Lezione 1: I numeri reali

Francesco Esposito
f.esposito@unibas.it

Universitá degli Studi della Basilicata

a.a. 2023-2024

Schema della lezione

Sia S un insieme di qualsiasi natura. Indichiamo con i simboli

$$x \in S$$

l'appartenenza di un elemento x all'insieme S (ossia x è un elmento di S). Se un elemento x **non** appartiene a S, scriviamo

$$x \notin S\,.$$

Sia S un insieme di qualsiasi natura. Indichiamo con i simboli

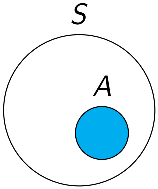
$$x \in S$$

l'appartenenza di un elemento x all'insieme S (ossia x è un elmento di S). Se un elemento x **non** appartiene a S, scriviamo

$$x \notin S\,.$$

Se A è un altro insieme tale che **ogni elemento** di A appartiene ad S, allora A è un sottoinsieme di S e scriviamo

$$A \subset S\,.$$

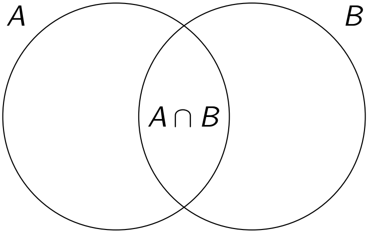


L'insieme privo di elementi è detto **insieme vuoto** e si indica col simbolo $\emptyset$. Si noti che per ogni insieme A, $\emptyset \subset A$.

L'insieme privo di elementi è detto **insieme vuoto** e si indica col simbolo $\emptyset$. Si noti che per ogni insieme A, $\emptyset \subset A$.

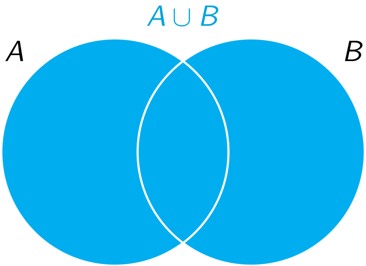
Siano A e B due insiemi, $A, B \subset S$.
L'**intersezione** di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{x \in S \text{ tali che } x \in A \text{ e } x \in B\}$$



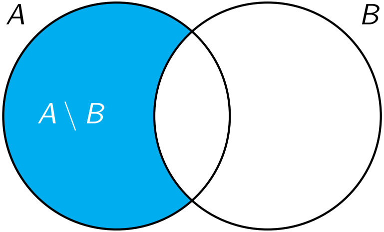
L'**unione** di A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x \in S \text{ tali che } x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$



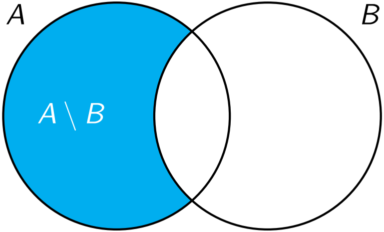
La **differenza (insiemistica)** di A e B è l'insieme

$$A \setminus B = \{x \in S \text{ tali che } x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



La **differenza (insiemistica)** di A e B è l'insieme

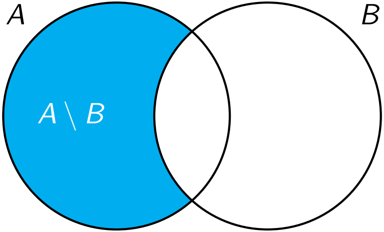
$$A \setminus B = \{x \in S \text{ tali che } x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



In particolare se $A = S$ allora $B^c = S \setminus B$ è detto il **complementare** di B in S.

La **differenza (insiemistica)** di A e B è l'insieme

$$A \setminus B = \{x \in S \text{ tali che } x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



In particolare se $A = S$ allora $B^c = S \setminus B$ è detto il **complementare** di B in S.
Infine, il **prodotto cartesiano** di A e B è l'insieme delle coppie ordinate

$$A \times B = \{(a, b) \text{ tali che } a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Schema della lezione

Consideriamo gli insiemi numerici e le usuali operazioni aritmetiche (somma e prodotto, sottrazione e divisione). Abbiamo

- i numeri naturali: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Consideriamo gli insiemi numerici e le usuali operazioni aritmetiche (somma e prodotto, sottrazione e divisione). Abbiamo

- i numeri naturali: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Pb: La differenza di due numeri naturali non sempre è un numero naturale

Consideriamo gli insiemi numerici e le usuali operazioni aritmetiche (somma e prodotto, sottrazione e divisione). Abbiamo

- i numeri naturali: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Pb: La differenza di due numeri naturali non sempre è un numero naturale

- i numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Consideriamo gli insiemi numerici e le usuali operazioni aritmetiche (somma e prodotto, sottrazione e divisione). Abbiamo

- i numeri naturali: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Pb: La differenza di due numeri naturali non sempre è un numero naturale

- i numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Pb: Il quoziente di due numeri interi non sempre è un numero intero

Consideriamo gli insiemi numerici e le usuali operazioni aritmetiche (somma e prodotto, sottrazione e divisione). Abbiamo

- i numeri naturali: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Pb: La differenza di due numeri naturali non sempre è un numero naturale

- i numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Pb: Il quoziente di due numeri interi non sempre è un numero intero

- i numeri razionali: $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{n}{m} \text{ tali che } n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

Consideriamo gli insiemi numerici e le usuali operazioni aritmetiche (somma e prodotto, sottrazione e divisione). Abbiamo

- i numeri naturali: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Pb: La differenza di due numeri naturali non sempre è un numero naturale

- i numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

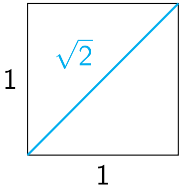
Pb: Il quoziente di due numeri interi non sempre è un numero intero

- i numeri razionali: $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{n}{m} \text{ tali che } n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

Pb: Si incontrano numeri che non sono razionali.

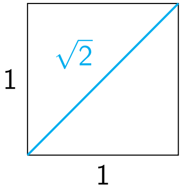
Un numero non razionale

Consideriamo un quadrato di lato 1. Le diagonali misurano $\sqrt{2}$.



Un numero non razionale

Consideriamo un quadrato di lato 1. Le diagonali misurano $\sqrt{2}$.



Proposizione

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione:

Dimostriamo la precedente proposizione **per assurdo** (neghiamo la tesi e tramite implicazioni logiche giungiamo ad una contraddizione).

Dimostrazione:

Dimostriamo la precedente proposizione **per assurdo** (neghiamo la tesi e tramite implicazioni logiche giungiamo ad una contraddizione).

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Quindi possiamo scriverla nella forma:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

per qualche $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Semplificando la frazione possiamo anche supporre che n, m siano positivi e **non entrambi pari**.

Dimostrazione:

Dimostriamo la precedente proposizione **per assurdo** (neghiamo la tesi e tramite implicazioni logiche giungiamo ad una contraddizione).

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Quindi possiamo scriverla nella forma:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

per qualche $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Semplificando la frazione possiamo anche supporre che n, m siano positivi e **non entrambi pari**.
Quindi:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{n^2}{m^2} \quad \Rightarrow \quad 2m^2 = n^2 \, .$$

Quindi n^2 è un numero pari. Poiché il quadrato di un numero dispari è dispari, allora anche n **è pari** (altrimenti n^2 sarebbe dispari) e cos possiamo scrivere $n = 2k$ per qualche numero intero positivo k.

Quindi n^2 è un numero pari. Poiché il quadrato di un numero dispari è dispari, allora anche n **è pari** (altrimenti n^2 sarebbe dispari) e cos possiamo scrivere $n = 2k$ per qualche numero intero positivo k.

Pertanto:

$$2m^2 = n^2 = 4k^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2k^2 \,.$$

Ma quindi anche m^2 è pari e per lo stesso ragionamento di prima m è pari.

Quindi n^2 è un numero pari. Poiché il quadrato di un numero dispari è dispari, allora anche n **è pari** (altrimenti n^2 sarebbe dispari) e cos possiamo scrivere $n = 2k$ per qualche numero intero positivo k.

Pertanto:

$$2m^2 = n^2 = 4k^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2k^2 \, .$$

Ma quindi anche m^2 è pari e per lo stesso ragionamento di prima m è pari.

Quindi abbiamo dimostrato che sia n ed m sono pari ma eravamo partiti dall'assunzione che non fossero **entrambi** pari. Siamo pertanto giunti ad una contraddizione, causata dall'aver supposto che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Pertanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. C.v.d.

Insiemi numerici

Altri numeri "famosi" che non sono razionali: pi greco π, il numero di Nepero e.
Occorre pertanto ampliare l'insieme dei numeri razionali con un insieme più grande:

$$\mathbb{N} \quad \subset \quad \mathbb{Z} \quad \subset \quad \mathbb{Q} \quad \subset \quad \mathbb{R} \quad [\subset \mathbb{C}]$$

L'insieme $\mathbb{R}$ dei **numeri reali** è sufficientemente ricco e sará l'insieme con cui lavoreremo.

Schema della lezione

Assiomi relativi alle operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

Assiomi relativi alle operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1. **proprietà rassociativa:**

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Assiomi relativi alle operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1. **proprietà rassociativa:**

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. **proprietà commutativa:** $a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$

Assiomi relativi alle operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1. **proprietà rassociativa:**

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. **proprietà commutativa:** $a+b = b+a \qquad a \cdot b = b \cdot a$
3. **proprietà distributiva:** $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Assiomi relativi alle operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1. **proprietà rassociativa:**

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2. **proprietà commutativa:** $a+b=b+a \qquad a \cdot b = b \cdot a$
3. **proprietà distributiva:** $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
4. **esistenza degli elementi neutri**
   4.1. 0 per l'addizione: $a+0=a$
   4.2. 1 per la moltiplicazione: $a \cdot 1 = a$

5. **esistenza degli opposti:** per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico elemento $-a \in \mathbb{R}$ detto **opposto** tale che

$$a + (-a) = 0$$

5. **esistenza degli opposti:** per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico elemento $-a \in \mathbb{R}$ detto **opposto** tale che

$$a + (-a) = 0$$

6. **esistenza degli inversi:** per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ esiste un unico elemento $a^{-1} \left(= \frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}$ detto **inverso** tale che $a \cdot a^{-1} = 1$

Assiomi relativi all'ordinamento

In $\mathbb{R}$ è presente anche una relazione d'ordine, **minore o uguale** $\leq$, che soddisfa le seguenti proprietà: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

Assiomi relativi all'ordinamento

In $\mathbb{R}$ è presente anche una relazione d'ordine, **minore o uguale** $\leq$, che soddisfa le seguenti proprietà: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

7. o $a \leq b$ o $b \leq a$

Assiomi relativi all'ordinamento

In $\mathbb{R}$ è presente anche una relazione d'ordine, **minore o uguale** $\leq$, che soddisfa le seguenti proprietà: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

7. o $a \leq b$ o $b \leq a$
8. se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$

Assiomi relativi all'ordinamento

In $\mathbb{R}$ è presente anche una relazione d'ordine, **minore o uguale** $\leq$, che soddisfa le seguenti proprietà: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

7. o $a \leq b$ o $b \leq a$
8. se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$
9. se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $a + c \leq b + c$

Assiomi relativi all'ordinamento

In $\mathbb{R}$ è presente anche una relazione d'ordine, **minore o uguale** $\leq$, che soddisfa le seguenti proprietà: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

7. o $a \leq b$ o $b \leq a$
8. se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$
9. se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $a + c \leq b + c$
10. se $0 \leq a$, $0 \leq b$, allora $0 \leq a + b$ e $0 \leq a \cdot b$

Assiomi relativi all'ordinamento

In $\mathbb{R}$ è presente anche una relazione d'ordine, **minore o uguale** $\leq$, che soddisfa le seguenti proprietà: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

7. o $a \leq b$ o $b \leq a$
8. se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$
9. se $a \leq b$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $a + c \leq b + c$
10. se $0 \leq a$, $0 \leq b$, allora $0 \leq a + b$ e $0 \leq a \cdot b$

Analoghe proprietà valgono per la relazione d'ordine di **maggiore o uguale** $\geq$.

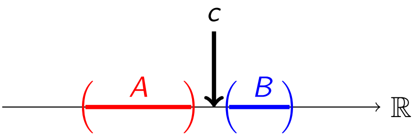
Assioma della completezza

La novità introdotta dai numeri reali è il cosiddetto **assiome della completezza**:

11. Siano A e B due insiemi di numeri reali (non vuoti), tali che per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ vale che $a \leq b$. Allora esiste almeno un elemento c tale che

$$a \leq c \leq b$$

per ogni $a \in A$ e $b \in B$.



Vediamo alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali:

- vale la **regola della semplificazione della somma**
  $a + b = a + c \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x - 1 = 4y - 1 \Rightarrow 3x = 4y$

Vediamo alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali:

- vale la **regola della semplificazione della somma**
  $a + b = a + c \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x - 1 = 4y - 1 \Rightarrow 3x = 4y$

- vale la **regola della semplificazione della moltiplicazione**
  $a \cdot b = a \cdot c\ , \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x = 6 \Rightarrow x = 2$

Vediamo alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali:

- vale la **regola della semplificazione della somma**
  $a + b = a + c \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x - 1 = 4y - 1 \Rightarrow 3x = 4y$

- vale la **regola della semplificazione della moltiplicazione**
  $a \cdot b = a \cdot c \ , \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x = 6 \Rightarrow x = 2$

- per ogni coppia di numeri reali a, b vale $-(-a) = a$,
  $(-a) \cdot b = -a \cdot b$, $a \cdot (-b) = -a \cdot b$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Vediamo alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali:

- vale la **regola della semplificazione della somma**
  $a + b = a + c \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x - 1 = 4y - 1 \Rightarrow 3x = 4y$

- vale la **regola della semplificazione della moltiplicazione**
  $a \cdot b = a \cdot c\ , \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x = 6 \Rightarrow x = 2$

- per ogni coppia di numeri reali a, b vale $-(-a) = a$, $(-a) \cdot b = -a \cdot b$, $a \cdot (-b) = -a \cdot b$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- $a \leq b$ è equivalente a $a - b \leq 0$

Es. $x - 7 \leq 0 \Rightarrow x \leq 7$, $2y + 3 \geq 0 \Rightarrow 2y \geq -3$

Vediamo alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali:

- vale la **regola della semplificazione della somma**
  $a + b = a + c \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x - 1 = 4y - 1 \Rightarrow 3x = 4y$

- vale la **regola della semplificazione della moltiplicazione**
  $a \cdot b = a \cdot c \ , \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x = 6 \Rightarrow x = 2$

- per ogni coppia di numeri reali a, b vale $-(-a) = a$, $(-a) \cdot b = -a \cdot b$, $a \cdot (-b) = -a \cdot b$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- $a \leq b$ è equivalente a $a - b \leq 0$

Es. $x - 7 \leq 0 \Rightarrow x \leq 7$, $2y + 3 \geq 0 \Rightarrow 2y \geq -3$

- $a \leq b$ e $c \geq 0$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$

Es. $3x \leq 7 \Rightarrow x \leq 7/3$ (moltiplicando a sx e dx per $1/3 \geq 0$)

Vediamo alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali:

- vale la **regola della semplificazione della somma**
  $a + b = a + c \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x - 1 = 4y - 1 \Rightarrow 3x = 4y$

- vale la **regola della semplificazione della moltiplicazione**
  $a \cdot b = a \cdot c\ , \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c$

Es. $3x = 6 \Rightarrow x = 2$

- per ogni coppia di numeri reali a, b vale $-(-a) = a$, $(-a) \cdot b = -a \cdot b$, $a \cdot (-b) = -a \cdot b$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- $a \leq b$ è equivalente a $a - b \leq 0$

Es. $x - 7 \leq 0 \Rightarrow x \leq 7$, $2y + 3 \geq 0 \Rightarrow 2y \geq -3$

- $a \leq b$ e $c \geq 0$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$

Es. $3x \leq 7 \Rightarrow x \leq 7/3$ (moltiplicando a sx e dx per $1/3 \geq 0$)

- $a \leq b$ e $c \leq 0$ allora $a \cdot c \geq b \cdot c$

Es. $-3x \leq 7 \Rightarrow x \geq -7/3$ (moltiplicando a sx e dx per $-1/3 \leq 0$)

Schema della lezione

Massimi e minimi

Sia A un insieme di numeri reali.
Il **massimo** di A (se esiste) è l'elemento M tale che

$$M = \max A \iff \begin{cases} M \geq a & \text{per ogni } a \in A \\ M \in A \end{cases}$$

(ossia l'elemento di A più grande di ogni altro elemento di A).

Massimi e minimi

Sia A un insieme di numeri reali.
Il **massimo** di A (se esiste) è l'elemento M tale che

$$M = \max A \iff \begin{cases} M \geq a & \text{per ogni } a \in A \\ M \in A \end{cases}$$

(ossia l'elemento di A più grande di ogni altro elemento di A).
Analogamente, il **minimo** di A (se esiste) è l'elemento m tale che

$$m = \min A \iff \begin{cases} m \leq a & \text{per ogni } a \in A \\ m \in A \end{cases}$$

(ossia l'elemento di A più piccolo di ogni altro elemento di A).

Massimi e minimi

Sia A un insieme di numeri reali.
Il **massimo** di A (se esiste) è l'elemento M tale che

$$M = \max A \iff \begin{cases} M \geq a & \text{per ogni } a \in A \\ M \in A \end{cases}$$

(ossia l'elemento di A più grande di ogni altro elemento di A).
Analogamente, il **minimo** di A (se esiste) è l'elemento m tale che

$$m = \min A \iff \begin{cases} m \leq a & \text{per ogni } a \in A \\ m \in A \end{cases}$$

(ossia l'elemento di A più piccolo di ogni altro elemento di A).
N B. Non tutti gli insiemi ammettono max e/o min, ma se tali elementi esistono allora essi sono unici.

Es. 1 $A_1 = \{-2, 3, 5, 10\}$, allora $\max A_1 = 10$ e $\min A_1 = -2$

Massimi e minimi

Sia A un insieme di numeri reali.
Il **massimo** di A (se esiste) è l'elemento M tale che

$$M = \max A \iff \begin{cases} M \geq a & \text{per ogni } a \in A \\ M \in A \end{cases}$$

(ossia l'elemento di A più grande di ogni altro elemento di A).
Analogamente, il **minimo** di A (se esiste) è l'elemento m tale che

$$m = \min A \iff \begin{cases} m \leq a & \text{per ogni } a \in A \\ m \in A \end{cases}$$

(ossia l'elemento di A più piccolo di ogni altro elemento di A).
N B. Non tutti gli insiemi ammettono max e/o min, ma se tali elementi esistono allora essi sono unici.

Es. 1 $A_1 = \{-2, 3, 5, 10\}$, allora $\max A_1 = 10$ e $\min A_1 = -2$
Es. 2 $A_2 = [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \leq x \leq 3\}$ allora, $\max A_2 = 3$ e $\min A_2 = -1$.

Maggioranti e minoranti

Es. 3 $A_3 =]-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x \leq 3\}$ allora, $\max A_3 = 3$ ma A_3 non ammette minimo ($-1 \notin A_3$).

Maggioranti e minoranti

Es. 3 $A_3 =]-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x \leq 3\}$ allora, $\max A_3 = 3$ ma A_3 non ammette minimo $(-1 \notin A_3)$.

Un numero $L \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** per l'insieme A se $L \geq a$ per ogni $a \in A$, mentre un numero $l \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** per l'insieme A se $l \leq a$ per ogni $a \in A$.

Maggioranti e minoranti

Es. 3 $A_3 =]-1,3] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x \leq 3\}$ allora, $\max A_3 = 3$ ma A_3 non ammette minimo ($-1 \notin A_3$).

Un numero $L \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** per l'insieme A se $L \geq a$ per ogni $a \in A$, mentre un numero $l \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** per l'insieme A se $l \leq a$ per ogni $a \in A$.

Nell'esempio 3, -1 è un minorante per A_3.

Maggioranti e minoranti

Es. 3 $A_3 =]-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x \leq 3\}$ allora, $\max A_3 = 3$ ma A_3 non ammette minimo ($-1 \notin A_3$).

Un numero $L \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** per l'insieme A se $L \geq a$ per ogni $a \in A$, mentre un numero $l \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** per l'insieme A se $l \leq a$ per ogni $a \in A$.

Nell'esempio 3, -1 è un minorante per A_3.

N. B. Ogni numero più grande di un maggiorante è un maggiornte e ogni numero più piccolo di un minorante è un minorante. Ma non sempre esistono minoranti o maggioranti:

Es. 4 $A_4 =]0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$ allora, 0 è un minorante ma A_4 non ha maggioranti, poiché per ogni numero L si può trovare un elemento di A_4 più grande di L.

L'insieme A_4 è un esempio di insieme **illimitato (superiormente)**. Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è **limitato superiorermente** se ammette un maggiorante, mentre è **limitato inferiormente** se ammette un minorante. Diremo che A è limitato se lo è sia inferiormente che superiormente.

L'insieme A_4 è un esempio di insieme **illimitato (superiormente)**.
Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è **limitato superiorermente** se ammette un maggiorante, mentre è **limitato inferiormente** se ammette un minorante. Diremo che A è limitato se lo è sia inferiormente che superiormente.

Se un insieme A non è limitato superiormente (risp. inferiormente), esso è detto **illimitato superiormente** (risp. inferiormente).
L'insieme A_4 è un esempio di insieme illimitato (superiormente).

Estremo superiore

Il seguente risultato segue dall'assiome di completezza:

Teorema (Esistenza dell'estremo superiore)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e **limitato superioremente**. Allora esiste il **minimo dei maggioranti** di A (detto **estremo superiore** ed indicato con $\sup A$).

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} M \geq a & \text{per ogni } a \in A \\ \text{per ogni } \epsilon > 0 \ \exists\ a \in A \ : \ M - \epsilon < a \end{cases}$$

Estremo superiore

Il seguente risultato segue dall'assiome di completezza:

Teorema (Esistenza dell'estremo superiore)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e **limitato superioremente**. Allora esiste il **minimo dei maggioranti** di A (detto **estremo superiore** ed indicato con $\sup A$).

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} M \geq a \qquad \text{per ogni } a \in A \\ \text{per ogni } \epsilon > 0 \ \exists \ a \in A \ : \ M - \epsilon < a \end{cases}$$

Se A è illimitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$.

Estremo inferiore

Analogamente

Teorema (Esistenza dell'estremo inferiore)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e **limitato inferiormente**. Allora esiste il **massimo dei minoranti** di A (detto **estremo inferiore** ed indicato con $\inf A$).

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} m \leq a & \text{per ogni } a \in A \\ \text{per ogni } \epsilon > 0 \ \exists \ a \in A \ : \ m + \epsilon > a \end{cases}$$

Estremo inferiore

Analogamente

Teorema (Esistenza dell'estremo inferiore)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e **limitato inferiormente**. Allora esiste il **massimo dei minoranti** di A (detto **estremo inferiore** ed indicato con $\inf A$).

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} m \leq a & \text{per ogni } a \in A \\ \text{per ogni } \epsilon > 0 \ \exists\ a \in A \ : \ m + \epsilon > a \end{cases}$$

Se A è illimitato inferiormente, si pone $\inf A = -\infty$.

Pertanto, sebbene non sia sempre possibile trovare massimo e minimo di un insieme $A \subset \mathbb{R}$, **è sempre possibile trovare estremi inferiore e superiore** di A.

Pertanto, sebbene non sia sempre possibile trovare massimo e minimo di un insieme $A \subset \mathbb{R}$, **è sempre possibile trovare estremi inferiore e superiore** di A.

Es. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Notiamo che per ogni elemento $a \in A$ vale

$$0 < a \leq 1$$

e quindi A è limitato.
Poiché $1 \in A$, allora esiste in massimo $\max A = \sup A = 1$.
Tuttavia $0 \notin A$ e quindi 0 non può essere minimo. Si dimostra che $0 = \inf A$.