**Prima Prova Intercorso Fisica 1**
**Corso di Laurea in Matematica (LM-35)**
9 maggio 2022

## Esercizio 1

**a)** Consideriamo un sistema di riferimento con origine nella posizione occupata dal cannone e con asse $x$ orizzontale e diretto dal cannone verso il bersaglio e asse $y$ verticale diretto dal basso verso l'alto. In tale sistema di riferimento le leggi orarie del proiettile e del bersaglio sono:

*Proiettile*

$$a_{p_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{p_x}(t) = v\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad x_P(t) = v\cos\alpha t \tag{1}$$

$$a_{p_y} = -g \quad \Rightarrow \quad v_{p_y}(t) = -gt + v\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\alpha t \tag{2}$$

*Bersaglio*

$$a_{b_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{b_x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_b(t) = d \tag{3}$$

$$a_{b_y} = -g \quad \Rightarrow \quad v_{b_y}(t) = -gt \quad \Rightarrow \quad y_b(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \tag{4}$$

Le condizioni che assicurano che il proiettile colpisca il bersaglio sono $x_p(t) = x_b(t)$ e $y_p(t) = y_b(t)$. Da queste due condizioni possiamo ricavare l'istante in cui il proettile colpisce il bersaglio ($t_0$) e l'angolo $\alpha_0$ che assicura lo scontro:

$$\begin{cases} t_0 = \dfrac{d}{v\cos\alpha_0} = \dfrac{d}{v}\sqrt{1+\tan^2\alpha_0} = \dfrac{\sqrt{d^2+h^2}}{v} \\ \tan\alpha = \dfrac{h}{d} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \arctan\left(\dfrac{h}{d}\right) \approx 3.81^\circ \end{cases} \tag{5}$$

Si noti come l'angolo $\alpha_0$ trovato non dipende dalla velocità iniziale $v$ del proiettile e si riferisce al cannone puntato contro il bersaglio nella sua posizione iniziale.

**b)** Per ottenere il modulo delle velocità $v_p$ e $v_b$ nell'istante in cui il proiettile colpisce il bersaglio basta sostituire l'espressione trovata per $t_0$ nelle equazioni che esprimono la variazione della velocità di proiettile e bersaglio rispetto al tempo precedentemente ricavate:

$$v_p = \sqrt{v_{p_x}^2(t_0) + v_{p_x}^2(t_0)} = \sqrt{v^2 + \frac{g^2}{v^2}(d^2+h^2) - 2gh} \approx 149.7\text{m/s} \tag{6}$$

$$v_b = \sqrt{v_{b_x}^2(t_0) + v_{b_x}^2(t_0)} = gt_0 = \frac{gd}{v\cos\alpha_0} = \frac{g}{v}\sqrt{d^2+h^2} \approx 9.8\text{m/s} \tag{7}$$

**c)** Come già osservato precedentemente l'angolo $\alpha_0$ per cui il proiettile colpisce il bersaglio è indipendente dalla velocità iniziale del proiettile. Pertanto se la velocità iniziale del prioettile è tale da far raggiungere al proiettile la verticale su cui cade il bersaglio (in un qualsiasi istante) sicuramente il proiettile colpirà il bersaglio. Di conseguenza ricaviamo che la velocità minima $v_0$ è quella per cui la gittata del proiettile è pari a $d$:

$$\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha_0) = d \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{dg}{\sin(2\alpha_0)}} = \sqrt{\frac{d^2+h^2}{2h}g} \approx 105.3\text{m/s} \tag{8}$$

**Esercizio 2**

**a)** Essendo le 4 aste omogenee, il centro di massa di ciascuna di esse si trova nel punto medio della corrispondente asta. Siano $c_{AB}$, $c_{BC}$, $c_{CD}$ e $c_{DA}$ i 4 centri di massa di ciascuna delle 4 aste. Le loro coordintate nel sistema di riferimento indicato sono:

$$c_{AB} \equiv \left(0, \frac{l}{2}\right) \qquad c_{BC} \equiv \left(\frac{l}{2}, l\right) \qquad c_{CD} \equiv \left(l, \frac{l}{2}\right) \qquad c_{DA} \equiv \left(\frac{l}{2}, 0\right) \tag{9}$$

Per calcolare la posizione del centro di massa del telaio possiamo quindi immaginare che avere 4 punti materiali nelle posizioni $c_{AB}$, $c_{BC}$, $c_{CD}$ e $c_{DA}$ di massa pari alla massa della corrispondente asta:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_{AB}m_{AB} + x_{BC}m_{BC} + x_{CD}m_{CD} + x_{DA}m_{DA}}{m_{AB} + m_{BC} + m_{CD} + m_{DA}} = \frac{5}{12}l \approx 4.2\text{cm} \\ y_c &= \frac{y_{AB}m_{AB} + y_{BC}m_{BC} + y_{CD}m_{CD} + y_{DA}m_{DA}}{m_{AB} + m_{BC} + m_{CD} + m_{DA}} = \frac{5}{12}l \approx 4.2\text{cm} \end{aligned} \tag{10}$$

**b)** Le forze che agiscono sul telaio sono la forza peso (che possiamo immaginare applicata nel centro di massa precedentemente calcolato), la forza $F$ applicata alla distanza $x$ dal vertice $B$ e la reazione vincolare esercitata dal cuneo sul telaio nel vertice $A$. Affinché il telaio sia in equilibrio nella posizione indicata, sia il risultate delle forze esterne che il momento delle forze esterne devono essere nulli. Se decidiamo di calcolare il momento rispetto al polo situato nel punto $A$ avremo (si tenga conto che la massa totale del telaio è pari a $3m$):

$$\begin{cases} N - 3mg + F = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 3mg - F \\ M_A = 3x_c mg - xF = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3x_c mg}{F} = \dfrac{5x_c mg}{4F} \approx 3.06\text{cm} \end{cases} \tag{11}$$

**c)** Quando la forza $F$ viene rimossa, il momento delle forze esterne non è più nullo e pertanto il telaio ruota intorno al punto $A$ con un'accelerazione angolare calcolabile attraverso la seconda equazione cardinale:

$$M_A = I_A \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{M_A}{I_A} = \frac{3x_c mg}{I_A} = \frac{5}{4}\frac{mgl}{I_A} \tag{12}$$

dove con $\alpha$ abbiamo indicato l'accelerazione angolare del telatio e con $I_A$ il suo momento di inerzia rispetto ad una asse passante per $A$. Per calcolare $I_A$ basta sommare i momenti di inerzia delle singole aste (tutti calcolati rispetto ad $A$). Considerando che il momento di inerzia (rispetto al centro di massa) di un'asta omogenea di massa $m$ e di lunghezza $l$ è dato da $ml^2/12$, applicando il teorema di Huygens-Stainer si ottiene:

$$I_A = 2\left(m\frac{l^2}{4} + m\frac{l^2}{12}\right) + 2\left(\frac{m}{2}\frac{5l^2}{4} + \frac{m}{2}\frac{l^2}{12}\right) = 2ml^2 \tag{13}$$

Da cui si ottiene:

$$\alpha = \frac{5}{8}\frac{g}{l} \approx 61.3\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \tag{14}$$

**Esercizio 3**

**a)** Consideriamo positiva la direzione in cui $A$ scende lungo il piano inclinato. Imponendo che il risultante delle forze agenti sui corpi $A$ e $B$ sia nullo (condizione di equilibrio) si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} m_A g \sin\alpha - \mu_S m_A g \cos\alpha - \tau = 0 \\ \tau - \mu_S m_B g = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Da cui si ricava:

$$\mu_s = \mu_{min} = \frac{m_A \sin\alpha}{m_A \cos\alpha + m_B} \approx 0.24 \tag{16}$$

**b)** Se $\mu_S < \mu_{min}$ la forza di attrito statico non riesce a bilanciare le altre forze e quindi non c'è equilibrio. In tal caso entrambi i corpi $A$ e $B$ si muoveranno con la stessa accelerazione $a$ e le loro equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m_A g \sin\alpha - \mu_D m_A g \cos\alpha - \tau = m_A a \\ \tau - \mu_D m_B g = m_B a \end{cases} \tag{17}$$

Risolvendo tale sistema per le due incognite $a$ e $\tau$ otteniamo:

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_A \sin\alpha - \mu_D (m_A \cos\alpha + m_B)}{m_A + m_B} g \approx 1.3 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ \tau = \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B} g \left[\sin\alpha - \mu_D (1 - \cos\alpha)\right] \approx 27.5\mathrm{N} \end{cases} \tag{18}$$