

Prova di Esame di Fisica Generale II
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
24 settembre 2026

Esercizio 1

- a) Considerata la geometria del problema, possiamo senz'altro dire che il campo elettrico in corrispondenza di un qualsiasi punto P dell'asse x è diretto orizzontalmente.

Indichiamo, infatti, con $d\vec{E}_+$ il campo elettrico generato dalla carica dq contenuta nel generico elemento infinitesimo dl_+ della distribuzione di carica lineare che si trova nel semipiano $y > 0$. Vista la forma della distribuzione di carica, per ogni elemento dl_+ è sempre possibile trovarne un altro dl_- simmetrico rispetto all'asse x che a sua volta genera nel punto P il campo $d\vec{E}_-$. La distanza del punto P da dl_+ e dl_- è evidentemente la stessa e, quindi, i moduli dei campi $d\vec{E}_+$ e $d\vec{E}_-$ sono uguali. Ne segue che il campo elettrico $d\vec{E} = d\vec{E}_+ + d\vec{E}_-$ risulta avere componente non nulla solo lungo l'asse x . In altri termini, per ragioni di simmetria, i campi $d\vec{E}_+$ e $d\vec{E}_-$ hanno componenti lungo y uguali e opposte che nella somma vettoriale si annullano. Le componenti lungo x , invece, sono uguali e concordi e quindi si sommano. Risulta quindi:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_+ + d\vec{E}_- = 2dE_x \hat{i} \quad (1)$$

dove con dE_x si è indicata la componente x di $d\vec{E}_+$ e $d\vec{E}_-$ e con $\hat{i}$ il versore dell'asse x .

Introducendo la densità di carica lineare λ della distribuzione di carica semicircolare, la carica dq contenuta in dl_+ è data da $dq = \lambda dl_+$. Il campo elettrico $d\vec{E}_+$ generato da dq risulta essere quello di una carica puntiforme e quindi:

$$d\vec{E}_+(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2)$$

dove $\vec{r}'$ rappresenta il vettore posizione di dl_+ .

Se consideriamo punti lungo l'asse x allora $\vec{r} = x\hat{i}$ e inoltre $\vec{r}' = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}$ dove θ è l'angolo che $\vec{r}'$ forma con l'asse x e $\hat{j}$ il versore dell'asse y . Sostituendo tali espressioni nella (2) si ottiene:

$$d\vec{E}_+(x) = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + R^2 - 2xR\cos\theta]^{3/2}} [(x - R\cos\theta)\hat{i} - R\sin\theta\hat{j}] \quad (3)$$

dove si è tenuto conto che $dl_+ = R d\theta$. Di conseguenza la componente lungo x del vettore dato dalla (3) risulta:

$$dE_x = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - R\cos\theta}{[x^2 + R^2 - 2xR\cos\theta]^{3/2}} \quad (4)$$

Ricordando la (1) otteniamo:

$$d\vec{E}(x) = \frac{\lambda R d\theta}{2\pi\epsilon_0} \frac{x - R\cos\theta}{[x^2 + R^2 - 2xR\cos\theta]^{3/2}} \hat{i} \quad (5)$$

Il campo nell'origine del sistema di riferimento risulta essere:

$$d\vec{E}(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cos\theta d\theta \hat{i} \quad (6)$$

Integrando, infine sulla semicirconferenza:

$$\vec{E}(0) = \int d\vec{E}(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta d\theta \hat{i} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{i} \quad (7)$$

Si noti che l'integrale si estende da $\pi/2$ a π e non da $\pi/2$ a $3\pi/2$ in quanto nella (1) sono già stati sommati i contributi simmetrici rispetto all'asse x .

Tenendo conto che $\lambda = Q/\pi R$ otteniamo:

$$E(0) = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \approx 2.86 \frac{\text{MV}}{\text{m}} \quad (8)$$

- b) Affinché il campo elettrico totale generato dalla carica puntiforme e della distribuzione di carica semicircolare si annulli nell'origine occorre che il campo generato dalla carica Q_1 nell'origine sia uguale e opposto a quello dato dalla (7). Poiché $Q > 0$ e quindi anche $\lambda > 0$ il campo elettrico (7) risulta diretto come l'asse x . Di conseguenza, il campo $\vec{E}_1(0)$ generato dalla carica Q_1 nell'origine deve essere orizzontale e diretto in verso opposto all'asse x . Essendo $Q_1 > 0$, la carica puntiforme dovrà necessariamente essere disposta sull'asse x (in modo che $\vec{E}_1(0)$ sia orizzontale) in una posizione $x_1 > 0$ (in modo che la direzione di $\vec{E}_1(0)$ risulta opposta a quella dell'asse x). Per determinare x_1 occorre imporre che il modulo di $\vec{E}_1(0)$ sia uguale al modulo di $\vec{E}(0)$ dato dalla (7). È immediato verificare che:

$$\vec{E}_1(0) = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_1^2} \hat{i} \quad (9)$$

Di conseguenza affinché il campo totale nell'origine si annulli deve risultare:

$$\vec{E}_t(0) = \vec{E}(0) + \vec{E}_1(0) = \vec{0} \quad (10)$$

da cui si ricava facilmente:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\pi Q_1}{2Q}} R \approx 79.3 \text{cm} \quad (11)$$

- c) Per ottenere l'espressione richiesta basta integrare la (5) su tutta la distribuzione di carica semicircolare:

$$\vec{E}(x) = \int d\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x - R \cos \theta}{[x^2 + R^2 - 2xR \cos \theta]^{3/2}} d\theta \hat{i} \quad (12)$$

Esercizio 2

Nel circuito le resistenze R_2 e R_3 sono collegate in parallelo mentre le resistenze R_4 e R_5 sono in serie. Poniamo quindi:

$$\begin{cases} R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \\ R_{45} = R_4 + R_5 \end{cases} \quad (13)$$

Le resistenze R_{23} e R_{45} , inoltre, risultano collegate in parallelo. Introduciamo, quindi, la resistenza R_{2345} data da:

$$R_{2345} = \frac{R_{23} R_{45}}{R_{23} + R_{45}} \quad (14)$$

Il circuito dato risulta, pertanto, equivalente ad un circuito con le resistenze R_1 e R_{2345} collegate in serie al generatore f . In tali resistenze scorre quindi la stessa corrente data da:

$$I_1 = \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \quad (15)$$

Ricordando che R_{2345} è il parallelo di R_{23} e R_{45} possiamo ottenere le correnti I_{23} e I_{45} imponendo che le tensioni ai capi di R_{23} e R_{45} siano le stesse e che risulti $I_1 = I_{23} + I_{45}$:

$$\begin{cases} I_1 = I_{23} + I_{45} \\ I_{23}R_{23} = I_{45}R_{45} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{23} = \frac{R_{45}}{R_{23} + R_{45}}I_1 = \frac{R_{45}}{R_{23} + R_{45}} \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \\ I_{45} = \frac{R_{23}}{R_{23} + R_{45}}I_1 = \frac{R_{23}}{R_{23} + R_{45}} \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \end{cases} \quad (16)$$

Analogamente possiamo calcolare le correnti I_2 e I_3 che scorrono in R_2 e R_3 tenendo conto che R_{23} risulta essere il parallelo di R_2 e R_3 :

$$\begin{cases} I_{23} = I_2 + I_3 \\ I_2R_2 = I_3R_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3}I_{23} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{R_{45}}{R_{23} + R_{45}} \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \\ I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3}I_{23} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{R_{45}}{R_{23} + R_{45}} \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \end{cases} \quad (17)$$

Le correnti I_4 e I_5 risultano essere uguali a I_{45} in quanto le resistenze R_4 e R_5 sono collegate in serie:

$$I_4 = I_5 = I_{45} = \frac{R_{23}}{R_{23} + R_{45}} \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \quad (18)$$

a) Sostituendo i valori numerici nelle espressioni ottenute:

$$\begin{cases} I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{R_{45}}{R_{23} + R_{45}} \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \approx 68.4\text{mA} \\ I_4 = \frac{R_{23}}{R_{23} + R_{45}} \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \approx 21.1\text{A} \end{cases} \quad (19)$$

b) La tensione ai capi di R_5 risulta essere:

$$V_5 = I_5R_5 = \frac{R_5R_{23}}{R_{23} + R_{45}} \frac{f}{R_1 + R_{2345}} \approx 1.05\text{V} \quad (20)$$

c) La potenza W erogata dal generatore si calcola nel seguente modo:

$$W = I_1f = \frac{f^2}{R_1 + R_{2345}} \approx 1.81\text{W} \quad (21)$$

Esercizio 3

a) Un filo indefinito percorso da corrente elettrica I costituisce una sorgente di un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ che gode di simmetria cilindrica. Di conseguenza anche il campo generato $\vec{B}$ gode dello stesso tipo di simmetria. Risulta pertanto utile utilizzare le coordinate cilindriche: r (distanza dal filo nel piano perpendicolare al filo), θ angolo nel piano perpendicolare al filo e h distanza lungo il filo. Vista la simmetria cilindrica, il campo $\vec{B}$ dipende solo da r e la sua espressione è data dalla legge di Biot-Savat:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \hat{t} \quad (22)$$

dove $\hat{t}$ rappresenta il versore tangente alla circonferenza di raggio r nel piano perpendicolare al filo. Il verso di $\hat{t}$ si determina in base dalla regola della mano destra: posizionando il pollice della mano destra nel verso in cui scorre la corrente nel filo, il verso di $\hat{t}$ è lo stesso in cui le restanti dita si chiudono.

Nel nostro caso abbiamo due fili 1 e 2 entrambi diretti lungo x . Per quanto detto precedentemente, i campi $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ generati da ciascuno di essi giacciono nel yz . Di conseguenza anche il campo totale $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ ha componenti solo lungo y e z .

Specifichiamo la (22) nel sistema di riferimento dato per il filo 1 che si trova in corrispondenza di $y = d/2$. Siano $\vec{r} \equiv (y, z)$ e $\vec{r}_1 \equiv (d/2, 0)$ rispettivamente i raggi vettori del generico punto nel piano yz e del punto che individua la posizione del filo 1 (si consideri che l'origine del sistema di riferimento dato si trova nel centro dei due fili). Se $\vec{\Delta}_1$ è il vettore che congiunge la posizione del filo 1 al punto individuato da $\vec{r}$ risulta evidentemente $\vec{\Delta}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1 \equiv (y - d/2, z)$ e quindi:

$$\Delta_1 = \sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2} \quad (23)$$

Il versore $\hat{t}_1$ deve essere tangente alle circonferenze nel piano yz (con verso antiorario) e quindi $\hat{t}_1 \equiv (-\sin \theta_1, \cos \theta_1)$ dove θ_1 rappresenta l'angolo tra il vettore $\vec{\Delta}_1$ e l'asse y .

Possiamo pertanto scrivere il campo di induzione magnetica $\vec{B}_1$ generato dal filo 1 nel sistema di riferimento dato come:

$$\vec{B}_1(y, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\Delta_1} \hat{t}_1 = \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{\hat{t}_1}{\sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}} \quad (24)$$

Ragionando in maniera analoga possiamo ricavare il campo $\vec{B}_2$ generato dal filo 2:

$$\vec{B}_2(y, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\Delta_2} \hat{t}_2 = \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{\hat{t}_2}{\sqrt{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}} \quad (25)$$

dove $\hat{t}_2 \equiv (-\sin \theta_2, \cos \theta_2)$ con θ_2 angolo del vettore $\vec{\Delta}_2$ rispetto all'asse y .

Il campo totale di induzione magnetica $\vec{B}$ si ottiene semplicemente sommando i campi generati dai singoli fili. Avremo quindi:

$$\vec{B}(y, z) = \vec{B}_1(y, z) + \vec{B}_2(y, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \left[\frac{\hat{t}_1}{\sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}} + \frac{\hat{t}_2}{\sqrt{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}} \right] \quad (26)$$

Nel nostro caso siamo interessati a calcolare i valori di $\vec{B}$ lungo l'asse z ossia per $y = 0$:

$$\vec{B}(0, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{\hat{t}_1 + \hat{t}_2}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + z^2}} \quad (27)$$

Inoltre, in questa particolare situazione, effettuando semplici ragionamenti geometrici, risulta facile convincersi che gli angoli θ_1 e θ_2 sono tra di loro supplementari e quindi $\theta_2 = \pi - \theta_1$ e, quindi, risulta:

$$\hat{t}_2 \equiv (-\sin \theta_2, \cos \theta_2) = (-\sin(\pi - \theta_1), \cos(\pi - \theta_1)) = (-\sin \theta_1, -\cos \theta_1) \quad (28)$$

Di conseguenza avremo:

$$\hat{t}_1 + \hat{t}_2 \equiv (-2\sin \theta_1, 0) \quad (29)$$

Sostituendo la (29) nella (27):

$$\vec{B}(0, z) = -\frac{I\mu_0}{\pi} \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + z^2}} \hat{j} \quad (30)$$

dove con $\hat{j}$ si è indicato il versore dell'asse y .

Inoltre è facile rendersi conto che $\sin \theta_1 = z/\Delta_1$ e quindi ricaviamo:

$$\vec{B}(0, z) = -\frac{I\mu_0}{\pi} \frac{z}{z^2 + \frac{d^2}{4}} \hat{j} \quad (31)$$

Il campo quindi lungo l'asse z è diretto in verso opposto a quello dell'asse y .

b) Per calcolare il punto dell'asse z in cui $B(0, z)$ è massimo basta imporre:

$$\frac{dB(0, z)}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{I\mu_0}{\pi} \frac{d^2/4 - z^2}{d^2/4 + z^2} = 0 \quad (32)$$

da cui si ricava $z = \pm d/2$.

Il valore massimo del modulo del campo risulta quindi essere:

$$B(0, \pm \frac{d}{2}) = \frac{I\mu_0}{\pi d} \approx 0.1 \text{mT} \quad (33)$$

c) La forza per unità di lunghezza che i due fili si scambiano è data dalla legge di Ampere:

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \approx 0.00125 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (34)$$

Tale forza risulta essere nel piano che contiene i due fili (piano xy) e perpendicolare ad essi. Inoltre visto che i due fili sono percorsi da correnti che circolano nello stesso verso risulta essere attrattiva.

Esercizio 4

a) Come già discusso nel precedente esercizio, il campo magnetico generato dal filo indefinito risulta essere dato dalla legge di Biot-Savat:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \hat{t} \quad (35)$$

Indichiamo con $\Phi_S(\vec{B})$ il flusso del campo magnetico generato dal filo attraverso la superficie S concatenata al circuito triangolare. Per definizione di flusso avremo:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B}(r) \cdot d\vec{S} \quad (36)$$

Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel vertice del triangolo formato dai lati a e b , asse x orizzontale (diretto da sinistra verso destra), asse y verticale (dal basso verso l'alto) e asse z perpendicolare al piano xy che contiene il circuito e uscente da esso.

Si noti che su tutta la superficie individuata dal circuito triangolare i vettori $\vec{B}(r)$ e $d\vec{S}$ sono paralleli. In particolare $\vec{B}(r)$ risulta parallelo all'asse z ma diretto in verso opposto rispetto

a tale asse (regola mano destra). Il vettore $d\vec{S}$, per definizione, è anch'esso perpendicolare al piano xy . Supponiamo inoltre che $d\vec{S}$ sia diretto come l'asse z . L'integrale (36) risulta essere:

$$\Phi_S(\vec{B}) = - \int_S B(r) dS = - \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_S \frac{dS}{d+x} = - \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_S \frac{dx dy}{d+x} \quad (37)$$

dove il segno meno deriva dal fatto che $\vec{B}$ e $d\vec{S}$ hanno verso opposto.

Nel sistema di riferimento scelto il lato obliquo del circuito triangolare ha equazione:

$$Y(x) = -\frac{a}{b}x + a = \frac{a}{b}(b-x) \quad (38)$$

L'integrale (37) diventa quindi:

$$\begin{aligned} \Phi_S(\vec{B}) &= -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_0^b \frac{dx}{d+x} \int_0^Y dy = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \frac{a}{b} \int_0^b \frac{b-x}{d+x} dx = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \frac{a}{b} \int_0^b \frac{b-x-d+d}{d+x} dx \\ &= -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \frac{a}{b} \int_0^b \left(\frac{b+d}{d+x} - 1 \right) dx = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \frac{d+b}{d} - 1 \right] I(t) \end{aligned} \quad (39)$$

In accordo con la legge di Faraday-Neumann-Lenz nel circuito viene indotta una forza elettromotrice f_i data da:

$$f_i = -\frac{d\Phi_S}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \frac{d+b}{d} - 1 \right] \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi\tau} \left[\left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \frac{d+b}{d} - 1 \right] I(t) \quad (40)$$

Applicando la legge di Ohm possiamo ricavare l'espressione dell'intensità di corrente indotta nel circuito triangolare:

$$i(t) = \frac{f_i}{R} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi\tau R} \left[\left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \frac{d+b}{d} - 1 \right] I(t) \quad (41)$$

Di conseguenza:

$$i(t = \tau/2) = -\frac{\mu_0 a}{2\pi\tau R} \left[\left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \frac{d+b}{d} - 1 \right] I_0 e^{-1/2} \approx -69.42 \text{mA} \quad (42)$$

Si noti che il segno meno presente nella (42) è legato al verso di percorrenza della corrente indotta nel circuito triangolare. In particolare poiché si è scelto di orientare $d\vec{S}$ come l'asse z , il valore negativo presente nella (42) ci permette di affermare che nel circuito triangolare scorre una corrente pari a $|i(t = \tau/2)|$ in verso orario.

Tale verso è del tutto compatibile con la legge di Lenz la quale afferma che la forza elettromotrice indotta tende a compensare le variazioni di flusso che l'hanno generata. Con il passare del tempo l'intensità $I(t)$ che scorre nel filo indefinito diminuisce e quindi diminuisce anche $\Phi_S(\vec{B})$ (restando S invariata). Di conseguenza, la corrente indotta deve scorrere nel circuito nel verso in cui il campo magnetico da essa prodotto tende ad aumentare tale flusso. Circolando in senso orario, infatti, genera un campo concorde a quello generato dal filo indefinito contrastando di fatto la diminuzione del flusso netto attraverso S .

b) La potenza dissipata per effetto Joule nel generico istante t risulta essere:

$$W(t) = Ri^2(t) \quad (43)$$

Per ottenere l'energia totale dissipata occorre integrare la (43) in dt da $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty W(t)dt = \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^2}{4\pi^2 \tau^2 R} \left[\left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \frac{d+b}{d} - 1 \right]^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt \\ &= \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^2}{8\pi^2 \tau R} \left[\left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \frac{d+b}{d} - 1 \right]^2 \approx 3.28 \text{ nJ} \end{aligned} \quad (44)$$