Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
7 luglio 2024

Esercizio 1

a) Durante l'urto completamente anelastico si conserva la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema formato dal proiettile e dal corpo A in quanto il risultante delle forze esterne che agiscono su tale sistema non ha componenti orizzontali (essendo la forza peso e la reazione vincolare esercitata dalla superficie orizzontale entrambe verticali). Tenendo conto che inizialmente il proiettile si muove con velocità orizzontale di modulo pari a v_p e che il corpo A è fermo, la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema considerato prima dell'urto è pari a $Q_i = m_P v_P$. Dopo l'urto, proiettile e corpo A si muovono con la stessa velocità v_0 (ipotesi di urto completamente anelastico) orizzontale. Di conseguenza $Q_f = (m_A + m_P)v_0$. Dall'uguaglianza $Q_i = Q_f$ si ricava:

$$v_0 = \frac{m_P}{m_P + m_A} v_p \approx 2.94 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{1}$$

b) Dopo l'urto il corpo A e il proiettile in esso conficcato si muovono con velocità v_0 data dalla (1) percorrendo il tratto orizzontale fino ad arrivare alla base del piano inclinato B. Poiché la superficie orizzontale è liscia tale moto sarà rettilineo uniforme e, di conseguenza, indipendentemente dalla lunghezza del tratto orizzontale che separa inizialmente il corpo A dalla base del piano inclinato B la velocità con cui A inizia a salire lungo B è sempre v_0. Grazie alla presenza del raccordo tra piano inclinato e superficie orizzontale e al fatto che A è supposto essere puntiforme (dimensioni trascurabili rispetto a quelle di B) possiamo assumere che la velocità di A cambi istantaneamente la sua direzione passando da orizzontale (immediatamente prima di salire su B) a parallela alla direzione del piano inclinato B (immediatamente dopo essere salito completamente su B) conservando il suo modulo che quindi resta uguale a v_0 dato dalla (1). Se non c'è attrito tra A e B l'energia totale meccanica si conserva. Inoltre, essendo B bloccato, solo il corpo A è libero di muoversi. Possiamo quindi scrivere la conservazione dell'energia nel seguente modo:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}(m_A + m_P)v_0^2 = (m_A + m_P)g\Delta h = (m_A + m_P)gd\sin\alpha \tag{2}$$

Si noti che nello scrivere la (2) si è tenuto conto del fatto che dopo l'urto la massa del corpo A è pari a $m_A + m_P$ in quanto il proiettile è rimasto conficcato in A. L'energia finale corrisponde alla situazione in cui il corpo A è risalito di un tratto Δh rispetto al livello della superficie orizzontale ed è fermo rispetto a B. Risolvendo per d e ricordando (1) otteniamo:

$$d = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha} = \frac{1}{2}\frac{m_P^2}{(m_A + m_P)^2\sin\alpha}\frac{v_P^2}{g} \approx 88.2\mathrm{cm} \tag{3}$$

c) Rispetto al caso precedente abbiamo attrito tra A e B e, di conseguenza, l'energia totale meccanica non si conserva in quanto parte di essa viene dissipata proprio dalla forza d'attrito. Possiamo pertanto scrivere:

$$E_i = E_f + L_A \tag{4}$$

dove L_A è il lavoro svolto dalla forza d'attrito (non conservativa). Essendo la forza d'attrito sempre parallela alla direzione del piano inclinato ed opposta al moto possiamo calcolare facilmente L_A (sapendo che A si sposta per un tratto pari a d) e scrivere:

$$\frac{1}{2}(m_A + m_P)v_0^2 = (m_A + m_P)gd\sin\alpha + \mu_d(m_A + m_P)dg\cos\alpha \tag{5}$$

Da cui risolvendo per d e ricordando (1) si ricava:

$$d = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)} = \frac{1}{2}\frac{m_P^2}{(m_A + m_P)^2(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}\frac{v_P^2}{g} \approx 65.5\text{m} \tag{6}$$

d) Se B è libero di muoversi senza attrito e non c'è attrito tra A e B vale ancora la conservazione dell'energia totale meccanica. Questa volta però dobbiamo tener conto che entrambi i corpi A e B solo liberi di muoversi. Inizialmente solo A è in moto con velocità di modulo pari a v_0 e parallela alla direzione del piano inclinato B (ossia inclinata di un angolo α rispetto alla direzione orizzontale). Nella situazione finale a cui siamo interessati A è salito del tratto d su B ed è fermo rispetto a B. Questo implica che nella situazione finale A e B sono dotati della stessa velocità che indichiamo con $\vec{v}_f$. Si noti che $\vec{v}_f$ deve essere orizzontale in quanto il corpo B è vincolato a traslare su una superficia piana orizzontale. In tal caso, la conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2}(m_A + m_P)v_0^2 = (m_A + m_P)gd\sin\alpha + \frac{1}{2}(m_A + m_P + m_B)v_f^2 \tag{7}$$

Per determinare v_f basta considerare che le uniche forze esterne che agiscono sul sistema formato dai corpi A e B sono la forza peso e la reazione vincolare esercitata dalla superficie piana su cui è poggiato B (tutte le altre forze che si scambiano vicendevolmente A e B sono interne). Di conseguenza, il risultante delle forze esterne sul sistema formato da A e B non ha componenti orizzontali e, quindi, si conserva la componente orizzontale della quantità di moto totale di tale sistema. La quantità di moto totale iniziale è data da $\vec{Q}_i = (m_A + m_P)\vec{v}_0$ (inzialmente B è fermo e solo A è in moto con velocità $\vec{v}_0$ parallela alla direzione del piano inclinato) la cui componente orizzontale è $Q_{i_x} = (m_A + m_P)v_0\cos\alpha$. La quantità di moto finale è data da $\vec{Q}_f = (m_A + m_P + m_B)\vec{v}_f$ che per quanto detto precedentemente è orizzontale e quindi $Q_{f_x} = Q_f$. Imponendo $Q_{i_x} = Q_{f_x}$ si ottiene:

$$(m_A + m_P)v_0\cos\alpha = (m_A + m_P + m_B)v_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{m_A + m_P}{m_A + m_P + m_B}v_0\cos\alpha \tag{8}$$

Sostituendo la (8) nella (7) e risolvendo per d dopo semplici calcoli otteniamo:

$$d = \frac{1}{2}\frac{m_B + (m_A + m_P)\sin^2\alpha}{(m_A + m_P + m_B)\sin\alpha}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{m_P^2[m_B + (m_A + m_P)\sin^2\alpha]}{(m_A + m_P)^2(m_A + m_P + m_B)\sin\alpha}\frac{v_P^2}{g} \approx 62.4\text{m} \tag{9}$$

Esercizio 2

a) Per determinare velocità del pendolo in corrispondenza dell'angolo $\theta = 0$ basta applicare la conservazione dell'energia totale meccanica. Non essendoci attriti, infatti, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del pendolo deve rimanere inalterata durante il moto. Indichiamo con E_i ed E_f rispettivamente l'energia totale meccanica del pendolo in corrispondenza della sua posizione iniziale ($\theta_0 = \pi/6$) e della posizione in corrispondenza della quale vogliamo determinare la sua velocità ($\theta = 0$). Inizialmente il pendolo si trova in quiete e, quindi, la sua energia totale coincide con l'energia potenziale $E_i = U_i = mgz_i$ dove z_i rappresenta la quota iniziale (rispetto a un punto preso come riferimento) della massa m. Quando il pendolo si trova nella posizione $\theta = 0$ la sua energia totale è data da $E_f = T_f + U_f$. Poiché $T_f = mv_f^2/2$ (dove v_f rappresenta la velocità del pendolo in corrispondenza di $\theta = 0$) e $U_f = mgz_f$ (con z_f quota della massa m in corrispondenza di $\theta = 0$) imponendo $E_i = E_f$ ricaviamo:

$$v_f = \sqrt{2g(z_i - z_f)} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)} \approx 1.15\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{10}$$

b) Determiniamo il modulo della tensione τ esercitata dal filo in funzione dell'angolo θ. Sul pendolo agisce la forza peso $m\vec{g}$ (verticale e diretta verso il basso) e la reazione vincolare $\vec{\tau}$ diretta lungo il filo nel verso che va dalla massa m al punto di sospensione del pendolo. Possiamo quindi scrivere:

$$m\vec{g} + \vec{\tau} = m\vec{a} \tag{11}$$

dove $\vec{a}$ rappresenta l'accelerazione della massa m. Poiché il filo è inestensibile il moto della massa m avviene su un circonferenza con centro nel punto di sospensione del pendolo e raggio l. Proiettiamo, quindi, la (11) nella direzione radiale (considerando come positivo in verso uscente) e tangenziale di tale circonferenza:

$$\begin{cases} mg\cos\theta - \tau = ma_c \\ -mg\sin\theta = ma_t \end{cases} \tag{12}$$

dove a_c e a_t rappresentano rispettivamente la componente radiale e tangenziale dell'accelerazione di m. La prima delle (12) ci permette di ricavare la tensione τ esercitata dal filo mentre la seconda permette di ricavare il moto di m. Se indichiamo con v la velocità di m (che in generale dipende da θ) allora l'accelerazione centripeta è data da $a_c = -v^2/l$. Si noti che il segno meno tiene conto del fatto che a_c è centripeta e quindi ha verso opposto rispetto a quello scelto come positivo per la direzione radiale. Sostituendo tale espressione nella prima delle (12) ricaviamo:

$$\tau(\theta) = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{l} \tag{13}$$

Per determinare $v(\theta)$ possiamo applicare ancora la conservazione dell'energia tra la posizione iniziale (corrispondente all'angolo θ_0) e quella finale corrispondente a un generico angolo θ. Effettuando un ragionamento del tutto simile a quello fatto per ricavare la (10) si ottiene facilmente:

$$v = \sqrt{2g(z_i - z_f)} = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)} \tag{14}$$

Sostituendo la (14) nella (13) otteniamo:

$$\tau(\theta) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) \tag{15}$$

La tensione massima esercitata dal filo è quella in corrispondenza del valore di θ che massimizza la (15). Ovviamente tale valore è quello per cui il coseno vale 1 ossia $\theta = 0$. Quindi:

$$\tau_{max} = mg(3 - 2\cos\theta_0) \approx 1.24\text{N} \tag{16}$$

c) Possiamo determinare l'angolo α_0 applicando ancora la conservazione dell'energia tra la posizione iniziale (corrispondente al pendolo nella posizione descritta dall'angolo θ_0) e quella finale in cui il pendolo raggiunge l'angolo massimo α_0 dopo aver urtato il piolo P. Si noti che in entrambe queste posizioni la massa m ha velocità nulla. La conservazione dell'energia impone quindi che l'energia potenziale gravitazione in corrispondenza di queste due posizioni deve essere la stessa. Questo implica che nella posizione iniziale e finale la massa m deve trovarsi alla stessa quota (ossia $z_i = z_f$). Da semplici considerazione geometriche si ricava quindi:

$$\cos\alpha_0 = \frac{l\cos\theta_0 - h}{l-h} \qquad \rightarrow \qquad \alpha_0 = \arccos\left(\frac{l\cos\theta_0 - h}{l-h}\right) \approx 48.3^\circ \tag{17}$$

Esercizio 3

a) Applicando l'equazione di Bernoulli ai punti A e B otteniamo:

$$P_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \tag{18}$$

dove P_A e P_B rappresentano le pressioni dell'acqua nei punti A e B, ρ la densità dell'acqua, v_A e v_B i moduli della velocità dell'acqua nei punti A e B del condotto e h_A ed h_B le quote dei punti A e B. Dalla traccia sappiamo che $h_A = h_B$ e che $P_B - P_A = \rho g h$. Sostituendo tali espressioni nella (18) otteniamo:

$$v_A^2 - v_B^2 = 2gh \tag{19}$$

Inoltre se trattiamo l'acqua come un fluido incompressibile ideale le portate Q_A e Q_B nei punti A e B devono essere uguali:

$$Q_A = Q_B \qquad \rightarrow \qquad v_A S_A = v_B S_B \qquad \rightarrow \qquad v_A r_A^2 = v_B r_B^2 \tag{20}$$

Sostituendo la (20) nella (19) dopo semplici calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} v_A = \sqrt{\dfrac{2ghr_B^4}{r_A^4 - r_B^4}} \approx 0.21 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v_B = v_A \left(\dfrac{r_A}{r_B}\right)^2 = \sqrt{\dfrac{2ghr_A^4}{r_A^4 - r_B^4}} \approx 1.01 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{21}$$

Esercizio 4

a) e **b)** La trasformazione $A \rightarrow B$ è isoterma quindi per il primo principio della termodinamica abbiamo $L_{AB} = Q_{AB}$. Il lavoro L_{AB} può essere facilmente calcolato come segue:

$$Q_{AB} = L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} pdV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln 2 \approx 2883.1\mathrm{J} \tag{22}$$

La trasformazione $B \rightarrow C$ è adiabatica quindi $Q_{BC} = 0$. Possiamo facilmente calcolare L_{BC} applicando il primo principio della termodinamica (valido anche per trasformazioni irreversibili):

$$L_{BC} = -U_{BC} = nc_V(T_B - T_C) \tag{23}$$

dove c_V rappresenta il calore specifico a volume costante del gas monoatomico ($c_V = 3R/2$). Tenendo conto che $T_C = T_A/2$ e che $T_B = T_A$ si ottiene:

$$L_{BC} = \frac{3}{4} nRT_A \approx 3119.5\mathrm{J} \tag{24}$$

La trasformazione $C \rightarrow D$ è ancora isoterma quindi possiamo utilizzare di nuovo la (22) e scrivere:

$$Q_{CD} = L_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} pdV = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} = \frac{1}{2} nRT_A \ln \frac{V_D}{V_C} \tag{25}$$

Per determinare il rapporto V_D/V_C sfruttiamo il fatto che la trasformazione $C \rightarrow D$ è isoterma e quindi $V_D P_D = P_C V_C$. Inoltre poiché la trasformazione $D \rightarrow A$ è isobara $P_D = P_A$ e di conseguenza $V_D = P_C V_C / P_A$. Dalla legge di stato dei gas perfetti $V_D = nRT_C/P_A = nRT_A/(2P_A)$. D'altra parte $V_C = 3V_B = 6V_A = 6nRT_A/P_A$ da cui si ricava facilmente $V_D/V_C = 1/12$. Sostituendo nella (25) si ottiene:

$$Q_{CD} = L_{CD} = \frac{1}{2} nRT_A \ln \frac{1}{12} \approx -5167.8\mathrm{J} \tag{26}$$

Infine la trasformazione $D \rightarrow A$ è isobara. Il lavoro è dato da:

$$L_{DA} = P_A(V_A - V_D) = P_A \left(\frac{nRT_A}{P_A} - \frac{nRT_A}{2P_A} \right) = \frac{1}{2} nRT_A \approx 2079.7\mathrm{J} \tag{27}$$

Il calore scambiato Q_{DA} si calcola facilmente tenendo conto che il calore specifico a pressione costante di un gas monoatomico è pari a $c_P = 5R/2$ e quindi:

$$Q_{DA} = nc_P(T_A - T_D) = nc_P(T_A - \frac{T_A}{2}) = nc_P \frac{T_A}{2} = \frac{5}{4} nRT_A \approx 5199.2\mathrm{J} \tag{28}$$

c) Per definizione, il rendimento del ciclo η è dato dal rapporto tra il lavoro totale effettuato dal gas (L_{tot}) e il calore totale assorbito (Q_{ass}). Per ottenere L_{tot} basta sommare il lavoro ottenuto nelle varie trasformazioni:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = nRT_A \left(\frac{5}{4} + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 12 \right) \tag{29}$$

Il calore totale assorbito dal gas durante il ciclo si ottiene sommando i calori positivi scambiati nelle singole trasformazioni:

$$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA} = nRT_A \left(\frac{5}{4} + \ln 2 \right) \tag{30}$$

Di conseguenza:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{2 \ln 12}{5 + 4 \ln 2} \approx 0.36 \tag{31}$$