

Vettori ed algebra vettoriale

Corso di Fisica
A.A. 2024-2025



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

1

Sommario

- Grandezze scalari e vettoriali
- Definizione di vettore
 - Vettore Spostamento
- Operazioni sui vettori
 - Scomposizione di un vettore
 - Somma e differenza di vettori (metodo grafico ed analitico)
- Proprietà dei vettori
- Impiego dei versori
- Prodotto di vettori
 - Prodotto di un vettore per uno scalare
 - Prodotto scalare
 - Prodotto vettoriale
- Concetto di Gradiente
- Flusso di un vettore



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

2

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

- Spesso non è sufficiente un **numero** (*rapporto tra la grandezza data e quella campione scelta come unità di misura*) per caratterizzare una grandezza fisica misurata.
 - Esempio: spostamento
 - dire a una persona di spostarsi di 3 metri non indicherebbe alla stessa dove andare, non essendo stati specificati una direzione e un verso.
 - Esempio: velocità.
 - Affermare che un oggetto si muove a 50 km/ora non è un'informazione completa poiché non contiene indicazioni sulla direzione e il verso della velocità stessa.
- Per caratterizzare alcune grandezze fisiche è necessario quindi utilizzare “**enti matematici**” più complessi dei semplici numeri.



Grandezze scalari

- Definiamo grandezze scalari quelle grandezze che, stabilita una unità di misura, siano completamente caratterizzate da un numero che rappresenta il rapporto tra la grandezza considerata e l'unità di misura.
- Grandezze scalari:
 - *Pressione*
 - *Lavoro*
 - *Energia*
 - *Massa*
 - *Tempo*
 - *Temperatura*
 - *Viscosità*
 - ...
- Per nessuna di queste è necessario individuare una “direzione” nello spazio ma solo, ed esclusivamente, un “*valore numerico*”



Introduzione

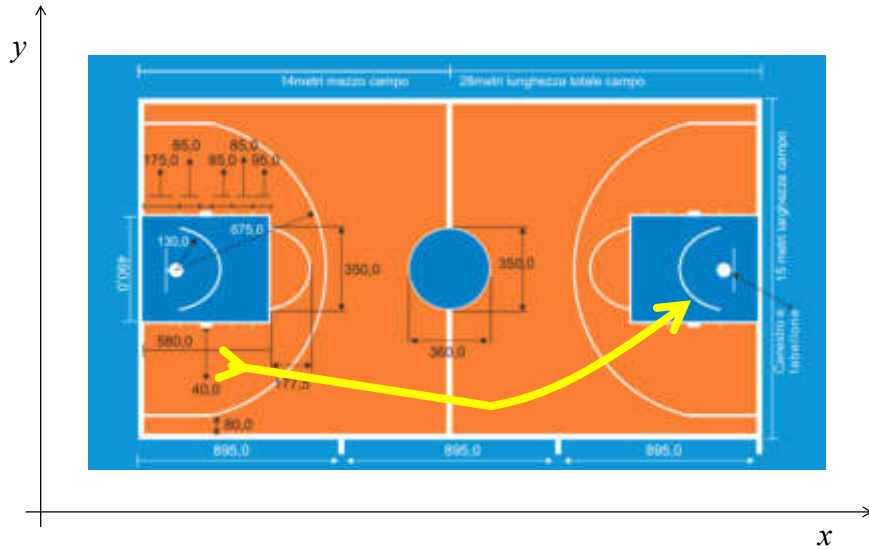
- Nella Fisica trattiamo differenti grandezze:
 - **Grandezze adimensionali:**
 - *Numero puro*
 - *Rapporto*
 - *Percentuale*
 - **Grandezze scalari:**
 - *Temperatura*
 - *Massa*
 - ...
 - **Grandezze vettoriali**
 - *Spostamento*
 - *Velocità*
 - *Accelerazione*
 - *Forza*
 - ...
- Queste ultime necessitano di un nuovo linguaggio e dell'analisi vettoriale



Spostamento su 1 dimensione



Spostamento su 2 dimensioni



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

7

Spostamento su 3 dimensioni

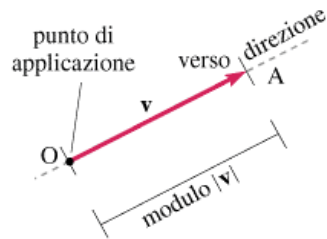


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

9

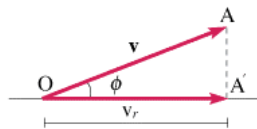
Definizione di “vettore”

- Un **vettore** è un ente individuato da
 - un'intensità, o *ampiezza* o modulo,
 - da una *direzione*, cioè da una linea retta lungo la quale agisce, e
 - da un *verso*, cioè da uno dei due sensi possibili lungo la retta
- Una **grandezza vettoriale** è una grandezza che si può rappresentare con un vettore
- Grandezze vettoriali
 - *Spostamento*
 - *Velocità*
 - *Accelerazione*
 - *Forza*
 -



Componente di un vettore.

- La componente di un vettore è la sua proiezione su un asse;

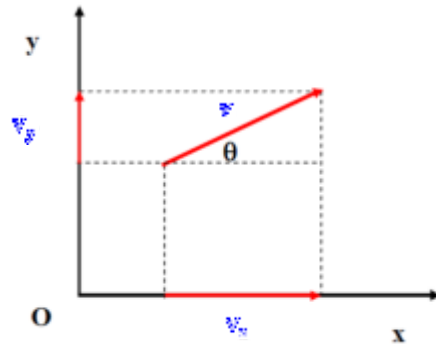


$$v_x = v \cos \phi$$



Scomposizione di un vettore a 2 dimensioni

- Il concetto di componente di un vettore può essere impiegato per rappresentare il vettore in un sistema di assi cartesiani (x,y)



$$v_x = v \cos \theta$$

$$v_y = v \sin \theta$$

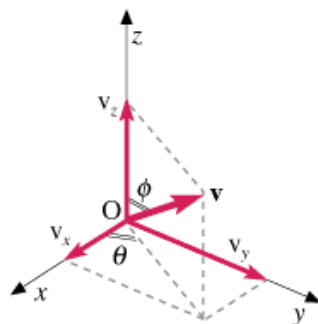
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v \sin \theta}{v \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$



Scomposizione di un vettore a 3 dimensioni

- Il concetto di componente di un vettore può essere impiegato per rappresentare il vettore in un sistema di assi cartesiani (x,y,z)



$$v_x = v \cos \theta \sin \phi$$

$$v_y = v \sin \theta \sin \phi$$

$$v_z = v \cos \phi$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



Radianti

- Gli angoli misurati rispetto all'asse x , a partire dalla semiretta positiva, sono positivi se vengono misurati in senso antiorario, e negativi se sono misurati in senso orario.
- Per esempio 210° e -150° sono angoli che individuano la stessa direzione.



- Gli angoli si possono misurare in gradi o in radianti (rad). Si possono confrontare le due misure ricordando che un angolo giro equivale a 360° e a $2\pi rad$.
- Così, se fosse necessario, per esempio, convertire 40° in radianti, si può scrivere

$$40^\circ \frac{2\pi rad}{360^\circ} = 0.70 rad$$

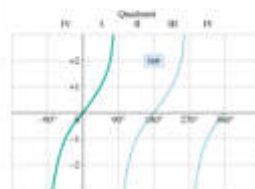
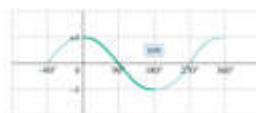
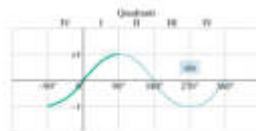
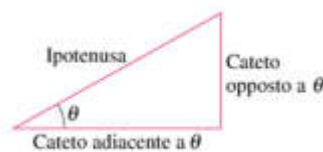


Funzioni trigonometriche

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

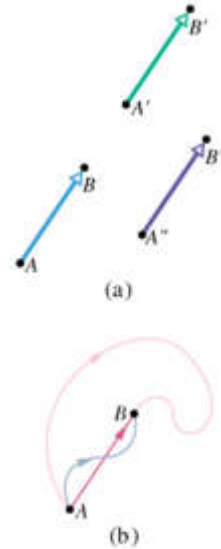
$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{cateto adiacente a } \theta}$$



Vettore Spostamento

- Le frecce da A a B, da A' a B' e da A'' a B'' hanno uguale modulo, direzione e verso.
- Esse rappresentano un uguale **spostamento** (stesso cambiamento di posizione per la particella)
- Traslando un vettore non si modifica il suo valore, se non variano il suo modulo, la sua direzione e il suo verso.



Vettore Spostamento

- Il vettore spostamento non ci dice nulla sull'effettivo itinerario che la particella percorre.

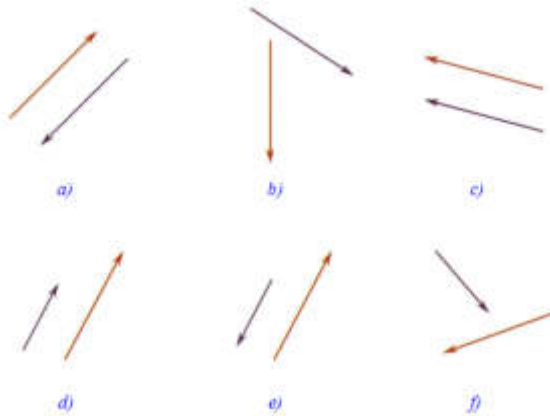


- I vettori spostamento rappresentano soltanto alcuni aspetti globali del moto, non il moto in sé.



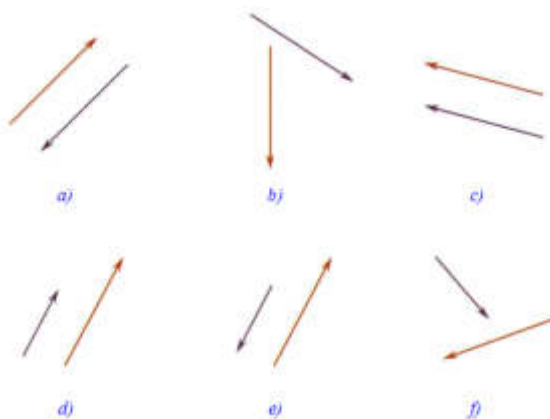
Test n. 1

- Quale coppia di vettori ha in comune solo il modulo?



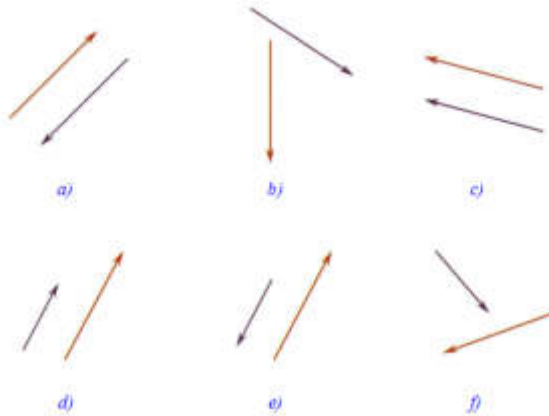
Test n.2

- Quale coppia di vettori ha in comune solo direzione e verso?



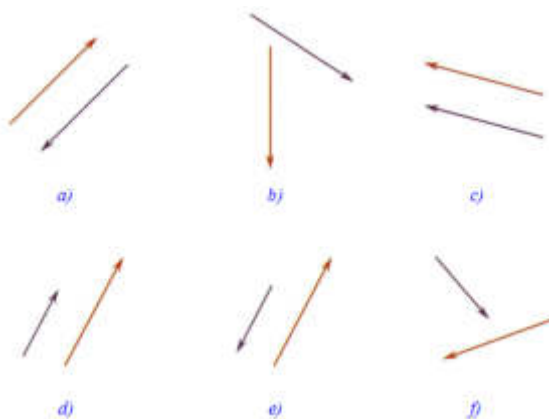
Test n.3

- Quale coppia di vettori non ha in comune alcuna caratteristica?



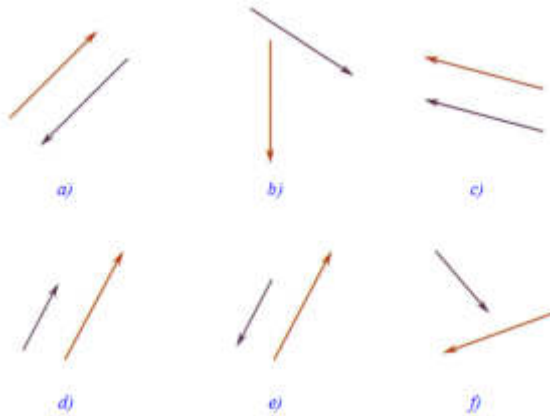
Test n.4

- Quale coppia di vettori ha in comune direzione e modulo?



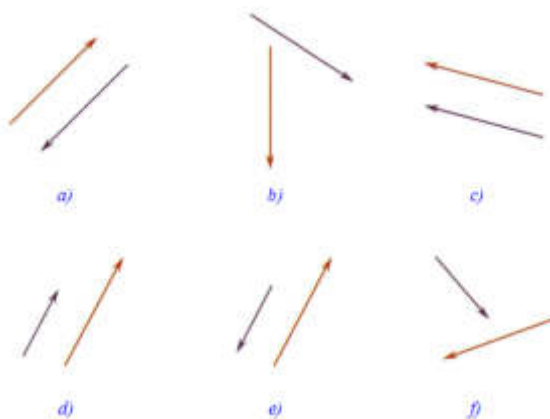
Test n.5

- Quale coppia di vettori ha in comune la sola direzione?



Test n.6

- Quale coppia di vettori ha in comune direzione, modulo e verso?



Somma di vettori

- Lo spostamento composto ($A \rightarrow B \rightarrow C$) può essere rappresentato senza tener conto del percorso effettivo:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\boxed{\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}} \quad \text{Somma vettoriale}$$

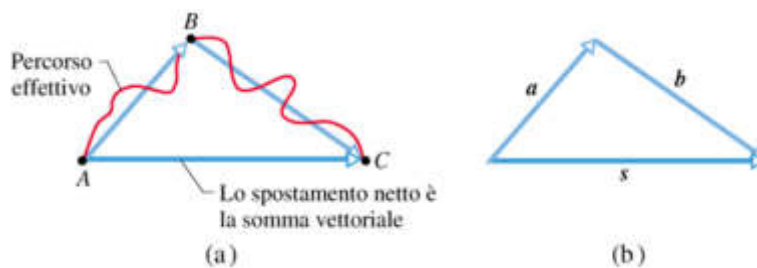


Somma di vettori (metodo grafico)

- Lo spostamento composto ($A \rightarrow B \rightarrow C$) può essere rappresentato senza tener conto del percorso effettivo:

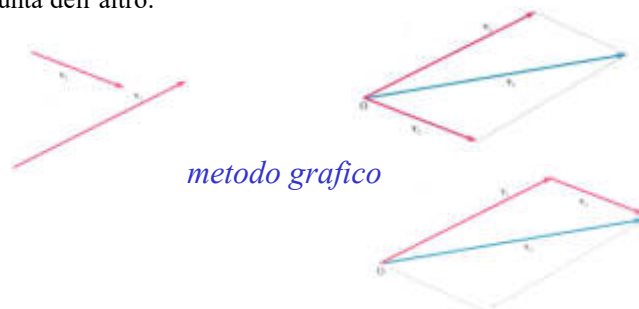
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\boxed{\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}} \quad \text{Somma vettoriale}$$



Somma di vettori (metodo grafico)

- Consideriamo due vettori aventi lo stesso punto di applicazione (origine).
- Se i vettori non hanno la stessa origine, uno di essi (o entrambi) verrà trasportato parallelamente a se stesso fino a che le origini coincidano.
- Se i vettori non hanno la stessa origine, uno di essi (o entrambi) verrà trasportato parallelamente a se stesso fino a che la coda di uno coincida con la punta dell'altro.

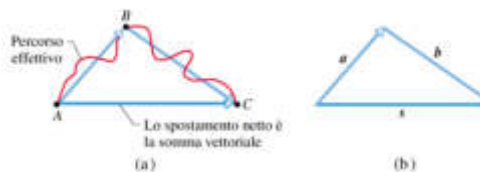


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

35

Metodo di somma grafico

- Il procedimento per sommare graficamente due vettori **a** e **b** è suggerito nella figura:
 1. Si traccia su un foglio il vettore **a** in una scala comoda e alla sua giusta inclinazione;
 2. Si traccia il vettore **b** nella stessa scala con la sua inclinazione e con la coda coincidente con la punta del vettore **a**;
 3. la somma vettoriale **s** si costruisce tracciando una freccia dalla coda di **a** alla punta di **b**.

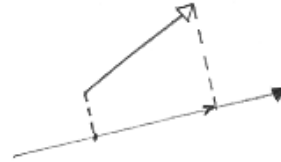


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

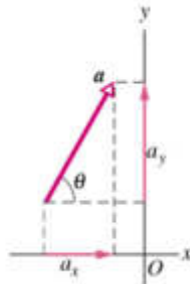
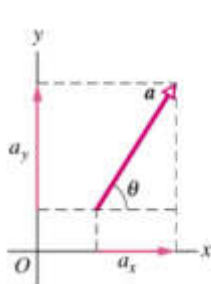
37

Metodo di somma per componenti

- **DEF:** *Componente di un vettore è la sua proiezione su un asse*

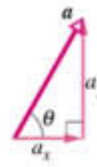


- Scomposizione di un vettore:



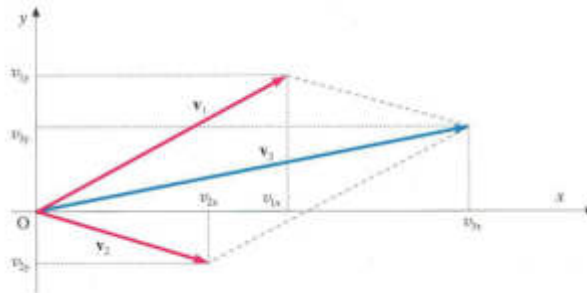
$$a_x = |\vec{a}| \cos \theta = a \cos \theta$$

$$a_y = |\vec{a}| \sin \theta = a \sin \theta$$



Somma di vettori (metodo analitico)

- La somma vettoriale si può eseguire anche tramite le componenti dei vettori rispetto ad un determinato sistema di riferimento

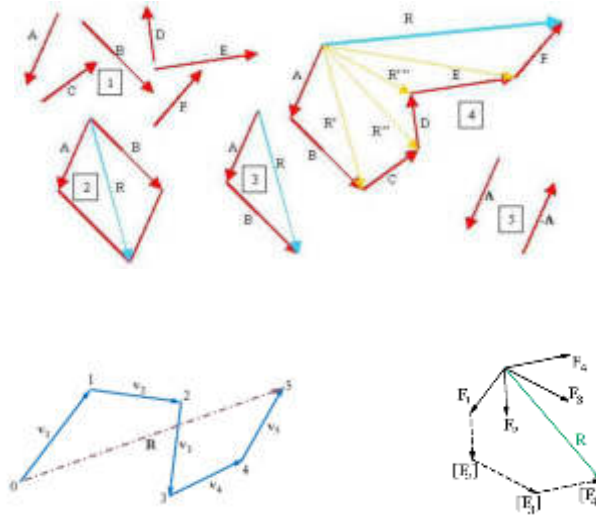


metodo analitico

$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} + v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} + v_{2y} \\ v_{3z} = v_{1z} + v_{2z} \end{cases}$$

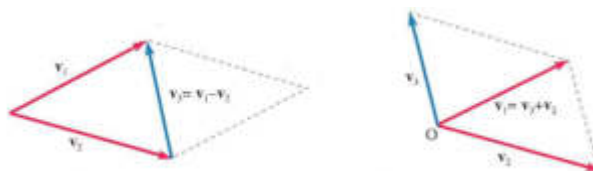


Somma di più vettori



Differenza di due vettori (metodo grafico)

- La differenza tra i vettori v_1 e v_2 è data dal vettore v_3 che, sommato a v_2 fornisce il vettore v_1 : $v_1 - v_2 = v_3$ e quindi $v_3 + v_2 = v_1$
- Il vettore differenza è rappresentato dall'altra diagonale del parallelogramma di lati v_1 e v_2



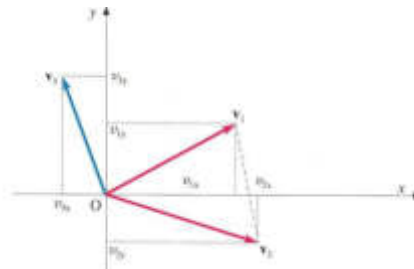
metodo grafico



Differenza di due vettori (metodo analitico)

- Operando sulle componenti si può eseguire la differenza di due vettori prendendo semplicemente la differenza delle componenti corrispondenti (si introduce un segno meno al posto della somma).

$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} - v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} - v_{2y} \\ v_{3z} = v_{1z} - v_{2z} \end{cases}$$



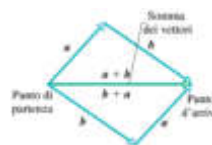
metodo analitico



Proprietà dei vettori

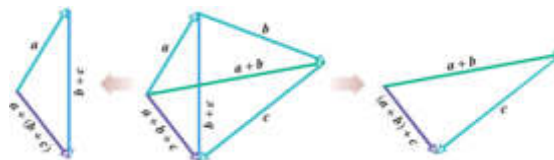
- Proprietà commutativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



- Proprietà associativa

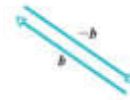
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



Proprietà dei vettori

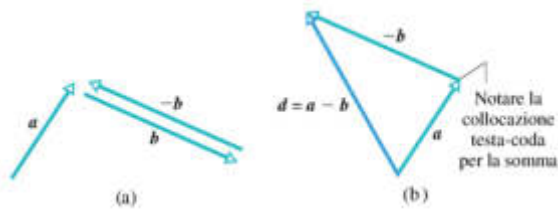
- Esistenza del vettore opposto

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$$



- Sottrazione di vettori

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Proprietà dei vettori

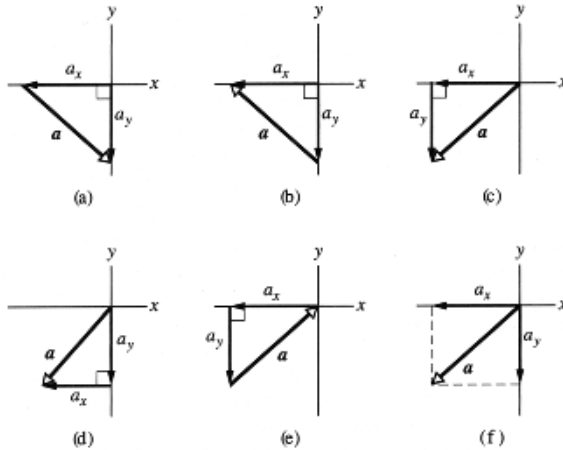
- Manipolazioni algebriche:

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a} \quad \text{oppure} \quad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}$$



Test

- Quali, tra i metodi indicati per combinare le componenti x e y del vettore **a**, sono appropriati per individuare il vettore stesso?



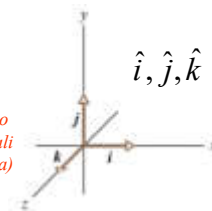
Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

49

Versori

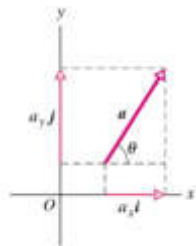
- DEF:** *Versore* (vettore unitario) è un vettore di lunghezza unitaria (modulo = 1), disposto in una particolare direzione

Sistema destrorso
di coordinate ortogonali
(mano destra)



$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

55

Addizione di vettori

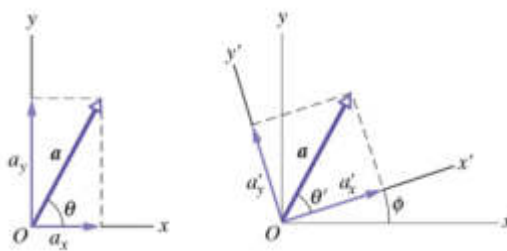
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} s_x = a_x + b_x \\ s_y = a_y + b_y \\ s_z = a_z + b_z \end{cases} \quad \begin{aligned} \vec{s} &= (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k} \\ \vec{s} &= s_x\hat{i} + s_y\hat{j} + s_z\hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} =$$

$$\vec{a} + (-\vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} d_x = a_x - b_x \\ d_y = a_y - b_y \\ d_z = a_z - b_z \end{cases} \quad \begin{aligned} \vec{d} &= (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k} \\ \vec{d} &= d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k} \end{aligned}$$



Rotazione degli assi



$$a = \text{cost} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a'^2_x + a'^2_y}$$

$$\theta = \theta' + \phi$$



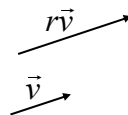
Prodotto di vettori

- L'algebra vettoriale presenta tra modi per l'operazione di moltiplicazione con i vettori:
 - Prodotto di un vettore per uno scalare
 - Prodotto scalare
 - Prodotto vettoriale

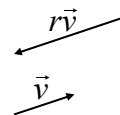


Prodotto di un vettore per uno scalare

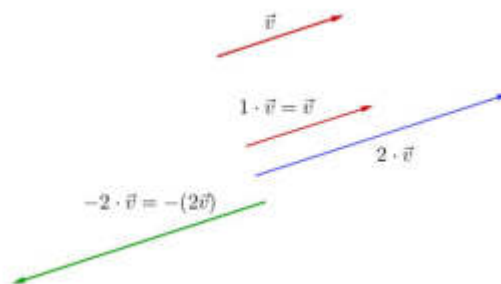
$$r\vec{v} \rightarrow |r\vec{v}| = |r| |\vec{v}|$$



$$r > 0$$



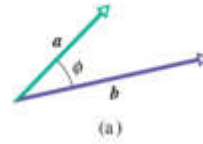
$$r < 0$$



Prodotto scalare

- Definizione

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi$$



- Proprietà commutativa

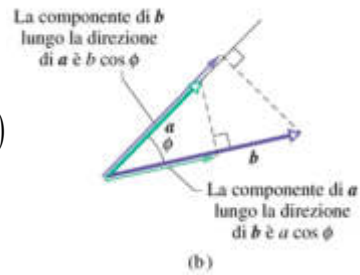
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Proprietà distributiva

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$



Proprietà commutativa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = & (a_x b_x) \hat{i} \cdot \hat{i} + (a_x b_y) \hat{i} \cdot \hat{j} + (a_x b_z) \hat{i} \cdot \hat{k} + \\ & (a_y b_x) \hat{j} \cdot \hat{i} + (a_y b_y) \hat{j} \cdot \hat{j} + (a_y b_z) \hat{j} \cdot \hat{k} + \\ & (a_z b_x) \hat{k} \cdot \hat{i} + (a_z b_y) \hat{k} \cdot \hat{j} + (a_z b_z) \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$



Prodotto vettoriale

- Definizione

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \phi$$

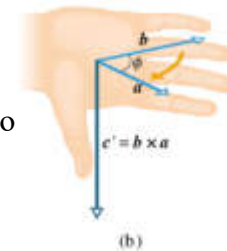
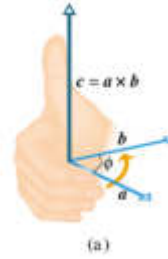
- Componenti

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}$$

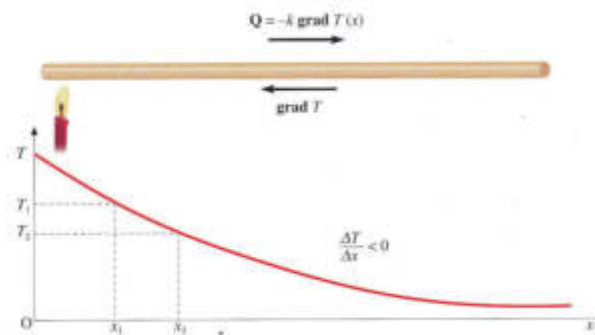
- Il prodotto vettoriale NON é commutativo

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$



Gradiente vettoriale

- Consideriamo una funzione $f(x)$.
- Ipotizziamo, giusto per esempio, che $f(x)$ rappresenti l'andamento della temperatura lungo un filo metallico rettilineo: la direzione del filo fornisce l'asse x .



Gradiente vettoriale

- Se vogliamo descrivere la variazione (aumento o diminuzione) della grandezza $f(x)$ lungo la coordinata x , dobbiamo definire:
 - L'entità della variazione stessa,
 - la direzione e
 - il verso.
- Dobbiamo, quindi, associare un vettore alla variazione di $f(x)$



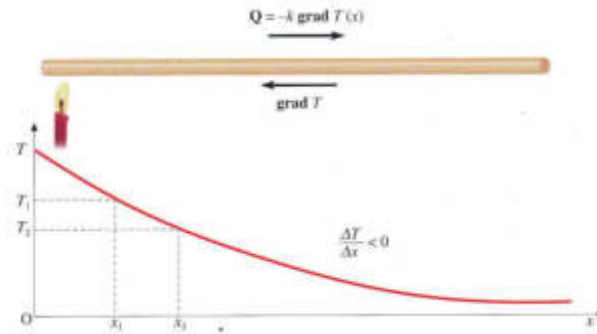
Gradiente vettoriale

- Definiamo **gradiente della funzione scalare** $f(x)$ il vettore \mathbf{v}
 - il cui **modulo** è dato dalla derivata di $f(x)$ rispetto ad x
 - la **direzione** è quella dell'asse x e
 - il **verso** quello per cui il rapporto incrementale risulta positivo:

$$\vec{v} = \overline{\text{grad}} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{modulo: } \frac{df(x)}{dx} \\ \text{direzione: } \text{asse } x \\ \text{verso: } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \end{array} \right.$$



Caso del filo di rame



- Il calore Q si diffonde seguendo la legge:

$$Q = k \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x} \rightarrow \vec{Q} = -k \overline{\text{grad } T(x)}$$



Gradiente vettoriale di $f(x,y,z)$

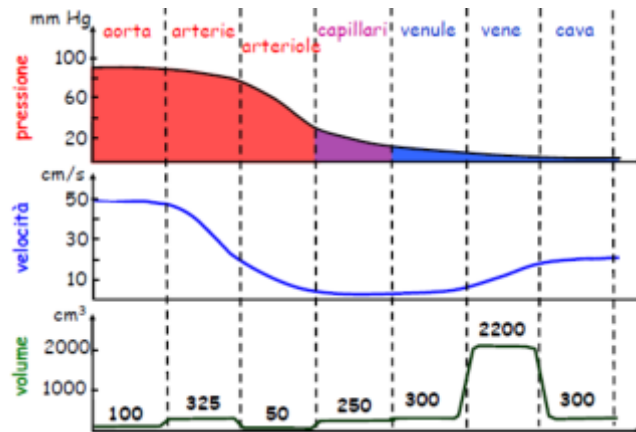
- Più in generale una grandezza fisica scalare può variare da punto a punto nello spazio (ad esempio la temperatura in un ambiente) ed essere rappresentata da una funzione $f(x,y,z)$ dipendente da tre variabili indipendenti. In questo caso il vettore gradiente è definito tramite le derivate lungo i tre assi x , y e z (che si chiamano “derivate parziali”):

$$\vec{v} = \overline{\text{grad } f(x, y, z)} \begin{cases} v_x = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ v_z = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{cases}$$



Gradiente vettoriale

- In modo analogo $f(x)$ può rappresentare i valori della pressione lungo un vaso sanguigno.

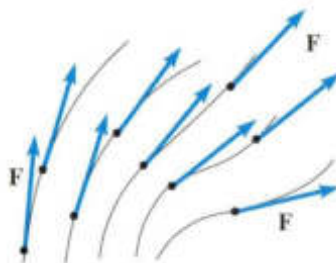


Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

71

Digressione sul flusso

- Si consideri una regione dello spazio in ogni punto della quale è definibile un vettore F : tale regione è chiamata **campo vettoriale**.
- Si chiamano linee di forza del vettore F le linee tangenti punto per punto alla direzione del vettore F



Fisica (BIO+FARM), A.A. 2024-2025
Prof. Nicola Cavallo

74

Digressione sul flusso

- In un campo vettoriale \mathbf{F} si prenda una superficie S_i divisa in tante areole su ognuna delle quali sia talmente piccola da potersi considerare piana.
- Sia \mathbf{F}_i il vettore al centro dell'areola S_i
- Si definisce **flusso del vettore \mathbf{F}** attraverso la superficie orientata S_i il prodotto scalare:

$$\Phi_i = \vec{F}_i \cdot S_i \hat{n} = F_i S_i \cos \alpha_i$$

