Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
20 settembre 2022

Esercizio 1

a) Indichiamo con τ_{12} e τ_{23} i moduli delle tensioni dei fili tra m_1 e m_2 e tra m_2 e m_3 rispettivamente. Le masse m_1, m_2 e m_3 sono in equilibrio se il risultante delle forze applicate su di esse è nullo. Le componenti delle forze ortogonali alla superficie del blocco non sono rilevanti ai fini della determinazione della condizione di equilibrio richiesta ma solo per determinare la reazione vincolare esercitata dal blocco sulle tre masse. Concentriamoci, quindi, sulle componenti delle forze parallele alla superficie del blocco. Per far ciò consideriamo la direzione individuata dai fili inestendibili che collegano le tre masse scegliendo come positivo il verso di percorrenza che va dalla massa m_1 alla massa m_3. Proiettando le varie forze in gioco lungo tale direzione e imponendo che i corrispondenti risultanti siano nulli si ottengono le seguenti condizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\alpha + \tau_{12} = 0 \\ -\tau_{12} + \tau_{23} = 0 \\ -\tau_{23} + m_3 g \sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Risolvendo per m_3 si ottiene la condizione di equilibrio cercata che risulta essere $m_3 = m_1 = 5\text{kg}$.

Alla stessa conclusione si poteva facilmente arrivare anche basandosi sulla simmetria del problema in quanto la massa m_2 muovendosi in orizzontale non gioca alcun ruolo nel determinare l'equilibrio tra le masse m_1 e m_3 (ovviamente questo è vero solo se non vi è attrito tra m_2 e blocco). Inoltre, essendo il blocco un trapezio isoscele gli angoli alla sua base sono uguali e quindi è chiaro che l'equilibrio può sussistere solo se il modulo della forza peso agente su m_1 e m_3 è lo stesso (ossia se $m_3 = m_1$).

b) Quando il blocco si muove con accelerazione A orizzontale diretta da B verso C, il sistema di riferimento solidale con il blocco non è inerziale. Di conseguenza, su ognuna delle 3 masse, oltre alle forze viste precedentemente, agisce anche una forza apparente diretta orizzontalmente che va da C verso B. Aggiungendo tali forze apparenti le (1) diventano:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\alpha - m_1 A\cos\alpha + \tau_{12} = 0 \\ -\tau_{12} - m_2 A + \tau_{23} = 0 \\ -\tau_{23} - m_3 A\cos\alpha + m_3 g \sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Da cui risolvendo per m_3 si ottiene:

$$m_3 = \frac{m_1(g\sin\alpha + A\cos\alpha) + m_2 A}{g\sin\alpha - A\cos\alpha} \approx 11.20\text{kg} \tag{3}$$

Se la massa $m_3 = 20\text{kg}$ l'equilibrio non può sussistere e, di conseguenza, le tre massa si muoveranno con la stessa accelerazione a_R (relativamente al blocco) nel verso che va dalla massa m_1 alla massa m_3. Per determinare il valore di a_R basta riadattare le (2) al caso in cui le tre masse si muovono tutte con accelerazione a_R:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\alpha - m_1 A\cos\alpha + \tau_{12} = m_1 a_R \\ -\tau_{12} - m_2 A + \tau_{23} = m_2 a_R \\ -\tau_{23} - m_3 A\cos\alpha + m_3 g \sin\alpha = m_3 a_R \end{cases} \tag{4}$$

Risolvendo per a_R si ottiene:

$$a_R = \frac{m_3(g\sin\alpha - A\cos\alpha) - m_1(g\sin\alpha + A\cos\alpha) - m_2 A}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 1.84\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{5}$$

Esercizio 2

a) Le forze che agiscono sull'asta A sono:

- la forza peso $\vec{F}_A = m_A\vec{g}$ (verticale e diretta verso il basso);
- la reazione vincolare $\vec{R}_B$ esercitata dal blocco B nel punto di contatto tra asta e blocco e diretta lungo il raggio della superficie semisferica del blocco B;
- la reazione vincolare $\vec{R}_G$ esercitata dalla guida G sull'asta A. Poiché G vincola l'asta a muoversi solo verticalmente, è chiaro che $\vec{R}_G$ può avere solo componenti orizzontali (non essendoci attrito tra G e A).

Le forze che agiscono sul blocco B sono:

- la forza peso $\vec{F}_B = m_B\vec{g}$ (verticale e diretta verso il basso);
- la forza $-\vec{R}_B$ esercitata dall'asta A sul blocco B per effetto del terzo principio della dinamica;
- la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dal piano orizzontale (verticale e diretta verso l'alto);
- la forza di attrito statico $\vec{F}_S$ che si oppone allo scorrimento del blocco B sul piano orizzontale. Tale forza è diretta orizzontalmente (in quanto il blocco B può muoversi sono orizzontalmente) e ha un modulo il cui massimo valore è dato da $\mu_S N$.

Affinché il sistema asta+blocco sia in equilibrio i risultanti delle forze agenti sull'asta e sul blocco devono essere entrambi nulli pertanto:

$$\begin{cases} \vec{F}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_G = \vec{0} \\ \vec{F}_B - \vec{R}_B + \vec{N} + \vec{F}_S = \vec{0} \end{cases} \tag{6}$$

Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro della semicirconferenza del blocco B e con assi x ed y diretti rispettivamente nella direzione orizzontale (lungo il piano orizzontale da sinistra verso destra) e verticale (perpendicolare al piano orizzontale e diretto verso l'alto). Proiettando le (6) lungo le direzioni x e y otteniamo le seguenti relazioni scalari:

$$\begin{cases} R_B\cos\alpha - m_A g = 0 \\ R_B\sin\alpha - R_G = 0 \\ N - R_B\cos\alpha - m_B g = 0 \\ F_S - R_B\sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Queste 4 equazioni ci permettono di ricavare il modulo della forza di attrito statico F_S necessaria per garantire l'equilibrio del sistema e il modulo delle reazioni vincolari R_B, R_G e N (in funzione dell'angolo α):

$$\begin{cases} R_B = \dfrac{m_A g}{\cos\alpha} \\ R_G = m_A g\tan\alpha \\ N = (m_A + m_B)g \\ F_S = m_A g\tan\alpha \end{cases}$$

Poichè deve valere la condizione $F_S \leq \mu_s N$ i valori dell'angolo α per cui il sistema è in equilibrio sono dati da:

$$m_A\tan\alpha \leq \mu_S(m_A + m_B) \quad \rightarrow \quad \alpha \leq \arctan\left(\mu_S\frac{m_A + m_B}{m_A}\right) \approx 67.4^{\circ} \tag{8}$$

b) Se non sussiste attrito tra piano orizzontale e blocco B, l'unica possibile posizione di equilibrio è quella per cui $\alpha = 0$. Di conseguenza, se si lascia libero il sistema di muoversi a partire da una posizione iniziale $\alpha_0 \neq 0$, l'asta A scende verso il basso verticalmente per l'azione combinata del vincolo G e dalla forza peso, mentre il blocco B trasla sul piano orizzontale. Durante il moto, pertanto, l'asta trasla lungo la direzione y del sistema di riferimento precedentemente introdotto, mentre il blocco trasla lungo la direzione x.

Siano (x_0, y_0) le coordinate del punto di contatto tra asta e blocco in corrispondenza della posizione iniziale (ossia quando l'asta forma un angolo pari a α_0 rispetto alla verticale) e (x, y) le coordinate dello stesso punto in corrispondenza di un generico angolo $\alpha < \alpha_0$ (in quanto come già detto l'asta scende verticalmente per azione della forza peso). Da semplici considerazioni geometriche si ricava che $x = -r \sin\alpha$ e $y = -r\cos\alpha$.

Non essendoci attriti l'energia totale meccanica si conserva e, quindi, tenendo conto che inizialmente sia l'asta che il blocco si suppongono fermi possiamo scrivere:

$$m_A g r(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \tag{9}$$

dove le quantità v_A e v_B rappresentano i moduli della velocità dell'asta e del blocco in corrispondenza dalla posizione finale. Si noti che l'energia potenziale del blocco B non varia durante il moto in quanto esso si muove orizzontalmente. Tenendo conto dei vincoli del sistema, si vede che in corrispondenza di un abbassamento verticale dell'asta di distanza pari a $dy = y - y_0 = r(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$, il blocco B è vincolato a traslare orizzontalmente per una distanza pari a $dx = x_0 - x = r(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)$. Derivado tali quantità rispetto al tempo otteniamo:

$$\begin{cases} v_A = \dfrac{dy}{dt} = -r\omega \sin\alpha \\ v_B = \dfrac{dx}{dt} = -r\omega\cos\alpha \end{cases}$$

dove $\omega = \dot{\alpha}$. Effettuando il rapporto di tali moduli si ricava $v_B = v_A \cot\alpha$. Sostituendo nella (9) dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$v_A = \sqrt{\frac{2m_A g r(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{m_A + m_B \cot^2\alpha}} \tag{10}$$

Sostituendo infine $\alpha_0 = \pi/3$ e $\alpha = \pi/4$ si ottiene $v_A \approx 0.45\text{m/s}$

Esercizio 3

L'aria inizialmente si trova in uno stato di cui sono noti temperatura (T_1), pressione (P_1) e volume (V_1). Applicando la legge di stato dei gas perfetti siamo quindi in grado di ricavare la massa dell'acqua (tenendo conto delle unità di misure in cui è data la costante universale dei gas R):

$$m = \frac{P_1 V_1}{R T_1} \approx 6.98\text{kg} \tag{11}$$

Trasformazione isobara

La pressione finale è uguale a quella iniziale e quindi $P_2 = P_1 = 58$atm da cui si ricava che il rapporto T/V deve rimanere costante durante la trasformazione. Essendo noto il volume finale V_2 siamo in grado di calcolare la restante variabile termodinamica che caratterizza lo stato finale, ossia, la temperatura T_2:

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2} \quad \rightarrow \quad T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 \approx 879.5\text{K}. \tag{12}$$

La quantità di calore scambiato e il lavoro effettuato durante la trasformazione sono dati da:

$$\begin{cases} Q = m c_p (T_2 - T_1) \approx 4115.8\text{kJ} \\ L = P_2 (V_2 - V_1) \approx 1175.4\text{kJ} \end{cases} \tag{13}$$

Per calcolare la variazione di energia interna possiamo equivalentemente utilizzare il primo principio ($\Delta U = Q - L \approx 2940.5$kJ) oppure la formula $\Delta U = m c_v (T_2 - T_1)$.

Trasformazione isoterma

Nel caso della trasformazione isoterma la temperatura finale (T_2) è uguale a quella iniziale (T_1) e quindi $T_2 = 293.15$K. Inoltre applicando la legge di Boyle possiamo ricavare al pressione P_2 essendo noti P_1, V_1 e V_2:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad \rightarrow \quad P_2 = \frac{V_1}{V_2} P_1 \approx 1958.95\text{kPa} \tag{14}$$

Essendo la trasformazione isoterma, la variazione di energia interna è nulla e quindi $\Delta U = 0$. Di conseguenza dal primo principio della termodinamica ricaviamo che $Q = L$. Ci basta quindi calcolare il lavoro effettuato durante la trasformazione:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} P dV = m R T_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = m R T_2 \log \frac{V_2}{V_1} \approx 645.6\text{kJ} \tag{15}$$

Esercizio 4

Per risolvere l'esercizio basta utilizzare l'equazione di Bernulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \tag{16}$$

dove i pedici 1 e 2 indicano rispettivamente le quantità dell'acqua nel tubo di diametro $d_1 = 10$cm e quelle nel tubo di diametro $d_2 = 5$cm. Poiché il tubo è orizzontale $h_1 = h_2$ e quindi:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} \tag{17}$$

Inolte, dalla costanza della portata risulta:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2 \tag{18}$$

dove S_1 ed S_2 indicano le sezioni trasverali del tubo. Sostituendo la (18) nella (17) si ottiene:

$$v_2 = d_1^2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{(d_1^4 - d_2^4)\rho}} \approx 102.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{19}$$