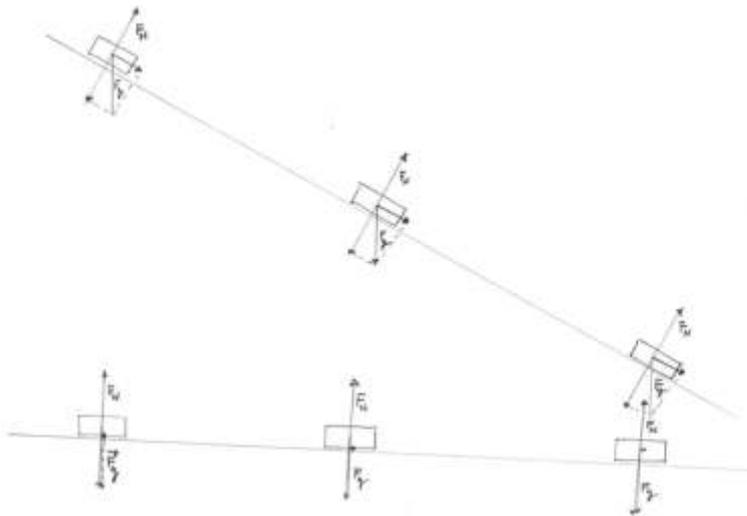
## Scivolo 1



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

204

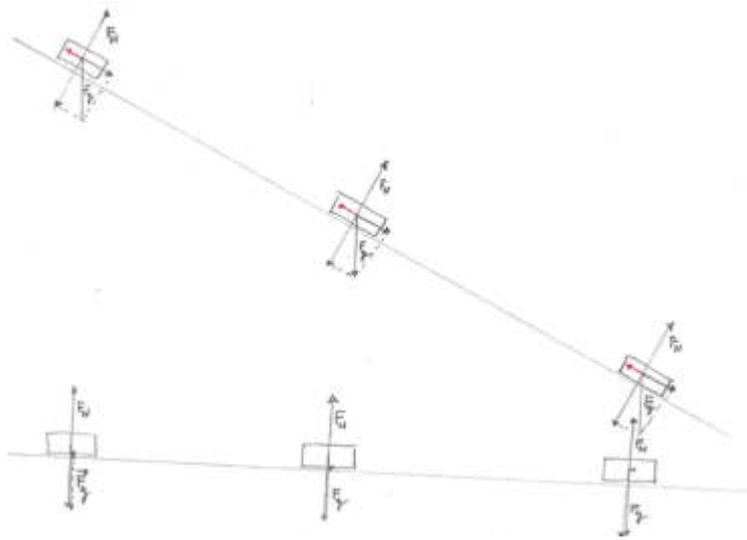
## Piano inclinato



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

205

## Piano inclinato



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

206

## Resistenza del mezzo



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025  
Prof. Nicola Cavallo

207

## Resistenza del mezzo

- Quando tra un **fluido** e un **corpo solido** esiste una velocità relativa non nulla (o perché il corpo si muove nel fluido, o perché il fluido si muove incontro al corpo), sul corpo agisce una **forza di resistenza del mezzo  $D$**  che si oppone al moto relativo, diretta nel senso in cui si muove il fluido in relazione al corpo.
- Quando si tratta di **gas**, in particolare aria, questa forza è chiamata anche **forza di resistenza aerodinamica**.



## Resistenza aerodinamica

- Ipotesi di studio:
  - il fluido è l'aria
  - il corpo è tozzo o arrotondato (come una palla da baseball) piuttosto che affusolato (come un giavelotto)
  - il moto relativo sia abbastanza veloce da rendere turbolenta l'aria, tale cioè da formare vortici irregolari a valle del corpo.

- Sperimentalmente risulta:

$$|\vec{D}| = D = -\frac{1}{2} C \rho A v^2$$

*Forza di resistenza  
aerodinamica*

- Dove
  - $C$  è il coefficiente di resistenza del mezzo o coefficiente di resistenza aerodinamica (o brevemente coefficiente aerodinamico) [0.4÷1.0]
  - $\rho$  è la densità (massa volumica) dell'aria
  - $A$  area efficace perpendicolare a  $v$



## Resistenza aerodinamica

$$D = \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

*Forza di resistenza aerodinamica*

- Gli sciatori sanno bene che, per diminuire la resistenza aerodinamica, devono diminuire l'area efficace  $A$  (non potendo, ovviamente far nulla su  $v^2$ ) con la classica posizione a "uovo" e caschi aerodinamici



## Concetto di velocità limite

- A lato è mostrato un corpo in caduta libera in un mezzo (l'aria) a causa della sola forza di gravità.
- L'intensità della Forza di resistenza aerodinamica aumenta con la velocità  $v$ .

$$D = \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

- Da

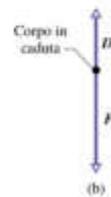
$$F_{net,y} = m a_y$$

- Si ottiene

$$D - F_g = m a_y$$



(a)



(b)



(c)



## Concetto di velocità limite

- Se il corpo cade per un tempo sufficientemente lungo, l'intensità  $D$  della forza "frenante" può raggiungere il valore di  $F_g$

$$D \approx F_g \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ v = \text{cost} = v_{LIM} \end{cases}$$



- La **velocità limite** (detta anche di saturazione) risulta, quindi:

$$D - F_g = ma_y = 0$$

$$\frac{1}{2} C \rho A v^2 - mg = 0 \Rightarrow v_{LIM} = \sqrt{\frac{2mg}{C \rho A}}$$



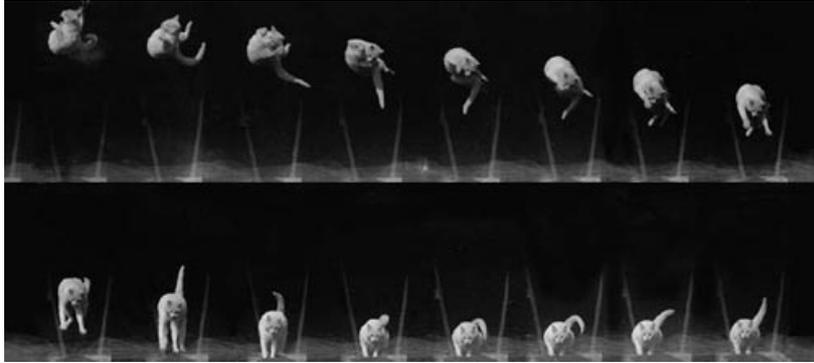
## Cosa fa il gatto?

$$v_{LIM} = \sqrt{\frac{2mg}{C \rho A}}$$

- Il nostro corpo è un **accelerometro**, non un **tachimetro**.
- Anche il gatto percepisce l'accelerazione, si spaventa e raccoglie le zampe sotto il corpo, ritraendo testa e collo fra le spalle e inarcando la spina dorsale verso l'alto.
- In tal modo  $A$  diminuisce, facendo aumentare  $v_{LIM}$  e rendendo più grave il rischio di farsi male all'atterraggio.



## La rotazione del gatto

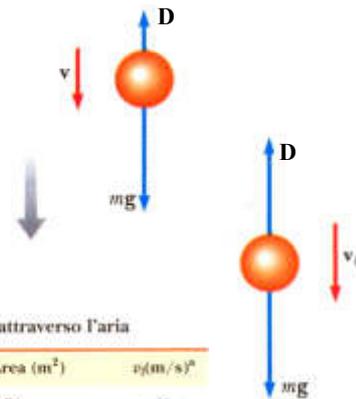


## Alcuni valori di velocità limite

$$v_{LIM} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}$$

- Supponiamo che l'oggetto in caduta libera nell'aria sia una sfera di raggio  $r$ .

$$\left. \begin{array}{l} A \propto r^2 \\ m \propto r^3 \end{array} \right\} \Rightarrow v_{LIM} \propto \sqrt{r}$$



Velocità limite per vari oggetti che cadono attraverso l'aria

Oggetto	Massa (kg)	Area (m <sup>2</sup> )	$v_f$ (m/s) <sup>2</sup>
Paracadutista	75.0	0.70	60
Palla da baseball (raggio 3.7 cm)	0.145	$4.2 \times 10^{-3}$	33
Palla da golf (raggio 2.1 cm)	0.046	$1.4 \times 10^{-3}$	32
Chicco di grandine (raggio 0.50 cm)	$4.8 \times 10^{-4}$	$7.9 \times 10^{-5}$	14
Goccia di pioggia (raggio 0.20 cm)	$3.4 \times 10^{-5}$	$1.3 \times 10^{-3}$	9



## Alcuni valori di velocità limite

$$v_{LIM} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}$$

Oggetto	Velocità limite (m/s)	Distanza di regime* (m)
Proiettile (dallo sparo)	145	2500
Paracadutista in caduta libera (tipico)	60	430
Palla da baseball	42	210
Palla da tennis	31	115
Palla da pallacanestro	20	47
Pallina da ping pong	9	10
Goccia di pioggia (raggio = 1.5 mm)	7	6
Paracadutista con paracadute (tipico)	5	3

\* Distanza attraverso la quale il corpo deve cadere da fermo per raggiungere il 95% della velocità limite.  
Fonte: Adattamento da Brancazio P.J., *Sport Science*, Simon & Schuster, New York 1984.



## Esempio

- Una goccia di pioggia con raggio  $R=1.5\text{ mm}$  cade da una nuvola che si trova ad un'altezza di  $1200\text{ m}$  sopra il terreno.
- Il coefficiente aerodinamico è  $C=0.60$ .
- Ipotizziamo che la goccia sia sferica e rimanga tale durante la caduta.

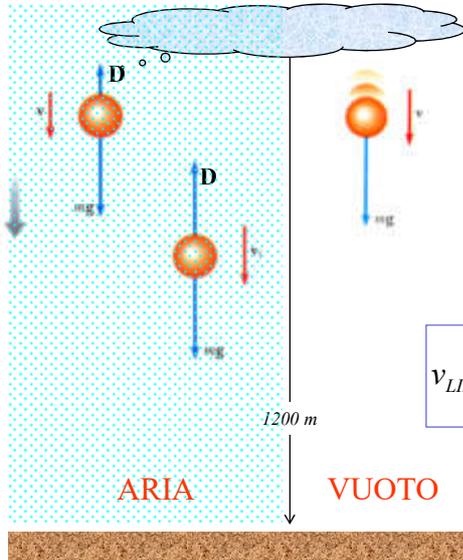
$$\rho_{WATER} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{AIR} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- *Qual è la velocità limite della goccia?*
- *Quale sarebbe la velocità della goccia un attimo prima di toccare il suolo se cadesse nel vuoto (in assenza di aria)?*



## Esempio



**In ARIA**

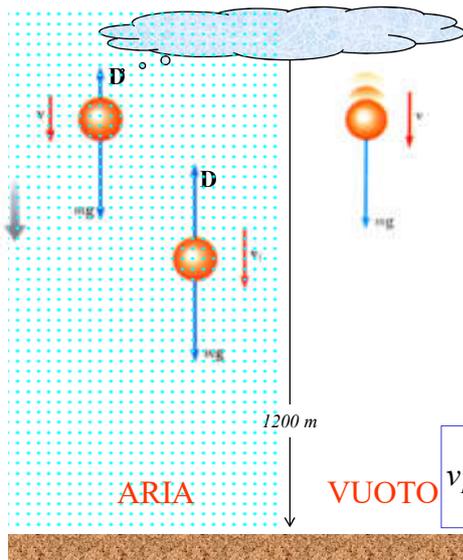
$$Area = A = \pi R^2$$

$$F_g = mg = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho_{WATER}g$$

$$v_{LIM} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_{AIR}A}} = 7.4 \text{ m/s} \quad [27 \text{ km/h}]$$



## Esempio



**Nel VUOTO**

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$v_0 = 0$$

$$a = g$$

$$h = x - x_0$$

$$v = \sqrt{2gh} = 153 \text{ m/s} \quad [550 \text{ km/h}]$$

$$v_{LIM} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_{AIR}A}} = 7.4 \text{ m/s} \quad [27 \text{ km/h}]$$

