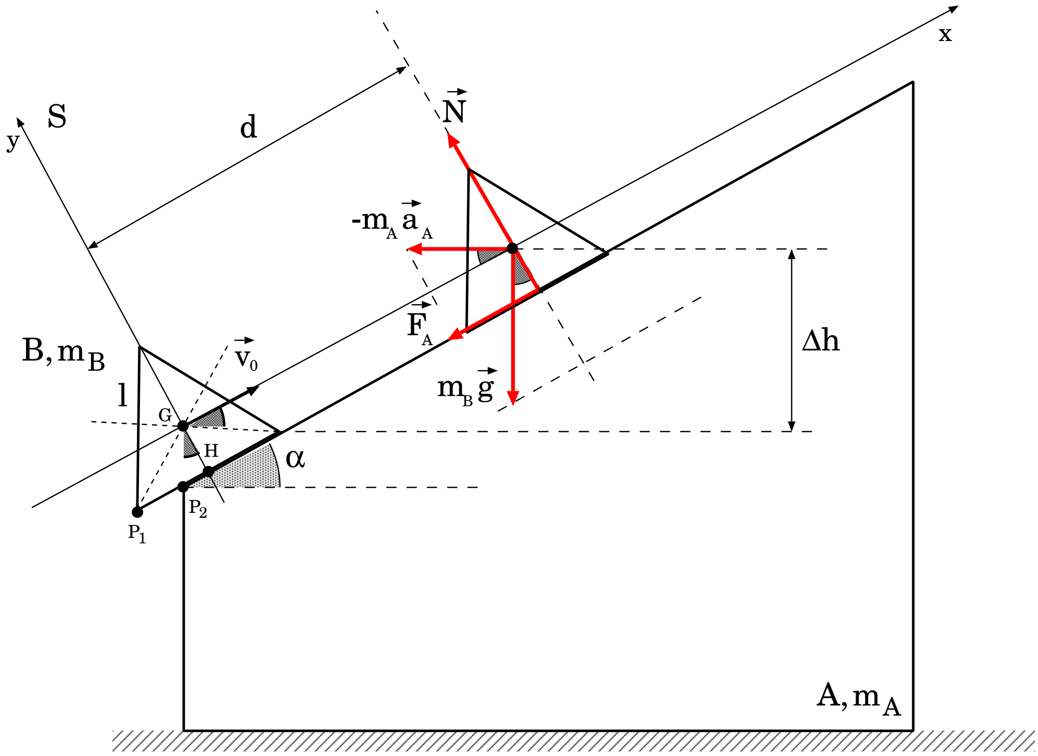
Rosati Casali, Problemi di Fisica Generale
Meccanica, Termodinamica, Teoria Cinetica dei Gas
Esercizio 5.32



In figura è riportata la geometria del problema.

Questito a)

Il valore massimo della distanza $\overline{P_1P_2}$ tale che il corpo B non ruoti intorno al punto P_2 è quello per cui il baricentro di B (punto G in figura) e il punto P_2 si trovano sulla stessa verticale. In tal caso, infatti, il momento della forza peso rispetto al punto P_2 è nullo. Se invece la verticale passante per G intercetta la base di B prima del punto P_2 (quindi per valori maggiori della distanza $\overline{P_1P_2}$ rispetto al caso in cui i punti P_2 e G solo allineati sulla stessa verticale) allora il momento della forza peso (rispetto al polo P_2) diventa non nullo e quindi B ruota intorno a P_2. Calcoliamo quindi la distanza $\overline{P_1P_2}$ nel caso in cui P_2 e G sono allineati sulla stessa verticale. Da considerazioni geometriche e considerando che il punto G è l'intersezione delle mediane, delle bisettrici e delle altezze di B (che è un triangolo equilatero) è facile ricavare:

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1H} - \overline{P_2H} = \frac{l}{2} - \overline{HG}\tan\alpha = \frac{l}{2} - \overline{P_1H}\tan\frac{\pi}{6}\tan\alpha =$$
$$= \frac{l}{2} - \overline{P_1H}\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha\right) \quad (1)$$

Da cui, tenendo conto che $\alpha = \pi/6$, si ottinene $\overline{P_1P_2} = l/3$. Se quindi $\overline{P_1P_2} <= l/3$ il corpo B non può ruotare intorno al punto P_2.

Affinché il corpo B non possa neppure traslare lungo il piano inclinato, la risultante delle forze nella direzione del piano inclinato deve essere nulla. Dalla figura è immediato verificare che il modulo della componente della forza peso lungo la direzione del piano inclinato è dato da $F_p = m_B g \sin\alpha$ e il modulo della forza di attrito statico è $F_A = \mu_S N = \mu_S m_B g \cos\alpha$ (essendo N la reazione vincolare esercitata dal piano inclinato). Affinchè il corpo B non trasli deve valere la condizione:

$$F_P \leq F_A \Rightarrow \mu_S \geq \tan\alpha \quad (2)$$

da cui si ricava che il coefficiente minimo di attrito statico che consente l'equilibrio di B è pari a $\sqrt{3}/3$.

Quesito b)

Se non c'è attrito tra A e B allora si conserva l'energia totale meccanica. Inoltre, essendo A bloccato, solo il corpo B è libero di muoversi. Possiamo quindi scrivere la conservazione dell'energia nel seguente modo:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}m_B v_0^2 = m_B g\Delta h = m_B g d \sin\alpha \quad (3)$$

Si noti che nel sistema di riferimento S, il corpo B nella sua posizione iniziale ha il suo centro di massa nell'origine. Pertanto, l'energia potenziale iniziale è nulla e, di conseguenza, l'energia iniziale E_i è data dalla sola energia cinetica iniziale ($m_B v_0^2/2$). L'energia finale, invece, corrisponde alla situazione in cui il corpo B si trova più un alto sul piano inclinato ed è fermo. Quindi E_f è data dalla sola energia potenziale.

Dall'equazione precedente si ricava:

$$v_0 = \sqrt{2gd\sin\alpha} \quad (4)$$

Quesito c)

Rispetto al caso precedente abbiamo attrito tra A e B e, di conseguenza, l'energia meccanica non si conserva in quanto parte di essa viene dissipata proprio dalla forza d'attrito. Possiamo pertanto scrivere:

$$E_i = E_f + L_A \tag{5}$$

dove L_A è il lavoro svolto dalla forza d'attrito (non conservativa). Essendo la forza d'attrito sempre parallela alla direzione del piano inclinato possiamo calcolare facilmente L_A (sapendo che B si sposta per un tratto pari a d) e scrivere:

$$\frac{1}{2}m_B v_0^2 = m_B g d \sin\alpha + \mu_D m_B d g \cos\alpha \tag{6}$$

Da cui si ricava:

$$v_0 = \sqrt{2gd(\sin\alpha + \mu_D \cos\alpha)} \tag{7}$$

Quesito d)

Se A è libero di muoversi senza attrito e non c'è attrito neppure tra A e B vale ancora la conservazione dell'energia totale meccanica. Questa volta però dobbiamo tener conto che entrambi i corpi A e B possono muoversi. Inizialmente solo B è in moto con velocità $\vec{v}_0$ mentre dopo che B è salito del tratto d su A, sia A che B si muovono con la stessa velocità (in quanto stiamo supponendo che i corpi A e B restino sempre in contatto tra di loro). Indichiamo con $\vec{v}_f$ la velocità comune ad A e B quando B si è spostato del tratto d. Si noti che v_f deve essere orizzontale in quanto il corpo A è vincolato a traslare su una superficia piana orizzontale. In tal caso, la conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2}m_B v_0^2 = m_B g d \sin\alpha + \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_f^2 \tag{8}$$

Per determinare v_f basta considerare che le uniche forze esterne che agiscono sul sistema formato dai corpi A e B sono la forza peso e la reazione vincolare esercitata dalla superficie piana su cui è poggiato il corpo A. La reazione vincolare $\vec{N}$ e la forza d'attrito $\vec{F}_A$, infatti, sono forze interne al sistema formato dai corpi A e B (ossia sono forze che A esercita su B e B esercita su A). Di conseguenza, il risultante delle forze esterne sul sistema formato dai corpi A e B non ha componenti orizzontali e, quindi, si conserva la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema. Possiamo quindi scrivere:

$$m_B v_0 \cos\alpha = (m_A + m_B)v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \cos\alpha \tag{9}$$

Sostituendo tale espressione di v_f nell'equazione che esprime la conservazione dell'energia dopo semplici calcoli otteniamo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g(m_A + m_B)d\sin\alpha}{m_A + m_B \sin^2\alpha}} \tag{10}$$

Quesito e)

Rispetto al caso precedente abbiamo attrito tra A e B e quindi l'energia meccanica totale del sistema formato dai corpi A e B non si conserva. Se indichiamo con L_A il lavoro fatto dalla forza d'attrito durante il moto di B su A possiamo scrivere:

$$E_i = E_f + L_A \tag{11}$$

L'energia iniziale E_i è quella corrispondente alla situazione in cui A è fermo e B si muove con velocità $\vec{v}_0$ diretta lungo il piano inclinato. Nel sistema di riferimento S inoltre l'energia potenziale iniziale del corpo B è pari a zero in quanto il suo centro di massa si trova proprio nell'origine. L'energia potenziale del corpo A non varia mai durante il moto perché esso è vincolato a muoversi orizzontalmente. Quindi E_i concide con la sola energia cinetica iniziale del corpo B.

L'energia finale E_f invece corrisponde alla situazione in cui il corpo B è salito di un tratto d lungo il piano inclinato ed è fermo rispetto al piano inclinato stesso. Durante il moto di B su A, i due corpi si scambiano tra di loro delle forze (reazione vincolare $\vec{N}$ e forza d'attrito $\vec{F}_A$) che comportano delle accelerazioni sia su A che su B. Di conseguenza, nello stato finale i corpi A e B saranno dotati entrambi di una stessa velocità $\vec{v}_f$ che, come visto anche nel quesito precedente, è diretta orizzontalmente. Si noti che nello stato finale il corpo B è fermo solo rispetto al corpo A (ossia in un sistema di riferimento solidale con A) ma esso comunque possiede una velocità assoluta pari $\vec{v}_f$ in un sistema fisso.

L'equazione precedente diventa:

$$\frac{1}{2}m_B v_0^2 = m_B g d\sin\alpha + \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_f^2 + \mu_D m_B g d\cos\alpha \tag{12}$$

Anche in questo caso, come nel quesito precedente, si conserva la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema formato da A e B (anche in questo caso le forze esterne sono tutte verticali). Di conseguenza, v_f è data dalla stessa espressione trovata in precedenza. Sostituendo tale espressione nell'ultima equazione e risolvendo per v_0, dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gd(m_A + m_B)(\sin\alpha + \mu_D \cos\alpha)}{m_A + m_B \sin\alpha(\sin\alpha + \mu_D \cos\alpha)}} \tag{13}$$