

Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
24 settembre 2026

Esercizio 1

- a) Supponiamo di fissare un sistema di riferimento solidale con l'automobile e che quindi trasla orizzontalmente con accelerazione costante $A = g/2$. Tale sistema di riferimento è ovviamente non inerziale. Nello scrive l'equazione del moto del pendolo in tale sistema, pertanto, dobbiamo considerare la forza apparente data da $-m\vec{A}$ dove m è la massa del pendolo. Sul pendolo, inoltre agiscono la forza peso $m\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso e la tensione $\vec{\tau}$ del filo diretta lungo il filo. L'equazione del moto del pendolo nel sistema scelto si scrive pertanto come:

$$m\vec{g} + \vec{\tau} - m\vec{A} = m\vec{a} \quad (1)$$

dove $\vec{a}$ rappresenta l'accelerazione del pendolo nel sistema di riferimento scelto.

Vista la geometria del problema è comodo descrivere il moto attraverso le coordinate polari. Poiché il filo che costituisce il pendolo è inestensibile lo stesso è vincolato a muoversi lungo una circonferenza di raggio l . Di conseguenza l'angolo θ che il pendolo forma rispetto alla direzione verticale descrive completamente il sistema.

Proiettando la (1) nella direzione radiale e tangenziale del moto circolare avremo:

$$\begin{cases} -\tau + mg \cos \theta - mA \sin \theta = ma_r = ml(\dot{\theta})^2 \\ -mg \sin \theta - mA \cos \theta = ma_\theta = ml\ddot{\theta} \end{cases} \quad (2)$$

dove con a_r e a_θ sono state indicate rispettivamente la componente radiale (centripeta) e tangenziale dell'accelerazione del pendolo.

La prima delle (2) permette di ricavare la tensione τ del filo, mentre la seconda ci restituisce l'equazione del moto del pendolo.

Per trovare la posizione θ_0 di equilibrio del pendolo basta sostituire nell'equazione del moto $\theta = \theta_0$ costante. Otteniamo quindi:

$$-mg \sin \theta_0 - mA \cos \theta_0 = -m(g \sin \theta_0 + A \cos \theta_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \tan \theta_0 = -\frac{A}{g} \quad (3)$$

da cui si ricava:

$$\theta_0 = -\arctan\left(\frac{A}{g}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx -26.6^\circ \quad (4)$$

Al fine di studiare le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio individuata dall'angolo θ_0 precedentemente trovato poniamo $\theta = \theta_0 + \beta$ in modo tale che l'angolo β descriva le oscillazioni del pendolo intorno a θ_0 . Sostituendo tale espressione di θ nella seconda delle (2) otteniamo:

$$-g \sin(\theta_0 + \beta) - A \cos(\theta_0 + \beta) = l\ddot{\beta} \quad (5)$$

Utilizzando le formule di addizione di seno e coseno il primo membro diventa:

$$\begin{aligned} & -g(\sin \theta_0 \cos \beta + \cos \theta_0 \sin \beta) - A(\cos \theta_0 \cos \beta - \sin \theta_0 \sin \beta) = \\ & -(g \sin \theta_0 + A \cos \theta_0) \cos \beta - (g \cos \theta_0 - A \sin \theta_0) \sin \beta = \\ & -(g \cos \theta_0 - A \sin \theta_0) \sin \beta = -\sqrt{g^2 + A^2} \sin \beta \end{aligned} \quad (6)$$

dove si è tenuto conto della (3) e delle espressioni del seno e coseno in funzione della tangente. Sostituendo la (6) nella (5) si ottiene facilmente:

$$\ddot{\beta} + \frac{\sqrt{g^2 + A^2}}{l} \sin \beta = 0 \quad (7)$$

Per piccole oscillazioni possiamo scrivere $\sin \beta \approx \beta$ e quindi otteniamo:

$$\ddot{\beta} + \frac{\sqrt{g^2 + A^2}}{l} \beta = 0 \quad (8)$$

Tale equazione rappresenta l'equazione del moto di un oscillatore armonico con pulsazione:

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{g^2 + A^2}}{l} \quad (9)$$

Il periodo delle piccole oscillazioni risulta quindi essere dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + A^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{\sqrt{5}g}} \approx 0.6\text{s} \quad (10)$$

Si noti che se si pone $\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{A}$ tenendo conto che i vettori $\vec{g}$ e $\vec{A}$ sono perpendicolari si ha $g_e = \sqrt{g^2 + A^2}$. Sostituendo nella (8) si ha:

$$\ddot{\beta} + \frac{g_e}{l} \beta = 0 \quad (11)$$

Inoltre l'angolo θ_0 di equilibrio coincide con l'angolo che il vettore $\vec{g}_e$ forma rispetto alla direzione verticale come si evince facilmente dalla (3).

Ricaviamo, pertanto, che tutto va come se il pendolo fosse in un sistema inerziale in cui però l'accelerazione di gravità non è verticale ma risulta essere diretta come $\vec{g}_e$ dato dalla somma vettoriale dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$ e il vettore $-\vec{A}$ legato alla forza apparente.

- b)** Per calcolare le quantità richieste in questo secondo caso generalizziamo le considerazioni appena fatte per il caso precedente. Definiamo, pertanto, il vettore $\vec{g}_e$ come fatto in precedenza:

$$\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{A} \quad (12)$$

Differentemente da prima, i vettori $\vec{g}$ e $\vec{A}$ non sono perpendicolari poiché l'auto sale sulla rampa che risulta essere inclinata di un angolo α rispetto alla direzione orizzontale. Se quindi fissiamo un sistema di riferimento con asse x orizzontale (diretto da sinistra a destra) e asse y verticale (diretto verso l'alto) le componenti dei due vettori risultano essere $\vec{g} = (0, -g)$ ed $\vec{A} = (A \cos \alpha, A \sin \alpha)$ di conseguenza avremo:

$$\vec{g}_e = (-A \cos \alpha, -g - A \sin \alpha) \quad (13)$$

La posizione di equilibrio θ_0 del pendolo quindi risulta essere la stessa del vettore $\vec{g}_e$ e quindi:

$$\tan \theta_0 = -\frac{A \cos \alpha}{g + A \sin \alpha} \quad \rightarrow \quad \theta_0 = -\arctan \left(\frac{A \cos \alpha}{g + A \sin \alpha} \right) = -\arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{5} \right) \approx -19.1^\circ \quad (14)$$

Analogamente il periodo T delle piccole oscillazioni risulta essere:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + A^2 + 2gA\sin\alpha}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{\sqrt{7}g}} \approx 0.55\text{s} \quad (15)$$

Esercizio 2

- a) Affinché il corpo A (puntiforme) resti sempre in contatto con la guida è necessario che la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dalla guida abbia sempre modulo non nullo. Fino a quando il corpo A non raggiunge il punto più basso della circonferenza di raggio R tale condizione è certamente verificata in quanto la forza peso $m\vec{g}$ è diretta verso il basso e quindi la reazione vincolare esercitata dalla guida deve essere sempre di modulo maggiore di zero e diretta perpendicolarmente alla superficie della guida. Successivamente, il corpo A inizia a salire lungo la circonferenza fino eventualmente a raggiungere il suo punto di massima quota P che si trova all'altezza $2R$. Mentre il corpo A percorre il tratto di guida circolare su di esso agiscono la forza peso $m\vec{g}$ (sempre verticale e diretta verso il basso) e la reazione vincolare $\vec{N}$ (sempre uscente dalla guida e ad essa perpendicolare in quanto per ipotesi non vi sono attriti). Di conseguenza, in un sistema di riferimento fisso (e quindi inerziale), la seconda equazione della dinamica ci permette di scrivere:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (16)$$

dove $\vec{a}$ rappresenta l'accelerazione del corpo A nel sistema scelto.

Si noti che man mano che il corpo A sale lungo il tratto circolare la reazione vincolare $\vec{N}$ diminuisce in modulo in quanto la forza peso tende a schiacciare il corpo A sulla guida sempre meno. Di conseguenza per essere sicuri che il corpo A resti sempre in contatto con la guida basta assicurarsi che $N > 0$ nel punto P . Se questa condizione è verificata, infatti, lo sarà anche in corrispondenza di tutti gli altri punti del tratto circolare della guida. In P sia la reazione vincolare che la forza peso sono verticali. Se quindi proiettando la (16) lungo la direzione verticale otteniamo:

$$mg - N = ma_c = m\frac{v_c^2}{R} \quad \rightarrow \quad N = m\left(g - \frac{v_c^2}{R}\right) \quad (17)$$

dove si è tenuto conto che la componente centripeta dell'accelerazione del corpo A è data da $a_c = v_c^2/R$ con v_c velocità tangenziale del corpo A .

Imponendo $N > 0$ si ottiene la seguente condizione su v_c :

$$v_c^2 > gR \quad (18)$$

D'altra parte, per calcolare la velocità v_c del corpo A in corrispondenza del punto P , possiamo applicare la conservazione dell'energia in quanto, per ipotesi, non vi sono attriti.

Inizialmente il corpo A si trova fermo (energia cinetica nulla) ad un'altezza h e, pertanto la sua energia iniziale E_i è pari alla sua energia potenziale gravitazionale:

$$E_i = U_i = mgh \quad (19)$$

dove m rappresenta la massa del corpo A .

Nel punto P , invece, il corpo A possiede sia un'energia cinetica $T_p = mv_c^2/2$ che un'energia potenziale gravitazionale $U_p = 2mgR$ (trovandosi ad una quota pari a $2R$). Di conseguenza:

$$E_p = T_p + U_p = \frac{1}{2}mv_c^2 + 2mgR \quad (20)$$

Imponendo $E_i = E_p$ si ottiene:

$$v_c^2 = 2g(h - 2R) \quad (21)$$

Mettendo insieme la (18) e la (21) si ottiene la condizione cercata di h :

$$2g(h - 2R) > gR \quad \rightarrow \quad h > h_{min} = \frac{5}{2}R = 40\text{cm} \quad (22)$$

- b) Se il corpo A è una sfera piena che ruota senza strisciare sulla guida, le considerazioni energetiche fatte al punto precedente sono ancora valide a patto di tener conto anche dell'energia collegata al moto rotatorio del corpo A . Inoltre se il corpo A ruota senza strisciare la sua velocità angolare ω e quella del suo centro di massa v_c sono collegate dalla relazione $v_c = \omega r$. Tenendo conto che inizialmente il corpo A è fermo e che il suo centro di massa si trova ad una quota $h + r$ avremo:

$$E_i = U_i = mg(h + r) \quad (23)$$

Analogamente l'energia E_p risulta essere:

$$E_p = T_p + U_p = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + mg(2R - r) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_c}{r^2}\right)v_c^2 + mg(2R - r) \quad (24)$$

dove I_c rappresenta il momento di inerzia della sfera rispetto al suo centro di massa.

Imponendo $E_p = E_i$ si ottiene:

$$v_c^2 = \frac{2m}{m + \frac{I_c}{r^2}}(h + 2r - 2R)g \quad (25)$$

L'analogo della condizione (18) se il corpo A è una sfera di raggio r , si ottiene considerando che il suo centro di massa percorre un moto circolare di raggio $R - r$ e pertanto deve essere:

$$v_c^2 > g(R - r) \quad (26)$$

Tenendo conto delle (25) e (26) si ottiene:

$$\frac{2m}{m + \frac{I_c}{r^2}}(h + 2r - 2R)g > g(R - r) \quad \rightarrow \quad h > \frac{5m + I_c/r^2}{2m}(R - r) \quad (27)$$

Poiché $I_c = 2mr^2/5$ risulta:

$$h > h_{min} = \frac{27}{10}(R - r) = 37.8\text{cm} \quad (28)$$

Si noti come il valore di h_{min} ottenuto se il corpo A è una sfera risulta minore rispetto al caso puntiforme. Questo risultato potrebbe sembrare contro intuitivo in quanto nel caso della sfera piena parte dell'energia potenziale iniziale viene convertita in energia rotazionale che non risulta presente nel caso puntiforme. Tuttavia, il centro di massa del corpo A inizialmente si trova ad una quota $h + r$ nel caso della sfera che risulta essere maggiore del caso puntiforme (h). Nel punto P , invece, la quota del centro di massa nel caso della sfera risulta essere $2R - r$ e, quindi, minore rispetto al caso puntiforme ($2R$). Di conseguenza, la differenza di energia potenziale tra la posizione iniziale e la posizione P risulta essere maggiore nel caso della sfera rispetto al caso puntiforme. Questa maggiore energia potenziale tende a compensare la maggiore energia cinetica richiesta nel caso della sfera in maniera dipendente dal raggio r .

c) Innanzitutto si noti che il tratto più basso della guida è orizzontale. Di conseguenza poiché non vi sono attriti, la velocità v_c (e di conseguenza anche la velocità angolare ω visto che siamo di fronte ad un moto di puro rotolamento) risulta essere costante in qualsiasi punto del tratto orizzontale della guida. Per ottenere la velocità del centro di massa nel tratto orizzontale, pertanto, basta applicare di nuovo la conservazione dell'energia tenendo conto che quando il corpo A si trova sul tratto orizzontale il suo centro di massa è posizionato ad una quota r :

$$E_i = mg(h + r) = E_f = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_c}{r^2} \right) v_c^2 + mgr \quad (29)$$

da cui si ricava facilmente:

$$v_c = \sqrt{\frac{10}{7}hg} = \sqrt{\frac{20}{7}h_{min}g} \quad (30)$$

Ricordando la (28) si ottiene:

$$v_c = \sqrt{\frac{54}{7}(R - r)g} \approx 3.26 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (31)$$

Infine la velocità angolare è data da:

$$\omega = \frac{v_c}{r} \approx 162.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (32)$$

Esercizio 3

Il moto dell'elemento di massa infinitesimo di fluido dm che fuoriesce dal foro è quello di un proiettile di massa dm sparato dall'altezza h_1 con una velocità iniziale v_1 pari alla velocità con cui dm fuoriesce dal foro (che, considerata la geometria del problema si può supporre perpendicolare alla superficie del foro e, quindi, orizzontale). Per determinare v_1 possiamo applicare la legge di Bernoulli ad un punto 0 che si trova sulla superficie libera del fluido e il punto 1 in corrispondenza del foro:

$$P_0 + \rho gh_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (33)$$

dove P_0 e P_1 rappresentano le pressioni del fluido nei punti 0 e 1, v_0 e v_1 i moduli della sua velocità negli stessi punti. Dalla geometria del problema si evince che $P_0 = P_1 = P_{atm}$.

Poiché il foro è supposto essere di dimensioni trascurabili rispetto alle dimensioni del recipiente possiamo assumere che superficie libera dell'acqua sia ferma mentre essa fluisce dal foro (in realtà essa possiede una velocità non nulla diretta verso il basso che tuttavia consideriamo trascurabile rispetto alla velocità con cui l'acqua fuoriesce dal foro). Adottando questa approssimazione possiamo porre $v_0 = 0$. Dalla (33) quindi otteniamo:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_0 - h_1)} \quad (34)$$

Nota v_1 possiamo facilmente ricavare l'equazione del moto della massa dm di acqua una volta fuoriuscita dal foro. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nella proiezione ortogonale del foro sulla superficie (orizzontale) su cui è poggiato il recipiente, con asse y verticale rivolto verso l'alto e asse x orizzontale (da sinistra a destra). In tale sistema il moto della massa dm è descritto dalla seguente legge oraria:

$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_1 \end{cases} \quad (35)$$

La gittata Δ del moto (35) si ottiene calcolando $x(t)$ in corrispondenza dell'istante T in cui $y(T) = 0$:

$$\Delta = v_1 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{h_1(h_0 - h_1)} \quad (36)$$

che rappresenta l'espressione cercata.

Esercizio 4

- a) Poiché sono date V_0 , P_0 e T_0 applicando la legge di stato dei gas perfetti possiamo calcolare il numero di moli n di ossigeno:

$$n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} \quad (37)$$

La massa di ossigeno espressa in grammi risulta essere:

$$m = nM = \frac{P_0 V_0}{RT_0} M \approx 8.02\text{g} \quad (38)$$

dove M rappresenta la massa molare dell'ossigeno.

- b) Sapendo che nello stato finale il pistone si è sollevato di un tratto Δh il volume finale V_1 è dato da:

$$V_1 = V_0 + S\Delta h = 5.4\ell \quad (39)$$

Applicando di nuovo l'equazione di stato dei gas perfetti è possibile calcolare la pressione P_1 :

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{T_1}{T_0} \frac{V_0}{V_0 + S\Delta h} P_0 \approx 1.143\text{atm} \quad (40)$$

- c) Per determinare la costante k elastica della molla basta considerare che il modulo della forza elastica F da essa esercitata risulta essere pari alla differenza di pressione $P_1 - P_0$ per la superficie S del cilindro. D'altra parte sapendo che essa si è compressa di un tratto Δh avremo $F = k\Delta h$. Si conseguenza:

$$k = \frac{(P_1 - P_0)S}{\Delta h} \approx 14487.9 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (41)$$

- d) Il lavoro L compiuto durante la trasformazione risulta essere la somma del lavoro contro la pressione esterna e quella contro la molla:

$$L = P_0(V_1 - V_0) + \frac{1}{2}k\Delta h^2 = \frac{1}{2}(P_0 + P_1)S\Delta h \approx 43.43\text{J} \quad (42)$$

- e) La quantità di calore Q scambiata con l'ambiente durante la trasformazione si ottiene applicando il primo principio della termodinamica:

$$Q = \Delta U + L \quad (43)$$

dove ΔU rappresenta la variazione di energia interna data da $\Delta U = nc_v(T_1 - T_0)$. Ricordando che $c_v = (5/2)R$ si ottiene:

$$Q = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0) + \frac{1}{2}(P_0 + P_1)S\Delta h \approx 340.34\text{J} \quad (44)$$