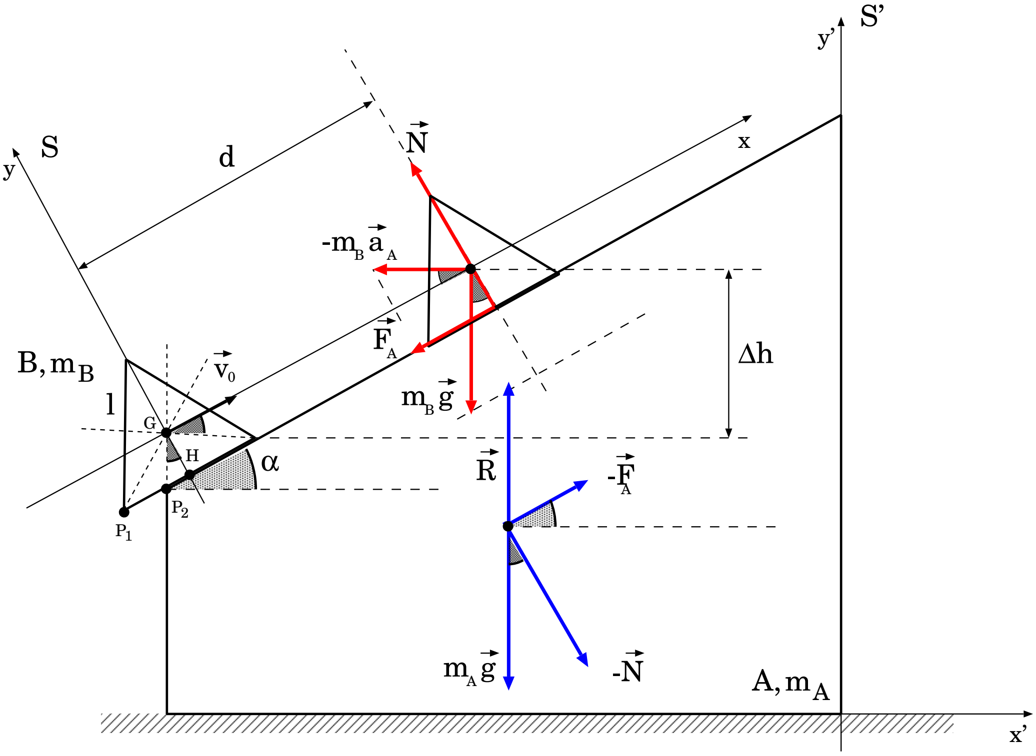
Rosati Casali, Problemi di Fisica Generale
Meccanica, Termodinamica, Teoria Cinetica dei Gas
Esercizio 5.32



In figura è riportata la geometria del problema.

Quesito a)

Il valore massimo della distanza $\overline{P_1P_2}$ tale che il corpo B non ruoti intorno al punto P_2 è quello per cui il baricentro di B (punto G in figura) e il punto P_2 si trovano sulla stessa verticale. In tal caso, infatti, il momento della forza peso rispetto al punto P_2 è nullo. Se invece la verticale passante per G intercetta la base di B prima del punto P_2 (quindi per valori maggiori della distanza $\overline{P_1P_2}$ rispetto al caso in cui i punti P_2 e G solo allineati sulla stessa verticale) allora il momento della forza peso (rispetto al polo P_2) diventa non nullo e quindi B ruota intorno a P_2. Calcoliamo quindi la distanza $\overline{P_1P_2}$ nel caso in cui P_2 e G sono allineati sulla stessa verticale. Da considerazioni geometriche e considerando che il punto G è l'intersezione delle mediane, delle bisettrici e delle altezze di B (che è un triangolo equilatero) è facile ricavare:

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1H} - \overline{P_2H} = \frac{l}{2} - \overline{HG}\tan\alpha = \frac{l}{2} - \overline{P_1H}\tan\frac{\pi}{6}\tan\alpha =$$
$$= \frac{l}{2} - \overline{P_1H}\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha\right) \quad (1)$$

Da cui, tenendo conto che $\alpha = \pi/6$, si ottiene $\overline{P_1P_2} = l/3$. Se quindi $\overline{P_1P_2} <= l/3$ il corpo B non può ruotare intorno al punto P_2.

Affinché il corpo B non possa neppure traslare lungo il piano inclinato, la risultante delle forze nella direzione del piano inclinato deve essere nulla. Dalla figura è immediato verificare che il modulo della componente della forza peso lungo la direzione del piano inclinato è dato da $F_p = m_B g \sin\alpha$ e il modulo della forza di attrito statico è $F_A = \mu_S N = \mu_S m_B g \cos\alpha$ (essendo N la reazione vincolare esercitata dal piano inclinato). Affinchè il corpo B non trasli deve valere la condizione:

$$F_P \leq F_A \Rightarrow \mu_S \geq \tan\alpha \quad (2)$$

da cui si ricava che il coefficiente minimo di attrito statico che consente l'equilibrio di B è pari a $\sqrt{3}/3$.

Quesito b)

Se non c'è attrito tra A e B allora si conserva l'energia totale meccanica. Inoltre, essendo A bloccato, solo il corpo B è libero di muoversi. Possiamo quindi scrivere la conservazione dell'energia nel seguente modo:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}m_B v_0^2 = m_B g\Delta h = m_B g d \sin\alpha \quad (3)$$

Si noti che nel sistema di riferimento S (si veda figura), il corpo B nella sua posizione iniziale ha il suo centro di massa nell'origine. Pertanto, l'energia potenziale iniziale è nulla e, di conseguenza, l'energia iniziale E_i è data dalla sola energia cinetica iniziale ($m_B v_0^2/2$). L'energia finale, invece, corrisponde alla situazione in cui il corpo B si trova più un alto sul piano inclinato ed è fermo. Quindi E_f è data dalla sola energia potenziale.

Dall'equazione precedente si ricava:

$$v_0 = \sqrt{2gd\sin\alpha} \quad (4)$$

Quesito c)

Rispetto al caso precedente abbiamo attrito tra A e B e, di conseguenza, l'energia meccanica non si conserva in quanto parte di essa viene dissipata proprio dalla forza d'attrito. Possiamo pertanto scrivere:

$$E_i + L_A = E_f \tag{5}$$

dove L_A è il lavoro svolto dalla forza d'attrito (non conservativa). Essendo la forza d'attrito sempre parallela alla direzione del piano inclinato (e diretta nel verso opposto a quello del moto di B) possiamo calcolare facilmente L_A (sapendo che B si sposta per un tratto pari a d) e scrivere:

$$\frac{1}{2}m_B v_0^2 = m_B g d \sin\alpha + \mu_D m_B d g \cos\alpha \tag{6}$$

Da cui si ricava:

$$v_0 = \sqrt{2gd(\sin\alpha + \mu_D \cos\alpha)} \tag{7}$$

Quesito d)

Se si vuole studiare il moto di A nel sistema S solidale con A, con A libero di muoversi con un'accelerazione $\vec{a}_A$ (da determinare), occorre considerare S come un sistema di rifermento non inerziale. Si deve, pertanto, aggiungere alle forze reali che agiscono su B anche la corrispondente forza apparente.

Le forze reali che agiscono su B (riportate in rosso in figura) sono:

1. la forza peso $m_B\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso;

2. la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata da A su B. Poiché non c'è attrito tra A e B, $\vec{N}$ è perpendicolare alla superficie di A e diretta verso l'alto.

L'equazione del moto di B nel sistema non inerziale S, pertanto, si scrive come:

$$m_B\vec{g} + \vec{N} - m_B\vec{a}_A = m_B\vec{a}_B \tag{8}$$

Poiché A può solo scorrere orizzontalmente, $\vec{a}_A$ è orizzontale. Proiettando la (8) lungo le direzioni x e y si ottiene:

$$\begin{cases} a_B = -g\sin\alpha - a_A\cos\alpha \\ N = m_B(g\cos\alpha - a_A\sin\alpha) \end{cases} \tag{9}$$

Per determinare il moto di B abbiamo bisogno di determinare l'accelerazione a_A di A. A tal fine studiamo il moto di A nel sistema di riferimento S' fisso (e quindi inerziale) solidale con la superficie orizzontale (si veda figura). Le forze che agiscono su A (riportate in blu in figura) sono:

1. la forza peso $m_A\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso;

2. la reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dalla superficie orizzontale. Poiché non c'è attrito tra superficie orizzontale e A, $\vec{R}$ è verticale e diretta verso l'alto;

3. la forza $-\vec{N}$ esercitata per il terzo principio da B su A.

L'equazione del moto di A in S' è pertanto:

$$m_A\vec{g} + \vec{R} - \vec{N} = m_A\vec{a}_A \tag{10}$$

Proiettando la (10) sugli assi di S' si ottiene:

$$\begin{cases} R = m_A g + N\cos\alpha \\ a_A = \dfrac{N\sin\alpha}{m_A} \end{cases} \tag{11}$$

Sostituendo il valore di a_A dato dalla seconda delle (11) nelle (9) si ottiene:

$$\begin{cases} a_B = -\dfrac{(m_A + m_B)\sin\alpha}{m_A + m_B\sin^2\alpha} g \\ N = \dfrac{m_A m_B\cos\alpha}{m_A + m_B\sin^2\alpha} g \end{cases} \tag{12}$$

Una volta ottenuta l'accelerazione a_B (costante) di B possiamo facilmente calcolare la sua legge oraria integrando due volte rispetto al tempo:

$$\begin{cases} v_B(t) = a_B t + v_0 \\ x_B(t) = \dfrac{1}{2}a_B t^2 + v_0 t \end{cases} \tag{13}$$

Per determinare v_0 basta imporre che lo spazio percorso da B prima di fermarsi (rispetto ad A) sia d. Occorre quindi calcolare l'istante τ in cui v_B si annulla ($v_B(\tau) = 0$) e imporre $x_B(\tau) = d$:

$$v_0 = \sqrt{-2a_B d} = \sqrt{\frac{2(m_A + m_B)gd\sin\alpha}{m_A + m_B\sin^2\alpha}} \tag{14}$$

Quesito e)

Rispetto al caso precedente abbiamo attrito tra A e B. Occorre, quindi, ripetere la stessa procedura vista per il caso precedente aggiungendo anche la forza di attrito $\vec{F}_A$ parallela alla superficie di A e di modulo pari a $F_A = \mu_d N$. Di conseguenza, l'equazione del moto di B in S diventa:

$$m_B\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A - m_B\vec{a}_A = m_B\vec{a}_B \tag{15}$$

che proiettata sui due assi x e y diventa:

$$\begin{cases} a_B = -g\sin\alpha - \dfrac{\mu_d N}{m_B} - a_A\cos\alpha \\ N = m_B(g\cos\alpha - a_A\sin\alpha) \end{cases} \tag{16}$$

Per quanto riguarda l'equazione del moto di A in S' occorre considerare che alle forze agenti su A viste nel caso precedente va aggiunta la forza $-\vec{F}_A$ che sempre in virtù del terzo principio B esercita su A:

$$m_A\vec{g} + \vec{R} - \vec{N} - \vec{F}_A = m_A\vec{a}_A \tag{17}$$

Proiettando sugli assi x' e y' si ha:

$$\begin{cases} R = m_A g + N\cos\alpha - \mu_d N\sin\alpha \\ a_A = \dfrac{N(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}{m_A} \end{cases} \tag{18}$$

Sostituendo il valore trovato per a_A nelle (16), dopo semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$\begin{cases} a_B = -\dfrac{(m_A + m_B)(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}{m_A + m_B\sin\alpha(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}g \\ N = \dfrac{m_A m_B\cos\alpha}{m_A + m_B\sin\alpha(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}g \end{cases} \tag{19}$$

Una volta ottenuto a_B possiamo ripetere esattamente quanto fatto nel caso precedente e ottenere:

$$v_0 = \sqrt{-2a_B d} = \sqrt{\frac{2gd(m_A + m_B)(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}{m_A + m_B\sin\alpha(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}} \tag{20}$$