

Prova di Esame di Fisica Generale II
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
8 maggio 2026

Esercizio 1

- a) Descriviamo il problema in un sistema di riferimento S con asse x orizzontale diretto da sinistra verso destra posto in corrispondenza dell'armatura B del condensatore e asse y verticale diretto dall'armatura B verso l'armatura A . Scegliamo, inoltre, l'origine di S in corrispondenza del bordo di sinistra dell'armatura B .

È noto che tra le armature del condensatore piano è presente un campo elettrico \vec{E} costante diretto perpendicolarmente alle armature nel verso che va dall'armatura a potenziale maggiore (A) verso quella a potenziale minore (B). Nel sistema S tale campo è diretto in direzione opposta all'asse y ossia $\vec{E} = -E\hat{j}$ essendo \hat{j} il versore dell'asse y . Nota la differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B$ tra le due armature, dalla definizione di potenziale elettrico si ricava facilmente il modulo $E = \Delta V/d$.

Se si trascurano gli effetti gravitazionali del protone l'unica forza che agisce su di esso quando si trova all'interno delle armature del condensatore è quella di natura elettrica data da $\vec{F} = e\vec{E}$. Siamo quindi in grado di scrivere le equazioni del moto del protone:

$$a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 t \quad (1)$$

$$a_y = -\frac{e\Delta V}{m_p d} \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = -\frac{e\Delta V}{m_p d} t \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{e\Delta V}{2m_p d} t^2 + h \quad (2)$$

L'istante τ è quello per cui la $y(t)$ si annulla. Imponendo quindi che $y(\tau) = 0$ si ottiene:

$$\tau = \sqrt{\frac{2m_p d h}{e\Delta V}} = \sqrt{\frac{4m_p d^2}{3e\Delta V}} \approx 6.67 \mu\text{s} \quad (3)$$

- b) La distanza Δ si ottiene semplicemente calcolando $x(t)$ all'istante τ :

$$\Delta = x(\tau) = v_0 \tau = v_0 \sqrt{\frac{4m_p d^2}{3e\Delta V}} \approx 33.4 \text{cm} \quad (4)$$

- c) Poiché il campo elettrico è presente solo nella regione di spazio compresa tra le due armature del condensatore, quando il protone si trova ad di fuori di tale regione non è soggetto a nessuna forza (trascurando quella gravitazionale) e, pertanto, all'esterno del condensatore, si muove di moto rettilineo uniforme. Di conseguenza, se supponiamo che in corrispondenza di un differenza di potenziale $\Delta V'$ il protone fuoriesca dal condensatore in corrispondenza di un punto D , affinché esso colpisca il bersaglio posizionato in C la sua velocità in D deve essere diretta come la congiungente DC .

A partire dalle (1) e (2) si calcola facilmente l'equazione della traiettoria del protone data da:

$$y = -\frac{e\Delta V'}{2m_p d v_0^2} x^2 + h \quad (5)$$

Le coordinate del punto D saranno pertanto:

$$x_D = L \quad y_D = y(x_D) = -\frac{e\Delta V' L^2}{2m_p d v_0^2} + h \quad (6)$$

La direzione della velocità in corrispondenza del punto D è data dalla derivata della (5) calcolata nel punto $x = L$. Se quindi indichiamo con α_1 l'angolo che la velocità del protone forma con l'asse x si ha:

$$\tan \alpha_1 = -\frac{e\Delta V' L}{m_p dv_0^2} \quad (7)$$

Da semplici considerazioni geometriche si evince che la retta passante per i punti D e C ha coefficiente angolare:

$$\tan \alpha_2 = -\frac{y_D + l_2}{x_D + l_1} = -\frac{h + l_2}{L + l_1} + \frac{e\Delta V' L}{m_p dv_0^2} \frac{L}{2(L + l_1)} \quad (8)$$

Imponendo che $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ e risolvendo per $\Delta V'$, dopo semplici calcoli, si ottiene:

$$\Delta V' = \frac{m_p dv_0^2}{eL} \frac{2(h + l_2)}{3L + 2l_1} = \frac{m_p v_0^2}{e} \frac{d^2}{2L^2} \approx 8.35V \quad (9)$$

Esercizio 2

a) Il circuito è composto da due maglie indipendenti:

- (a) maglia composta dal generatore f e dalle resistenze R_1 e R_3
- (b) maglia composta dalle resistenze R_2 , R_3 e R_4 .

Tuttavia, essendo il voltmetro dotato di resistenza interna r_V , quando esso è collegato ai capi di R_4 occorre considerare un circuito equivalente in cui in luogo di R_4 abbiamo la resistenza R_4^p parallelo delle resistenze R_4 e r_V :

$$R_4^p = \frac{R_4 r_V}{R_4 + r_V} \quad (10)$$

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff ad ognuna di queste maglie assumendo delle correnti di maglia fittizie I_a e I_b tutte circolanti in senso orario.

$$\begin{cases} I_a R_1 + (I_a - I_b) R_3 = f \\ (I_b - I_a) R_3 + I_b R_2 + I_b R_4^p = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Risolvendo per le incognite I_a ed I_b si ottiene:

$$\begin{cases} I_a = \frac{R_2 + R_3 + R_4^p}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4^p) + R_1 R_3} f \\ I_b = \frac{R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4^p) + R_1 R_3} f \end{cases} \quad (12)$$

La corrente che circola nella resistenza R_4^p è I_b . Di conseguenza, la tensione V_4 misurata dal voltmetro è data da $V_4 = I_b R_4^p$. Tale espressione ci permette di esprimere la forza elettromotrice erogata da generatore f in funzione di V_4 :

$$f = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4^p) + R_1 R_3}{R_3 R_4^p} V_4 \approx 20.2V \quad (13)$$

b) La potenza W_g erogata dal generatore risulta essere:

$$W_g = f I_a = \frac{R_2 + R_3 + R_4^p}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4^p) + R_1 R_3} f^2 \quad (14)$$

che tenendo conto della (13) diventa:

$$W_g = \frac{(R_2 + R_3 + R_4^p)[(R_1 + R_3)(R_2 + R_4^p) + R_1 R_3]}{(R_3 R_4^p)^2} V_4^2 \approx 3.7W \quad (15)$$

- c) La potenza W_V assorbita dal voltmetro è pari al prodotto della tensione V_4 per l'intensità di corrente I_V che scorre nel voltmetro. Essendo $I_V = V_4/r_V$ si ottiene:

$$W_V = I_V V_4 = \frac{V_4^2}{r_V} \approx 38.4 \text{mW} \quad (16)$$

- d) Nel momento in cui il voltmetro viene collegato in parallelo alla resistenza R_3 , le correnti I_a e I_b sono ancora date dalle (12) a patto di effettuare in esse le sostituzioni $R_4^p \rightarrow R_4$ e $R_3 \rightarrow R_3^p$ dove R_3^p rappresenta il parallelo delle resistenze R_3 e r_V . La corrente I_3^p che scorre in R_3^p risulta essere la differenza tra le correnti I_a e I_b :

$$I_3^p = I_a - I_b = \frac{R_2 + R_4}{(R_1 + R_3^p)(R_2 + R_4) + R_1 R_3^p} f \quad (17)$$

da cui si ricava che la tensione misurata dal voltmetro è:

$$V_3^p = I_3^p R_3^p = \frac{(R_2 + R_4) R_3^p}{(R_1 + R_3^p)(R_2 + R_4) + R_1 R_3^p} f \quad (18)$$

Sostituendo in tale espressione il valore di f dato dalla (13) si ottiene $V_3^p = 10.8 \text{V}$.

Esercizio 3

- a) Il campo magnetico lungo l'asse del disco in rotazione può essere calcolato considerando il disco come formato da un insieme di spire circolari di raggio r e larghezza dr . In tal modo il disco risulta composto da un susseguirsi di tante spire di larghezza infinitesima che al variare del proprio raggio vanno via via a ricoprire l'intera sua superficie. Indichiamo con S la generica spira di raggio r e larghezza dr . La carica dq contenuta in S è data da:

$$dq = \sigma_0 dS = 2\pi\sigma_0 r dr \quad (19)$$

con σ_0 densità superficiale di carica del disco. Si noti che nello scrivere la (19) si è tenuto conto che la superficie della spira S è data dall'area della corona circolare di raggio r e larghezza dr ossia $dS = 2\pi r dr$. Poiché la carica totale posseduta dal disco è Q_0 dall'ipotesi di distribuzione di carica uniforme si ricava:

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{\pi R^2} \quad (20)$$

Sostituendo tale espressione nella (19) si ottiene:

$$dq = \frac{2Q_0}{R^2} r dr \quad (21)$$

Se il disco viene messo in rotazione con velocità angolare ω costante, la sua distribuzione di carica dipende dal tempo e quindi costituisce una corrente elettrica. In particolare, la corrente elettrica dI corrispondente alla carica contenuta nella spira S (in rotazione con velocità angolare ω) è data dal rapporto della carica in essa contenuta dq e il periodo T del suo moto rotatorio. Ricordando che $T = 2\pi/\omega$ si ha:

$$dI = \frac{Q_0 \omega}{\pi R^2} r dr \quad (22)$$

Il campo magnetico generato da un spira circolare di raggio R_s percorsa da una corrente I_s in corrispondenza del proprio asse ad una distanza z dal suo centro si può facilmente calcolare utilizzando la prima legge di Laplace:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_s R_s^2}{(R_s^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (23)$$

dove \hat{k} rappresenta il versore dell'asse della spira.

Per la spira S la (23) si scrive:

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dI}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi R^2} \frac{r^3 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (24)$$

Per ottenere il campo magnetico totale generato lungo l'asse del disco occorre integrare la (24) tra 0 e R :

$$\vec{B}(z) = \int d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi R^2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (25)$$

Eseguendo l'integrale per parti si ottiene facilmente:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi R^2} \left[\frac{2z^2 + r^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R \hat{k} = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi R^2} \left[\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right] \hat{k} \quad (26)$$

- b) Il modulo $d\vec{m}$ del momento magnetico della spira S è per definizione un vettore il cui modulo è pari al prodotto della corrente che circola in S (dI) per l'area racchiusa da S (πr^2):

$$dm = dI \pi r^2 = \frac{Q_0 \omega}{R^2} r^3 dr \quad (27)$$

La direzione di $d\vec{m}$ risulta perpendicolare al piano della spira e il verso è quello che vede circolare nella spira la corrente in senso antiorario. Se, quindi, supponiamo che il disco ruoti nel piano xy in senso antiorario allora $d\vec{m}$ è diretto come l'asse z e quindi possiamo scrivere:

$$d\vec{m} = dI \pi r^2 \hat{k} = \frac{Q_0 \omega}{R^2} r^3 dr \hat{k} \quad (28)$$

essendo \hat{k} il versore dell'asse z .

Il momento magnetico totale \vec{m} del disco si ottiene integrando la (28) con r che varia da 0 a R :

$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \frac{Q_0 \omega}{R^2} \int_0^R r^3 dr \hat{k} = \frac{Q_0 \omega R^2}{4} \hat{k} \quad (29)$$

- c) Il momento \vec{M} (rispetto al centro del disco) delle forze magnetiche che agiscono sul disco in rotazione dovute al campo esterno \vec{B}_0 è dato da:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0 = \frac{Q_0 \omega R^2}{4} \hat{k} \times \vec{B}_0 \quad (30)$$

Tale momento tende ad allineare l'asse di rotazione del disco con la direzione del campo \vec{B}_0 . Si noti che nel prodotto vettoriale $\hat{k} \times \vec{B}_0$ non contribuisce la componente di \vec{B}_0 ortogonale al piano del disco (essendo diretta come \hat{k}). Di conseguenza, se indichiamo con \vec{B}_0^{\parallel} la componente di \vec{B}_0 nel piano del disco (ossia nel piano xy) avremo $\hat{k} \times \vec{B}_0 = \hat{k} \times \vec{B}_0^{\parallel}$. Se, per semplicità scegliamo l'asse x diretto lungo \vec{B}_0^{\parallel} avremo:

$$\vec{M} = \frac{Q_0 \omega R^2}{4} \hat{k} \times \vec{B}_0^{\parallel} = \frac{Q_0 B_0^{\parallel} \omega R^2}{4} \hat{k} \times \hat{i} = \frac{Q_0 B_0^{\parallel} \omega R^2}{4} \hat{j} \quad (31)$$

dove con \hat{i} e \hat{j} sono stati indicati rispettivamente i versori dell'asse x e y .

Come si vede dalla (31) il momento che agisce sul disco ha un'unica componente positiva lungo l'asse y e quindi esso tende a ruotare il disco in senso antiorario intorno all'asse y . In

tal modo l'asse di rotazione del disco (diretto inizialmente lungo z) tende ad allinearsi con l'asse x ossia con la direzione in cui è diretta la componente del campo esterno \vec{B}_0 nel piano xy .

Una volta che il disco si è portato in rotazione intorno all'asse x il suo momento magnetico diventa:

$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \frac{Q_0\omega}{R^2} \int_0^R r^3 dr \hat{k} = \frac{Q_0\omega R^2}{4} \hat{i} \quad (32)$$

e quindi il momento delle forze magnetiche che agiscono su di esso risulta:

$$\vec{M} = \frac{Q_0\omega R^2}{4} \hat{i} \times \vec{B}_0^{\parallel} = \frac{Q_0 B_0^{\parallel} \omega R^2}{4} \hat{i} \times \hat{i} = \vec{0} \quad (33)$$

Essendo nullo tale momento, l'asse di rotazione del disco resta orientato indefinitamente lungo l'asse x .

Esercizio 4

- a) Descriviamo il problema in un sistema di riferimento S con asse y diretto lungo la sbarretta A (nel verso che va da C_1 a C_2) quando la molla non risulta né compressa né elongata, asse x parallelo alle guide su cui la sbarretta scorre e diretto da sinistra verso destra e asse z diretto come \vec{B} .

Sulla sbarretta agisce la forza elastica \vec{F}_e diretta orizzontalmente. In particolare quando la sbarretta nel sistema S occupa la posizione determinata dall'ascissa x avremo:

$$\vec{F}_e = -kx\hat{i} \quad (34)$$

dove \hat{i} rappresenta il versore dell'asse x .

Quando la sbarretta si muove sotto l'azione della forza elastica si ha una variazione del flusso Φ del campo magnetico \vec{B} attraverso la superficie concatenata al circuito formato dalla resistenza R , le guide orizzontali e la sbarretta. Di conseguenza, in tale circuito si genera una forza elettromotrice indotta f_i che fa circolare una corrente $i = f_i/R$. Una volta che i circola nel circuito e quindi attraverso la sbarretta A su di essa agisce anche una forza magnetica \vec{F}_m .

Il flusso Φ quando la sbarretta occupa la posizione x è dato da:

$$\Phi = BL(d+x) \quad (35)$$

dove d indica la distanza tra la posizione della sbarretta quando esse si trova in $x = 0$ e tratto del circuito parallelo alla sbarretta e contenente la resistenza R .

La forza elettromotrice indotta nel circuito f_i è data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} \quad (36)$$

La corrente indotta nel circuito risulta quindi:

$$i = \frac{f_i}{R} = -\frac{BL}{R}\frac{dx}{dt} \quad (37)$$

La forza magnetica che agisce sulla sbarretta percorsa dalla corrente i immersa nel campo magnetico \vec{B} è data dalla seconda legge di Laplace:

$$\vec{F}_m = \int_0^L i d\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{B^2 L^2}{R} \frac{dx}{dt} \hat{i} \quad (38)$$

L'equazione del moto della sbarretta risulta quindi:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = m\vec{a} \quad (39)$$

dove \vec{a} rappresenta l'accelerazione della sbarretta.

Tenendo conto delle (34) e (38) la (39) diventa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B^2L^2}{mR} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (40)$$

b) Ponendo $\omega^2 = k/m$ e $\omega_d = B^2L^2/mR$ la (40) si scrive:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_d \frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0 \quad (41)$$

Tale equazione rappresenta un oscillatore smorzato quando l'equazione algebrica associata ammette soluzioni complesse e coniugate. In particolare questo accade quando:

$$\omega_d^2 - 4\omega^2 < 0 \quad \rightarrow \quad \omega_d^2 < 4\omega^2 \quad (42)$$

Ricordando le espressioni di ω_d e ω si ottiene:

$$\frac{B^4L^4}{m^2R^2} < 4\frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad B < \frac{\sqrt[4]{4mkR^2}}{L} \quad (43)$$

da cui si deduce che:

$$B_{max} = \frac{\sqrt[4]{4mkR^2}}{L} \approx 3.36T \quad (44)$$

c) Se $B = B_{max}/2 < B_{max}$ il moto è oscillatorio smorzato. In tal caso il moto della sbarretta è dato da:

$$x(t) = \delta e^{-\omega_d t/2} \cos \omega t \quad (45)$$

Si noti come a $t = 0$ si ha $x(0) = \delta$ che corrisponde alla posizione iniziale delle sbarretta.

La (45) rappresenta un oscillatore armonico oscillante alla frequenza ω la cui ampiezza decresce esponenzialmente con tempo secondo la legge:

$$X(t) = \delta e^{-\omega_d t/2} \quad (46)$$

Di conseguenza l'ampiezza delle oscillazione si riduce del 95% quando:

$$\delta e^{-\omega_d \tau/2} = 0.95\delta \quad (47)$$

Risolvendo per τ si ottiene:

$$\tau = -\frac{2}{\omega_d} \ln 0.95 = -\frac{2mR}{B^2L^2} \ln 0.95 = -\frac{8mR}{B_{max}^2L^2} \ln 0.95 = -4\sqrt{\frac{m}{k}} \ln 0.95 \approx 2.9\text{ms} \quad (48)$$