

Capitolo diciassettesimo

Pensare con i numeri

Rappresentazione e significato dei numeri

I principali sistemi di espressione numerica in uso nella nostra cultura sono le *parole-numero* («venticinque») e i *numeri arabi* (25)

- In entrambi i sistemi gli elementi possono essere combinati per denotare numeri di grandezza arbitraria

Indipendentemente dalla forma in cui sono espressi, i numeri possono avere diversi usi (significati):

- designare il *numero* degli elementi di un insieme
- designare la *posizione ordinale* di un elemento in una sequenza
- *assegnare un'etichetta* agli oggetti per identificarli

Il senso del numero

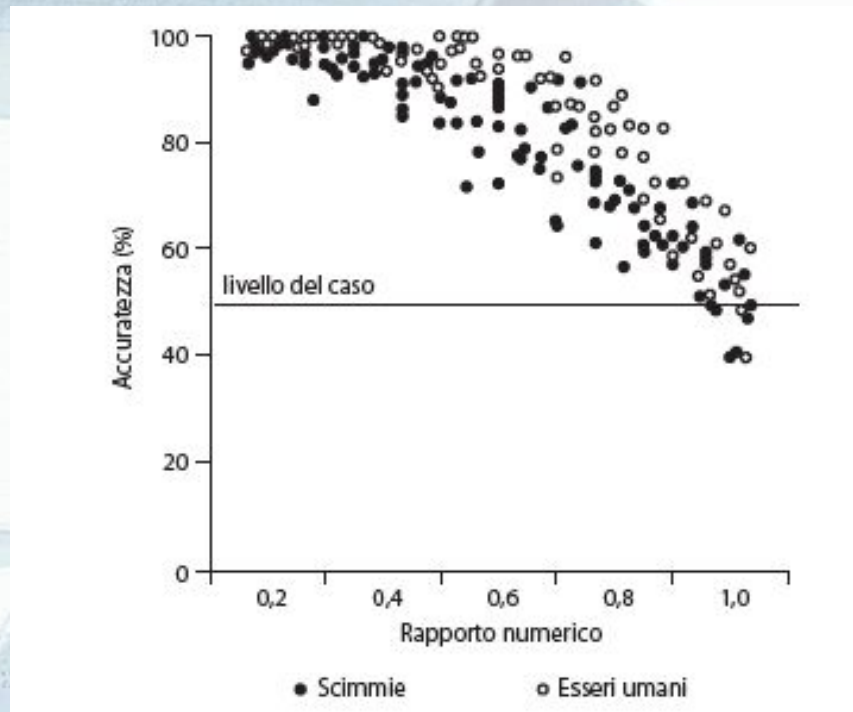
La capacità di *stimare la numerosità di un insieme* di oggetti, cioè di fornire una stima approssimata della sua grandezza, è detta *senso del numero*

- Questo tipo di capacità si è presente in *molte specie animali* e si osserva negli esseri umani già *poche ore dopo la nascita*
- Questa capacità va distinta dalla capacità di contare (contare è un processo seriale che richiede molto tempo, mentre la stima di numerosità avviene *in modo rapido e in parallelo*)

Il compito più utilizzato per ottenere una misura del senso del numero è il *confronto della numerosità di due insiemi*

- Ai soggetti vengono presentati due insiemi di oggetti; essi devono giudicare quale dei due insiemi è più numeroso
- La disposizione spaziale degli oggetti è casuale; dimensione e densità cambiano a ogni prova per non fornire indizi visivi

Confronto di numerosità ed effetto del rapporto numerico



Il grafico mostra che l'accuratezza (percentuale di risposte corrette) in questo compito dipende dal *rapporto numerico* tra i due insiemi

La minima differenza di numerosità che può essere percepita non è un valore costante ma cresce in proporzione alla numerosità di riferimento

In altre parole, *più grandi sono le numerosità, maggiore deve essere la loro distanza affinché risultino discriminabili*

Il senso del numero *obbedisce dunque allo stesso tipo di leggi psicofisiche* che governano la percezione di grandezze fisiche come il peso, la luminosità, ecc. (cfr. cap. 2 sl. 6)

Si noti che nel compito di confronto della numerosità le scimmie hanno risultati praticamente indistinguibili da quelli di studenti universitari

- La somiglianza nella prestazione di scimmie e umani suggerisce una *continuità filogenetica* nella rappresentazione della quantità numerica

È stata osservata una correlazione tra capacità di discriminazione (acuità) numerica e successo scolastico nell'apprendimento della matematica

- Il senso del numero (di cui l'acuità numerica è un indice) potrebbe rappresentare *il pilastro su cui poggia l'apprendimento matematico*

Il sistema simbolico dei numeri

La percezione della numerosità ci fornisce una rappresentazione approssimata della grandezza numerica

Ma gli esseri umani hanno inventato *sistemi simbolici di rappresentazione dei numeri* (come i numeri arabi e le parole-numero) che permettono di *quantificare in modo esatto*

La capacità di *scegliere il più grande tra due numeri* è ritenuta il criterio base per stabilire se un individuo comprende il significato dei simboli numerici

- In questo tipo di compiti di solito viene presentata una coppia di numeri e il partecipante deve indicare il numero più grande
- Può anche essere presentato un solo numero a ogni prova e i partecipanti devono dire se questo è maggiore o minore di un numero di riferimento

L'analisi dei tempi di reazione rivela due risultati principali

Effetto distanza

- Quanto maggiore è la *differenza* dei numeri da confrontare, tanto più le risposte sono rapide

Effetto grandezza

- A parità di distanza tra i numeri da comparare, i tempi di reazione aumentano con l'aumento della *grandezza* dei numeri

Numeri e spazio

La rappresentazione semantica dei numeri sembra avere un formato spaziale, definito come *linea numerica mentale*

- I numeri sono disposti secondo un *orientamento sinistra-destra*
- La *metrica* è simile a quella di una reale linea orizzontale

La linea numerica mentale non è solo una metafora ma una *realtà psicologica*, come mostrano le prove psicofisiche e neuropsicologiche

L'effetto **SNARC** (*Spatial-Numerical Association of Response Codes*) dimostra l'orientamento spaziale della linea numerica mentale

Ai partecipanti viene presentato su uno schermo un numero da 1 a 9 (escluso il 5)

Il compito consiste nel classificare il numero come pari o dispari premendo un pulsante o con la mano destra o con la sinistra

Si osserva che i tempi di reazione (TR) in risposta ai numeri piccoli (< 5) sono più rapidi con la mano sinistra mentre i TR con i numeri grandi (> 5) sono più rapidi con la mano destra

- Per es., la risposta che classifica come pari il 2 è più rapida con la mano sinistra, mentre la risposta che classifica come pari l'8 è più rapida con la mano destra

Come spiegare questi risultati?

- Supponiamo che la presentazione del numero attivi la linea numerica mentale
- Sulla linea numerica mentale i numeri più piccoli sono rappresentati a sinistra (dunque in corrispondenza della mano sinistra) e quelli più grandi sono rappresentati a destra (dunque in corrispondenza della mano destra)
- Il risultato dipende dal fatto che, in generale, le risposte sono *più rapide* quando stimolo e risposta si trovano *sullo stesso lato* del corpo rispetto a quando sono su lati opposti

Lo studio dei pazienti con *neglect*

Se viene chiesto a dei pazienti con *neglect* (disturbo di attenzione per lo spazio di sinistra in seguito a una lesione al lobo parietale destro) di indicare il punto di mezzo di una linea (*compito di bisezione*) essi indicano un punto *troppo spostato a destra*

Se poi viene chiesto loro di individuare il numero che si trova nel mezzo fra due numeri pronunciati dallo sperimentatore (*compito di bisezione numerica*) compiono errori molto simili

Ciò mostra che la linea numerica mentale ha *caratteristiche spaziali isomorfe a quelle di una linea reale*

La matematica mentale

Le ricerche sul calcolo mentale si sono concentrate sull'*aritmetica semplice*, cioè quella basata su operazioni con numeri a una sola cifra

Gli adulti in questo tipo di compiti (quanto fa 4×3 ?) possono utilizzare

- il *recupero di fatti aritmetici* dalla memoria, per es. $4 \times 3 = 12$
- la *computazione attraverso procedure* (per es. la trasformazione in un altro problema, come il problema $(4 \times 2) + 4$)

Che cosa determina la facilità (o difficoltà) di una operazione mentale?

Il maggiore determinante è la *grandezza del problema* (intesa come somma degli operandi)

- I tempi di risposta e la probabilità di commettere errori *aumentano proporzionalmente alla grandezza del problema*

Vi sono due eccezioni

Nel caso dei problemi con *operandi uguali* (per es., $3 + 3$ o 5×5) le risposte sono più rapide e accurate rispetto a problemi di pari grandezza

- si può supporre che la soluzione dei problemi con operandi uguali sia recuperata direttamente dalla memoria senza utilizzare procedure o trasformazioni

Fanno eccezioni anche i problemi che hanno *0 come operando* (per es., $3 + 0 = 0$ o $4 \times 0 = 0$) o *l'1* limitatamente alle moltiplicazioni (per es., 7×1)

- la spiegazione in questo caso è che le operazioni si svolgano applicando semplicemente delle regole apprese

Il formato dei fatti aritmetici

In che modo i fatti aritmetici sono depositati nella memoria e come sono recuperati?

Prima ipotesi: il recupero dei fatti aritmetici è basato su *semplici associazioni verbali* (eseguire una moltiplicazione sarebbe allora un processo verbale di recupero dalla memoria a lungo termine)

- Da questo punto di vista l'effetto della grandezza del problema si può spiegare col fatto che i problemi «piccoli» sono più frequenti dei problemi «grandi»

Seconda ipotesi: il recupero dei fatti aritmetici è basato su *rappresentazioni della quantità numerica, come la linea numerica mentale*

- L'effetto della grandezza del problema dipenderebbe allora dall'organizzazione intrinseca dei fatti aritmetici nella memoria

Studi recenti indicano che le due ipotesi potrebbero essere *entrambe parzialmente vere*

- le operazioni *altamente automatizzate* (per es. le moltiplicazioni) si baserebbero su *rappresentazioni linguistiche*
- le operazioni *poco automatizzate* (per es. le sottrazioni) si baserebbero sulla *manipolazione di rappresentazioni della quantità numerica*

Il cervello e la matematica

Studi su pazienti con *acalculia* (difficoltà specifica nell'esecuzione di calcoli e nell'elaborazione di quantità numeriche) hanno attribuito un ruolo specifico al *lobo parietale*

Ciò è stato confermato da studi di *neuroimmagine funzionale*. Certe aree del lobo parietale si attivano selettivamente durante l'esecuzione di compiti che chiamano in causa rappresentazioni di quantità numeriche

Nel caso del calcolo mentale l'attivazione delle aree cerebrali riflette la distinzione tra operazioni più automatizzate (basate su rappresentazioni linguistiche) e operazioni meno automatizzate (basate su rappresentazioni di quantità)

Le operazioni più automatizzate chiamano in causa le aree cerebrali deputate all'elaborazione del linguaggio

Gli studi di individui con *capacità matematiche eccezionali* sono meno conclusivi

Le capacità matematiche eccezionali (per es., quelle dei calcolatori prodigio (matematici o *idiots savants* che siano) sembrano dipendere soprattutto dalla grande quantità di *pratica*