**Prova di Esame di Fisica Generale II**
**Corso di Laurea in Matematica (L-35)**
15 aprile 2025

## Esercizio 1

Il problema è chiaramente dotato di simmetria sferica. Di conseguenza, tutte le grandezze elettriche (densità di carica, campo elettrico, potenziale elettrico, ...) godono della stessa tipologia di simmetria. Se quindi fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro del sistema di conduttori, tutte le grandezze elettriche dipendono solo dalla distanza $r$ a partire dall'origine.

**a)** Per calcolare le densità di carica $\sigma_i$ e $\sigma_e$ utilizziamo in maniera combinata il teorema di Gauss e il fatto che in condizioni statiche il campo elettrico all'interno di un qualsiasi conduttore è nullo. In particolare, consideriamo una superficie sferica $S$ con raggio $r$ compreso tra $R_i$ ed $R_e$. Poiché $S$ è interamente contenuta nel guscio sferico conduttore (in cui il campo elettrico è nullo) è chiaro che il flusso del campo elettrico attraverso $S$ è anch'esso nullo. Per il teorema di Gauss, quindi, la carica totale contenuta in $S$ deve essere nulla. La superficie $S$ contiene la carica $q$ della sfera interna (depositata sulla sua superficie) e la carica $q_i$ che si va a depositare sulla superficie interna del guscio sferico. Come già detto, per il teorema di Gauss deve essere $q + q_i = 0$ ossia $q_i = -q$. Di conseguenza:

$$\sigma_i = -\frac{q}{4\pi R_i^2} \tag{1}$$

Tenendo conto che la carica totale del guscio sferico è $Q$ e che sulla sua superficie interna vi è la carica $q_i = -q$ allora sulla superficie esterna avremo la carica $q_e = Q - q_i = Q + q$. Corrispondentemente:

$$\sigma_e = \frac{Q+q}{4\pi R_e^2} \tag{2}$$

**b)** Come già detto il campo elettrico deve essere dotato di simmetria sferica e, quindi, esso può dipendere solo dalla distanza radiale $r$. Di conseguenza, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$. All'interno dei conduttori il campo deve annullarsi quindi:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & 0 \le r < R \\ \vec{0} & R_i < r < R_e \end{cases} \tag{3}$$

Calcoliamo il campo elettrico nelle regioni $R \le r \le R_i$ e $r \ge R_e$.

Per quanto riguarda la regione $R \le r \le R_i$ applichiamo il teorema di Gauss ad una superficie sferica $S$ di raggio $r$ compreso tra $R$ e $R_i$. La carica interna ad $S$ è ovviamente $q$, mentre, tenendo conto che il campo elettrico è radiale, il suo flusso attraverso $S$ è pari a $E(r)4\pi r^2$. Il teorema di Gauss quindi ci permette di ricavare:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \qquad R \le r \le R_i \tag{4}$$

Per calcolare il campo elettrico nella regione $r \ge R_e$ applichiamo di nuovo il teorema di Gauss alla superficie sferica $S$ definita precedentemente ma con raggio $r \ge R_e$. La carica contenuta in $S$ è $q + Q$ mentre il flusso del campo attraverso $S$ è lo stesso di quello calcolato in precedenza. Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{E}(r) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \qquad r \ge R_e \tag{5}$$

**c)** Una volta ottenuto il campo elettrico in tutte le regioni dello spazio possiamo facilmente calcolare il potenziale elettrico a partire dalla sua definizione. Indichiamo con $V(r)$ il potenziale elettrico e concentriamoci sulla regione $r \geq R_e$. Per definizione di potenziale elettrico avremo:

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \vec{E}(\xi) \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E}(\xi) \cdot d\vec{\xi} = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6}$$

Ponendo $V(\infty) = 0$ si ottiene quindi:

$$V(r) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \qquad r \geq R_e \tag{7}$$

Poiché all'interno del guscio sferico il campo deve essere nullo è chiaro che il corrispondente potenziale deve essere costante (come accede in ogni conduttore). Possiamo quindi scrivere che il potenziale all'interno del guscio sferico assume lo stesso valore che esso possiede sulla sua superficie esterna. Tale valore è calcolabile a partire dalla (7) ponendo $r = R_e$. Di conseguenza avremo:

$$V(r) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_e} \qquad R_i \leq r \leq R_e \tag{8}$$

Consideriamo ora la regione compresa tra i due conduttori ($R \leq r \leq R_i$):

$$V(r) - V(R_i) = \int_r^{R_i} \vec{E}(\xi) \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_i} \vec{E}(\xi) \cdot d\vec{\xi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{R_i} \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_i} \right) \tag{9}$$

La quantità $V(R_i)$ è il valore costante fornito dalla (8) per cui si ha:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_e} \qquad R \leq r \leq R_i \tag{10}$$

Infine per $r \leq R$ essendo all'interno di un conduttore, il potenziale resta costante al valore che esso assume sulla sua superficie che si ottiene dalla (10) ponendo $r = R$:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_e} \qquad r \leq R \tag{11}$$

### Esercizio 2

**a)** I condensatori $C_1$ e $C_2$ sono collegati in parallelo e, pertanto, dal punto di vista circuitale essi equivalgono ad un unico condensatore di capacità $C_p = C_1 + C_2$. Introducendo il condensatore $C_p$ il circuito è composto da due maglie indipendenti:

(a) maglia $a$ composta del generatore $f$ e dalle resistenze $R_1$ e $R_2$

(b) maglia $b$ composta delle resistenze $R_2$, $R_3$ e dal condensatore $C_p$

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff ad ognuna di queste maglie assumendo delle correnti di maglia fittizie $I_a(t)$ e $I_b(t)$ tutte circolanti in senso orario.

$$\begin{cases} I_a R_1 + (I_a - I_b) R_2 = f \\ (I_b - I_a) R_2 + I_b R_3 + \dfrac{q}{C_p} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

essendo $q$ la carica presente sulla armature di $C_p$. Poiché $dq/dt = I_b$ derivando rispetto al tempo le (12) si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{I}_a R_1 + (\dot{I}_a - \dot{I}_b) R_2 = 0 \\ (\dot{I}_b - \dot{I}_a) R_2 + \dot{I}_b R_3 + \dfrac{I_b}{C_p} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Ricavando $\dot{I}_a$ dalla prima e sostituendo nella seconda si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{I}_a = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \dot{I}_b \\ \dfrac{R_1 R_2 + R_3 R_1 + R_3 R_2}{R_1 + R_2} \dot{I}_b + \dfrac{I_b}{C_p} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Ponendo:

$$\tau = \frac{R_1 R_2 + R_3 R_1 + R_3 R_2}{R_1 + R_2} C_p = \frac{R_1 R_2 + R_3 R_1 + R_3 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2) = 65 \mu\text{s} \tag{15}$$

si ottiene la seguente equazione per $I_b$:

$$\frac{dI_b}{dt} + \frac{I_b}{\tau} = 0 \qquad \frac{dI_b}{I_b} = -\frac{dt}{\tau} \tag{16}$$

La cui soluzione si scrive come:

$$I_b(t) = I_b^0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{17}$$

dove $I_b^0$ rappresenta la corrente nella maglia $b$ all'istante $t = 0$.

Dalla (17) si deduce che dopo una fase transiente in cui i condensatori si caricano, la corrente che scorre nella maglia $b$ tende a zero ad indicare il fatto che entrambi i condensatori sono completamente carichi. Di conseguenza, $\tau$ dato dalla (15) rappresenta proprio la costante di tempo richiesta.

**b)** Integrando la (17) rispetto al tempo si ottiene come varia la carica totale depositata sulle armature dei due condensatori rispetto al tempo:

$$q(t) = \int I_b(t) dt = -I_b^0 \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + K \tag{18}$$

con $K$ costante di integrazione che può essere determinata imponendo le condizioni iniziali su $q(t)$. All'istante iniziale entrambi i condensatori sono scarichi pertanto $q(0) = 0$. Imponendo tale condizione nella (18) si ha:

$$q(t) = I_b^0 \tau \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \tag{19}$$

Per determinare $I_b^0$ scriviamo le (12) relativamente all'istante $t = 0$ ricordando che $q(0) = 0$:

$$\begin{cases} I_a^0 R_1 + (I_a^0 - I_b^0) R_2 = f \\ (I_b^0 - I_a^0) R_2 + I_b^0 R_3 = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Risolvendo per $I_b^0$ dopo semplici passaggi si ottiene:

$$I_b^0 = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_1 + R_3 R_2} f \tag{21}$$

Sostituendo la (21) nella (19) si ottiene:

$$q(t) = f(C_1 + C_2) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \tag{22}$$

A regime (ossia per $t \to +\infty$) si ha:

$$\tilde{q} \equiv q(\infty) = f(C_1 + C_2)\frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{23}$$

D'altra parte se indichiamo con $\tilde{q}_1$ e $\tilde{q}_2$ rispettivamente le cariche a regime sulle armature dei singoli condensatori $C_1$ e $C_2$ avremo $\tilde{q} = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2$. Inoltre vale la condizione $\tilde{q}_1 C_1 = \tilde{q}_2 C_2$ in quanto i due condensatori sono collegati in parallelo e, pertanto, ai loro capi sussiste la stessa differenza di potenziale ($\Delta V = qC$). Utilizzando queste due relazioni si ottiene facilmente:

$$\begin{cases} \tilde{q}_1 = fC_2\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.2\mu\text{C} \\ \tilde{q}_2 = fC_1\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.4\mu\text{C} \end{cases} \tag{24}$$

**c)** Il lavoro compiuto dal generatore per caricare i due condensatori (o equivalentemente per portare il condensatore $C_p$ da scarico a carica $\tilde{q}$) è dato da:

$$L = \tilde{q}\Delta V = \frac{\tilde{q}^2}{C_p} = \frac{\tilde{q}^2}{C_1 + C_2} = f^2(C_1 + C_2)\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 \approx 2.4\mu\text{J} \tag{25}$$

### Esercizio 3

**a)** Applichiamo il teorema della circuitazione di Ampere al vettore $\vec{H}$. Per il calcolo della circuitazione scegliamo la circonferenza $\gamma$ di raggio $R$ interna al ferromagnete. La superficie concatenata a $\gamma$ è attraversata $N$ volte dall'intensità di corrente $I$. Possiamo quindi scrivere:

$$\int_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \tag{26}$$

L'integrale (26) può essere facilmente calcolato se si considera il fatto che il ferromagnete possiede una permeabilità relativa estremamente alta. Di conseguenza possiamo assumere che le linee di forza di $\vec{H}$ (ed equivalentemente di $\vec{B}$) siano tutte convogliate all'interno del ferromagnete e quindi che siano ben approssimate proprio dalla circonferenza $\gamma$. Dobbiamo tuttavia tener conto che il valore di $\vec{H}$ all'interno del ferromagnete è differente da quello presente nel traferro. Indichiamo, pertanto, con $H_f$ il modulo di $\vec{H}$ all'interno del ferromagnete e con $H_0$ il modulo dello stesso vettore nel traferro. In tal modo possiamo riscrivere la (26) come segue:

$$\int_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_f(2\pi R - d) + H_0 d = NI \tag{27}$$

Tenendo conto che $\mu_0\mu_r H_f = B_f$ e che $\mu_0 H_0 = B_0$ la (27) diventa:

$$\frac{B_f}{\mu_0\mu_r}(2\pi R - d) + \frac{B_0}{\mu_0}d = NI \tag{28}$$

Ricordiamo che, in generale, nella superficie di separazione tra due materiali con caratteristiche magnetiche differenti sia il campo $\vec{B}$ che $\vec{H}$ subiscono una discontinuità. Nel nostro caso, quindi, nel passaggio tra il materiale ferromagnetico e il traferro (che supponiamo essere immerso in aria e, quindi trattabile in buona approssimazione come vuoto) tali vettori sono discontinui. Tuttavia è noto che la componente normale alla superficie di separazione del vettore $\vec{B}$ è continua (così come la componente tangenziale del vettore $\vec{H}$). Essendo il traferro di dimensioni trascurabili ed essendo $\vec{B}$ sempre tangente alla circonferenza $\gamma$ possiamo assumere che nel passaggio dal materiale ferromagnetico al traferro la componente normale alla superficie di separazione del vettore $\vec{B}$ coincida con l'intero vettore (ossia possiamo supporre che $\vec{B}$ è ortogonale alla superficie di separazione ferromagnete-traferro). In tal caso nella (28) possiamo assumere $B_f = B_0$ e quindi ottenere:

$$B_0 = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{2\pi R + d(\mu_r - 1)} \approx 12.2m\text{T} \tag{29}$$

**b)** La forza elettromotrice indotta ai capi della barretta conduttrice è dovuta al fatto che le cariche presenti in essa muovendosi (in maniera solidale alla barretta) in una regione in cui è presente il campo magnetico $B_0$ dato dalla (29) sono soggette alla forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}_0$. Poiché la barretta ruota all'interno del traferro su un piano perpendicolare a $\vec{B}_0$ è chiaro che il vettore $\vec{v}$ giace sullo stesso piano e il suo modulo vale $v = \omega r$ dove $r$ rappresenta la distanza dal suo estremo fisso (centro di rotazione della barretta). Essendo $\vec{v}$ e $\vec{B}_0$ ortogonali, la forza di Lorentz che agisce sul generico punto della barretta a distanza $r$ dal centro di rotazione della barretta vale:

$$F = qB_0 \omega r \tag{30}$$

A partire dalla (30) è possibile ottenere la forza elettromotrice indotta sull'intera barretta dividendo per $q$ (si ricordi che la forza elettromotrice rappresenta la forza per unità di carica) e integrando sulla lunghezza della barretta:

$$f_i = \int_0^L B_0 \omega r dr = \frac{1}{2}\omega B_0 L^2 = \frac{\mu_0 \mu_r I \omega L^2}{4\pi R + 2d(\mu_r - 1)} \approx 0.12m\text{V} \tag{31}$$

## Esercizio 4

**a)** Il problema può essere facilmente risolto imponendo la conservazione dell'energia.

Fissiamo l'asse $z$ perpendicolare al piano dell'anello e passante per il suo centro. La geometria del problema impone che tale asse sia verticale e che la carica $q$ si muova lungo esso. Se indichiamo con $z$ la generica posizione occupata dalla carica $q$, la sua energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale elettrica e dell'energia potenziale gravitazionale: $U(z) = U_e(z) + U_g(z)$. L'energia gravitazione è data da $U_g(z) = mgz$ con $g$ accelerazione gravitazionale. L'energia potenziale elettrica $U_e$, invece, si ottiene moltiplicando il potenziale elettrico $V(z)$ generato dall'anello carico nel punto in cui si trova la carica $q$ per la carica stessa: $U_e(z) = qV(z)$.

Per calcolare $V(z)$ calcoliamo il potenziale $dV(z)$ generato dal tratto infinitesimale di anello $dl$ nel punto $z$. Se indichiamo con $\lambda$ la densità di carica lineare dell'anello si ottiene che la carica $dq$ contenuta in $dl$ è pari a $dq = \lambda dl$. Essendo il tratto $dl$ infinitesimale possiamo supporre che $dq$ sia una carica puntiforme e, quindi scrivere:

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{32}$$

dove si è tenuto conto che il tratto $dl$ della circonferenza di raggio $r$ in coordinate polari è dato da $dl = rd\theta$. Per ottenere $V(z)$ occorre integrare la (32) su tutto l'anello:

$$V(z) = \int dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r\lambda}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{r\lambda}{\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{33}$$

Essendo $Q_A$ la carica totale dell'anello si ha $\lambda = Q_A/(2\pi r)$ di conseguenza:

$$V(z) = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{34}$$

Indichiamo con $E_i$ e $E_f$ rispettivamente l'energia della carica $q$ quando essa si trova nella posizione iniziale ($z = h_0$) e quando essa transita per il centro dell'anello ($z = 0$). Per la conservazione dell'energia deve essere $E_i = E_f$. Poiché inizialmente la carica è ferma $E_i$ coincide con l'energia potenziale e quindi $E_i = U_e(h_0) + U_g(h_0)$. Detto $v$ il modulo della velocità della carica $q$ quando questa transita per il centro dell'anello avremo: $E_f = mv^2/2 + U_e(0) + U_g(0)$. Imponendo $E_i = E_f$ si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2q[V(h_0) - V(0)]}{m} + 2gh_0} = \sqrt{\frac{qQ_A}{2m\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + h_0^2}} - \frac{1}{r}\right) + 2gh_0} \approx 2.11\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{35}$$