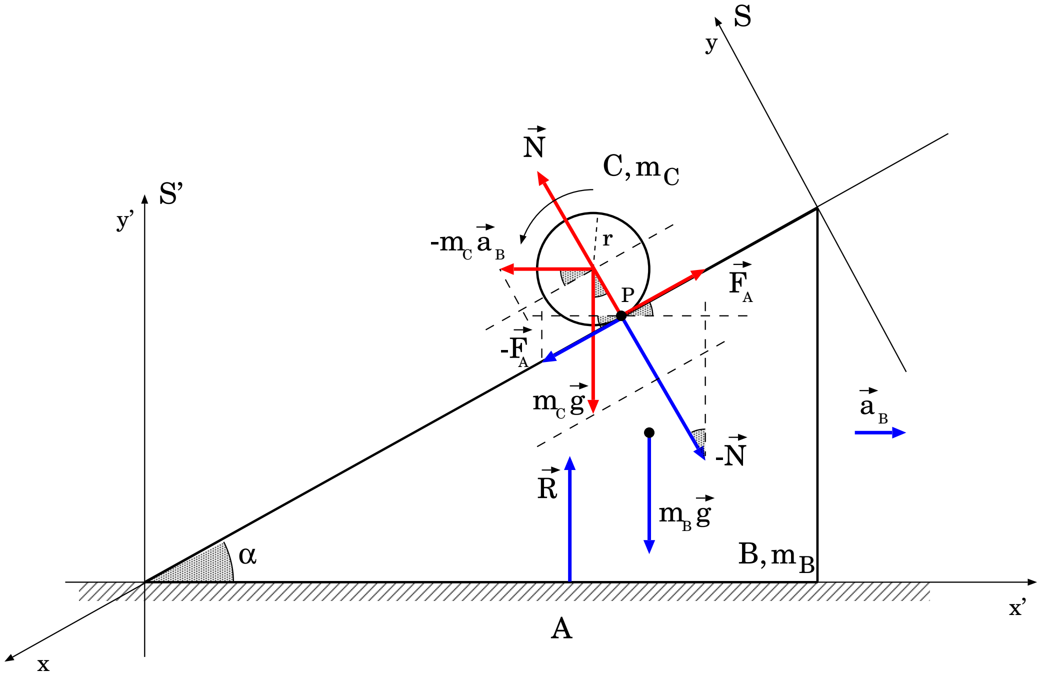
Rosati Casali, Problemi di Fisica Generale
Meccanica, Termodinamica, Teoria Cinetica dei Gas
Esercizio 6.31



In figura è riportata la geometria del problema. Il piano inclinato B essendo libero di scorrere senza attrito sulla superficie piana orizzontale A, si muoverà di moto uniformemente accelerato a causa delle forze che mutualmente si scambia con il rullo cilindrico C mentre quest'ultimo rotola lungo B. Per il terzo principio delle dinamica, infatti, le forze che B esercita su C sono uguali e opposte alle forze che C esercita su B. Le forze che B esercita su C sono date dalla reazione vincolare $\vec{N}$ (perpendicolare alla superficie del piano inclinato, si veda figura) e la forza d'attrito statico $\vec{F}_A$ (parallela alla superficie del piano inclinato e diretta come in figura) che rende possibile il moto di rotolamento di C. Di conseguenza, il rullo C esercita B delle forze uguali e opposte alle forze $\vec{N}$ e $\vec{F}_A$. Per effetto di tali forze (e della reazione vincolare esercitata da A) B, se libero di muoversi su A, sarà dotato di una accelerazione $\vec{a}_B$ orizzontale diretta come in figura. Consideriamo ora un sistema di riferimento solidale con il blocco B con asse x diretto lungo la direzione del piano inclinato, asse y perpendicolare alla direzione del piano inclinato e asse z perpendicolare al piano della figura ed entrante in esso (sistema S in figura). Poiché il moto di B è accelerato è chiaro che il sistema S non è inerziale. Nelle equazioni del moto del rullo C nel sistema S, quindi, comparirà la forza apparente dovuta al fatto che il sistema S si muove (insieme a B) con accelerazione $\vec{a}_B$. Le forze quindi che agiscono su C sono quelle riportate in rosso nella figura ossia:

1. forza peso pari a $m_C\vec{g}$ verticale, diretta verso il basso e applicata nel centro di massa di C

2. la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata da B e diretta perpendicolarmente alla superficie del piano inclinato

3. la forza di attrito statico $\vec{F}_A$ tra B a C che rende possibile il rotolamento di C su B

4. la forza apparente $-m_c\vec{a}_B$ orizzontale e diretta verso sinistra dovuta al fatto che S non è inerziale (applicata nel centro di massa di C)

Possiamo quindi scrivere la prima equazione cardinale per C nel seguente modo:

$$m_C\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N} - m_C\vec{a}_B = m_C\vec{a}_C \tag{1}$$

dove con $\vec{a}_C$ si è indicata l'accelerazione del centro di massa di C. Proiettando tale equazione vettoriale lungo le direzione degli assi x e y otteniamo:

$$\begin{cases} m_C g \sin\alpha + m_C a_B \cos\alpha - F_A = m_C a_{C_x} \\ -m_C g \cos\alpha + m_C a_B \sin\alpha + N = m_C a_{C_y} \end{cases} \tag{2}$$

Poiché C rotola lungo il piano inclinato è chiaro che l'accelerazione del suo centro di massa non può avere componente lungo y (in altri termini, durante il moto di rotolamento di C il suo centro di massa è vincolato a traslare nella direzione individuata dal piano inclinato ossia lungo l'asse x). Quindi avremo $a_{C_y} = 0$ e $a_C \equiv a_{C_x}$ e pertanto le equazione precedenti diventano:

$$\begin{cases} m_C g \sin\alpha + m_C a_B \cos\alpha - F_A = m_C a_C \\ -m_C g \cos\alpha + m_C a_B \sin\alpha + N = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Scriviamo ora la seconda equazione cardinale assumendo come polo il punto P che rappresenta il punto di contatto del rullo C sul blocco B (punto per cui passa l'asse istantaneo di rotazione del moto rotatorio di C):

$$\vec{M}_P = \frac{d\vec{L}_P}{dt} \tag{4}$$

dove si è utilizzato il fatto che la velocità del punto P è nulla visto che C rotola su B.

Scriviamo esplicitamente il momento $\vec{M}_P$. Guardando la figura è immediato verificare che il momento delle forze $\vec{F}_A$ ed $\vec{N}$ rispetto al polo P è nullo pertanto:

$$\vec{M}_P = \vec{r} \times m_C \vec{g} - \vec{r} \times m_C \vec{a}_B \tag{5}$$

Dalla figura si vede facilmente che entrambi i momenti delle forze a secondo membro sono diretti come l'asse z del sistema S (ossia perpendicolari al piano della figura ed entranti). Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{M}_P = (r m_C g \sin\alpha + r m_C a_B \cos\alpha)\hat{k} \tag{6}$$

dove $\hat{k}$ rappresenta il versore dell'asse z del sistema S.

Il momento angolare $\vec{L}_p$ è invece dato dal prodotto del momento di inerzia I_P per il vettore velocità angolare $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$ dove si è indicato con θ l'angolo di rotazione di C intorno al punto P o, equivalentemente, intorno al suo centro di massa. Si noti che durante il rotolamento, C ruota in senso anti-orario pertanto il vettore velocità angolare è diretto come l'asse z di S. Possiamo pertanto scrivere:

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = I_P \ddot{\theta}\hat{k} \tag{7}$$

Uguagliando le due espressioni ottenute abbiamo:

$$r m_C g \sin\alpha + r m_C a_B \cos\alpha = I_P \ddot{\theta} \tag{8}$$

A questo punto utilizziamo la condizione di puro rotolamento ossia $v_C = \dot{\theta} r$ (dove v_C è il modulo della velocità del centro di massa di C) e quindi $a_C = \ddot{\theta} r$. Sostituendo tale espressione nella seconda equazione cardinale:

$$a_C = \frac{m_C r^2}{I_P}(g \sin\alpha + a_B \cos\alpha) \tag{9}$$

Sostituendo tale espressione di a_C nella prima delle (3), dopo semplici passaggi algebrici, otteniamo:

$$F_A = m_C \left(1 - \frac{m_C r^2}{I_P}\right)(g \sin\alpha + a_B \cos\alpha) \tag{10}$$

Inoltre, dalla seconda delle (3) possiamo ottenere la seguente espressione per N:

$$N = m_C g \cos\alpha - m_C a_B \sin\alpha \tag{11}$$

Si noti ora che la (10) e la (11) forniscono delle espressioni per i moduli F_A e N in funzione dell'accelerazione di B che rappresenta la quantità che dobbiamo trovare. Per trovare a_B occorre scrivere le equazioni del moto del corpo B. Per far ciò dobbiamo innanzitutto individuare tutte le forze che agiscono su B che sono quelle rappresentate in blue in figura ossia:

1. la forza peso $m_B\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso che possiamo immaginare applicata nel centro di massa di B
2. la reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dalla superficie A che risulta verticale e diretta verso l'alto
3. le forze $-\vec{F}_A$ e $-\vec{N}$ che per il terzo principio della dinamica sono esercitate da C su B

Fissiamo ora un sistema di riferimento in cui descrivere il moto di B (ovviamente tale sistema non può essere S in quanto esso è solidale con B). Consideriamo, in particolare, un sistema fisso con assi x' e y' rispettivamente parallelo e perpendicolare alla superficie A (sistema S' in figura). Essendo tale sistema inerziale possiamo scrivere l'equazione del moto per B come:

$$m_B\vec{g} + \vec{R} - \vec{N} - \vec{F}_A = m_B\vec{a}_B \tag{12}$$

Proiettando tale equazione vettoriale lungo gli assi x' e y':

$$\begin{cases} -F_A\cos\alpha + N\sin\alpha = m_B a_{B_{x'}} \\ -F_A\sin\alpha - N\cos\alpha + m_B g + R = m_B a_{B_{y'}} \end{cases} \tag{13}$$

Poiché B può scorrere solo orizzontalmente è chiaro che $a_{B_{y'}} = 0$ e quindi $a_B \equiv a_{B_{x'}}$:

$$\begin{cases} -F_A\cos\alpha + N\sin\alpha = m_B a_B \\ -F_A\sin\alpha - N\cos\alpha - m_B g + R = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Sostituendo nella prima delle (14) le espressioni trovate per F_A e Nin (espressioni (10) e (11)), dopo semplici calcoli si ottiene:

$$a_B = \frac{m_C^2 r^2}{I_p}\frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{m_B + m_C - \frac{m_C^2 r^2}{I_p}\cos^2\alpha} \tag{15}$$

Che fornisce il risultato cercato. Si noti che la seconda delle equazioni (14) permette di calcolare la reazione vincolare R esercitata dalla superficie A su B una volta nota a_B.

Calcoliamo, infine, esplicitamente il momento di inerzia I_P. Per il teorema di Huygens-Stainer abbiamo:

$$I_P = m_C r^2 + I_G = m_C r^2 + \frac{m_C r^2}{2} = \frac{3}{2} m_C r^2 \tag{16}$$

dove si è tenuto conto del fatto che il momento di inerzia di un cilindro di massa m_C e raggio r rispetto ad una asse passante per il suo centro di massa e diretto lungo l'asse del cilindro è dato da $I_G = m_C r^2/2$.

Sostituendo il valore di I_P nell'espressione ottenuta per a_B otteniamo:

$$a_B = \frac{2m_C \sin\alpha \cos\alpha}{3m_B + m_C(1 + 2\sin^2\alpha)} g \tag{17}$$