

Prova di Esame di Fisica Generale II
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
19 giugno 2025

Esercizio 1

Poichè il foro praticato nella distribuzione di carica cilindrica non coincide con il suo asse, il problema non è dotato di simmetria cilindrica. In generale, l'assenza di una particolare simmetria pone dei limiti sull'utilizzo del teorema di Gauss per il calcolo dei campi. In tal caso, infatti, non è immediato individuare una superficie lungo cui il calcolo del flusso del campo elettrico si possa effettuare facilmente. Tuttavia, in questo caso particolare, possiamo ricondurre il problema al calcolo di campi generati da distribuzioni di carica a simmetria cilindrica grazie al principio di sovrapposizione. Tale principio, infatti, ci permette di individuare facilmente una distribuzione di carica equivalente a quella data che però è dotata di simmetria cilindrica.

Consideriamo un cilindro C_1 di raggio di base R_1 e lunghezza L dotato di densità di carica ρ uniforme su tutto il suo volume (quindi senza nessun foro) e un secondo cilindro C_2 pieno posizionato nella stessa posizione in cui è praticato il foro anch'esso dotato di densità di carica uniforme su tutto il suo volume ma data da $-\rho$. Grazie al principio di sovrapposizione, possiamo concludere che la sovrapposizione delle distribuzioni di cariche cilindriche C_1 e C_2 sono del tutto equivalenti alla distribuzione di carica data (cilindro carico con densità ρ uniforme e con foro cilindrico). Il vantaggio è che entrambe le distribuzioni di cariche C_1 e C_2 sono dotate di simmetria cilindrica e, quindi, è possibile calcolare il campo elettrico da esse generato attraverso una semplice applicazione del teorema di Gauss.

Consideriamo la distribuzione di carica cilindrica C_1 . Per ragioni di simmetria il campo elettrico $\vec{E}_1(\vec{r})$ generato da C_1 deve essere dotato di simmetria cilindrica. Descriviamo il problema in un sistema di riferimento S con asse z diretto lungo l'asse di C_1 utilizzando le coordinate cilindriche r (distanza dall'asse di simmetria nel piano xy) ϕ (angolo nel piano xy) e z (coordinata lungo l'asse z). Se il campo elettrico deve essere dotato di simmetria cilindrica esso non può dipendere da ϕ . Se, inoltre, $L \gg R_1$ possiamo assumere che non c'è dipendenza neanche dalla coordinata z (trascurando gli effetti di bordo). Di conseguenza, $\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_1(r) = E_1(r)\hat{r}$.

Per calcolare il campo elettrico esternamente a C_1 (ossia per $r \geq R_1$) applichiamo il teorema di Gauss a una superficie Σ cilindrica coassiale con C_1 , di raggio $r \geq R_1$ e di altezza L . La carica interna a Σ è ovviamente $q = \rho\pi R_1^2 L$, mentre, tenendo conto che il campo elettrico è radiale, il suo flusso attraverso Σ è pari a $E_1(r)2\pi rL$. Il teorema di Gauss, quindi, ci permette di ricavare:

$$\vec{E}_1(r) = \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \quad r \geq R_1 \quad (1)$$

Per calcolare il campo elettrico internamente a C_1 basta applicare di nuovo il teorema di Gauss alla superficie cilindrica Σ definita precedentemente ma con raggio $0 < r \leq R_1$. In tal caso il flusso del campo elettrico attraverso Σ è lo stesso di quello calcolato in precedenza ma la carica contenuta internamente a Σ è pari a $q = \rho\pi r^2 L$. Di conseguenza avremo:

$$\vec{E}_1(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r} \quad 0 < r \leq R_1 \quad (2)$$

In definitiva possiamo scrivere che il campo elettrico generato da C_1 nel sistema di riferimento S è dato da:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(r) = \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} & r \geq R_1 \\ \vec{E}_1(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r} & 0 < r \leq R_1 \end{cases} \quad (3)$$

Consideriamo ora la distribuzione di carica C_2 . Sebbene anche quest'ultima sia cilindrica come C_1 il corrispondente campo elettrico $\vec{E}_2(\vec{r})$ non può essere scritto utilizzando le (3). Le (3) esprimono il campo elettrico generato da C_2 in un sistema di riferimento in cui l'origine si trova sull'asse del cilindro C_2 . Affinché le (3) siano valide, è essenziale che la quantità $\vec{r}$ rappresenti la distanza del generico punto P in cui si vuole calcolare il campo elettrico a partire dall'asse della distribuzione di carica cilindrica. Nel sistema di riferimento S scelto questo è ovviamente vero solo per C_1 (l'asse z coincide con l'asse del cilindro C_1) mentre l'asse di C_2 si trova ad una distanza d dall'asse di C_1 (ossia dall'asse z). Se indichiamo con $\vec{d}$ il raggio vettore del centro di C_2 nel sistema di riferimento S e con $\vec{r}$ il raggio vettore di un generico punto P (sempre in S) allora il vettore che congiunge il centro di C_2 con il punto P è dato da $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$. Se, in particolare, scegliamo l'asse x del sistema S in maniera tale che il centro di C_2 si trovi su di esso avremo $\vec{d} = d\hat{i}$ (dove $\hat{i}$ rappresenta il versore dell'asse x). Per generalizzare le (3) al caso del campo generato da C_2 occorre, pertanto, effettuare in esse le sostituzioni:

- $\rho \rightarrow -\rho$;
- $R_1 \rightarrow R_2$;
- $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{d}$;

Se si procede in tal modo il campo $\vec{E}_2(\vec{r})$ generato da C_2 nel sistema di riferimento S è dato da:

$$\begin{cases} \vec{E}_2(\vec{r}) = -\frac{\rho R_2^2}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^2} & |r - d| \geq R_2 \\ \vec{E}_2(\vec{r}) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{d}) & 0 < |r - d| \leq R_2 \end{cases} \quad (4)$$

Si noti come sebbene entrambi i campi siano dotati di simmetria cilindrica, nel sistema S , solo il modulo di $\vec{E}_1$ dipende unicamente dal modulo del raggio vettore $\vec{r}$. Il modulo di $\vec{E}_2$, infatti, dipende dal modulo del vettore $\vec{r} - \vec{d}$ e, quindi, in generale presenta una dipendenza anche dalla direzione di $\vec{r}$.

- a) Utilizzando le espressioni (3) e (4) siamo in grado di scrivere il campo elettrico totale esternamente a C_1 . In generale il campo elettrico totale è dato da $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Nella regione $r > R_1$ ci troviamo all'esterno di entrambe le distribuzioni di carica C_1 e C_2 pertanto avremo:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R_1^2 \frac{\vec{r}}{r^2} - R_2^2 \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^2} \right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R_1^2 \frac{\vec{r}}{r^2} - R_2^2 \frac{\vec{r} - d\hat{i}}{|\vec{r} - d\hat{i}|^2} \right) \quad (5)$$

- b) Nella regione interna a C_2 ci troviamo internamente anche a C_1 pertanto in questo caso il campo elettrico totale è dato da:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r} - \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{d}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{d} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} d\hat{i} \quad (6)$$

Si noti come internamente a C_2 il campo è uniforme ed è proporzionale alla distanza d fra i centri dei due cilindri. Nel caso particolare in cui il foro è posizionato nel centro di C_1 il campo al suo interno è nullo.

Esercizio 2

- a) Risolviamo il circuito applicando il metodo delle maglie. Il numero di maglie indipendenti del circuito è 3 (il circuito è composto da 4 nodi e 6 rami). Introduciamo quindi le tre maglie:

- (a) maglia a composta dal generatore f e dalle resistenze R_1 e R_3

- (b) maglia b composta dal generatore f e dalle resistenze R_2 e R_4
(c) maglia c composta dalle resistenze R_3 , R e R_4

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff ad ogni singola maglia assumendo delle correnti di maglia fittizie I_a , I_b e I_c tutte circolanti in senso orario.

$$\begin{cases} I_a R_1 + (I_a - I_c) R_3 = f \\ I_b R_2 + (I_b + I_c) R_4 = f \\ (I_c - I_a) R_3 + I_c R + (I_c + I_b) R_4 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3) I_a - R_3 I_c = f \\ (R_2 + R_4) I_b + R_4 I_c = f \\ -R_3 I_a + R_4 I_b + (R + R_3 + R_4) I_c = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Poiché siamo interessati alla differenza di potenziale ai capi di R delle tre correnti di maglia ci interessa solo I_c in quanto è l'unica delle tre che circola nella resistenza R . Risolvendo il sistema (8) ed esplicitando I_c si ottiene:

$$I_c = \frac{R_4 R_1 - R_2 R_3}{R_3 R_4 (R_1 + R_3) + (R_2 + R_4) [R_3^2 + (R_1 + R_3)(R + R_3 + R_4)]} f \quad (9)$$

Di conseguenza la differenza di potenziale ai capi di R è data da:

$$\Delta V = I_c R = \frac{R(R_4 R_1 - R_2 R_3)}{R_3 R_4 (R_1 + R_3) + (R_2 + R_4) [R_3^2 + (R_1 + R_3)(R + R_3 + R_4)]} f \approx 0.41 \text{ V} \quad (10)$$

- b) Dalla (9) si vede che la condizione per cui $I_c = 0$ è $R_2 R_3 = R_1 R_4$. Per determinare quindi il valore della resistenza R_p da collegare in serie con R_3 affinché non circoli corrente in R occorre imporre la condizione:

$$R_2(R_3 + R_p) = R_1 R_4 \quad \rightarrow \quad R_p = \frac{R_1 R_4}{R_2} - R_3 = 3.9 k\Omega \quad (11)$$

Esercizio 3

- a) Il sistema dei quattro condensatori equivale alla serie dei tre condensatori C_1 , $C_2 + C_3$ (ossia il parallelo di C_2 e C_3) e C_4 . Di conseguenza, la capacità equivalente C_T del sistema dei quattro condensatori è data da:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} + \frac{1}{C_4} \quad \rightarrow \quad C_T = \frac{C_1 C_4 (C_2 + C_3)}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \quad (12)$$

La carica depositata sulle armature del condensatore equivalente è data da $q_T = C_T \Delta V$.

Le cariche q_1 e q_4 sulle armature dei condensatori C_1 e C_4 sono ovviamente uguali a q_T .

Per calcolare le cariche q_2 e q_3 sui condensatori C_2 e C_4 basta tener conto che $q_T = q_2 + q_3$ e, inoltre, essendo uguale la differenza di potenziale ai capi di C_2 e C_3 deve essere $q_2/C_2 = q_3/C_3$. Mettendo a sistema queste due relazioni otteniamo:

$$\begin{cases} q_2 = \frac{C_2}{C_2 + C_3} q_T = \frac{C_2 C_T}{C_2 + C_3} \Delta V \\ q_3 = \frac{C_3}{C_2 + C_3} q_T = \frac{C_3 C_T}{C_2 + C_3} \Delta V \end{cases} \quad (13)$$

Tenendo conto della (12) otteniamo quindi:

$$\begin{cases} q_1 = q_4 = q_T = \frac{C_1 C_4 (C_2 + C_3)}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \Delta V \approx 0.164 \text{nC} \\ q_2 = \frac{C_1 C_2 C_4}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \Delta V \approx 0.055 \text{nC} \\ q_3 = \frac{C_1 C_3 C_4}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \Delta V \approx 0.109 \text{nC} \end{cases} \quad (14)$$

- b) Una volta note la carica di ciascun condensatore possiamo calcolare la corrispondente differenza di potenziale dalla definizione di capacità ($\Delta V = q/C$):

$$\begin{cases} \Delta V_1 = q_1/C_1 = \frac{C_4 (C_2 + C_3)}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \Delta V \approx 16.4 \text{V} \\ \Delta V_2 = \Delta V_3 = q_2/C_2 = q_3/C_3 = \frac{C_1 C_4}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \Delta V \approx 1.1 \text{V} \\ \Delta V_4 = q_4/C_4 = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \Delta V \approx 6.5 \text{V} \end{cases} \quad (15)$$

- c) In generale, l'energia elettrostatica U immagazzinata in un condensatore di capacità C le cui armature sono poste ad una differenza di potenziale ΔV è data da $U_0 = C \Delta V^2 / 2$. Nel caso specifico l'energia elettrostatica totale corrispondente al sistema dei quattro condensatori si ottiene considerando la capacità C_T del condensatore equivalente:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_T (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_4 (C_2 + C_3)}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} (\Delta V)^2 \approx 1.96 \text{nJ} \quad (16)$$

- d) Quando viene inserito il materiale dielettrico all'interno del condensatore C_3 la sua capacità varia (in particolare aumenta). Se ϵ_r è la costante dielettrica relativa del materiale inserito allora il nuovo valore della capacità di tale condensatore è pari a $C'_3 = \epsilon_r C_3$. Di conseguenza, il nuovo valore per la capacità totale equivalente è dato da:

$$C'_T = \frac{C_1 C_4 (C_2 + \epsilon_r C_3)}{(C_2 + \epsilon_r C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \quad (17)$$

Poiché il sistema resta isolato la carica totale q_T non varia e, quindi, la differenza di potenziale tra i punti A e B deve portarsi al valore:

$$\Delta V' = \frac{q_T}{C'_T} = \frac{C_T}{C'_T} \Delta V = \frac{C_2 + C_3}{C_2 + \epsilon_r C_3} \frac{(C_2 + \epsilon_r C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4}{(C_2 + C_3)(C_1 + C_4) + C_1 C_4} \Delta V \approx 23.2 \text{V} \quad (18)$$

- e) Poiché non ci sono effetti dissipativi (non circola corrente) il lavoro L compiuto dal sistema è dato dalla differenza tra l'energia elettrostatica totale iniziale U_0 data dalla (16) (ossia prima dell'inserimento del materiale dielettrico nel condensatore C_3) e quella finale U (ossia quella posseduta dal sistema dopo l'inserimento del materiale dielettrico):

$$L = U_0 - U = \frac{1}{2} C_T (\Delta V)^2 - \frac{1}{2} C'_T (\Delta V')^2 \quad (19)$$

Sostituendo la (18) nella (19) otteniamo:

$$L = \frac{1}{2} \frac{C_T (C'_T - C_T)}{C'_T} (\Delta V)^2 \approx 64.9 \text{pJ} \quad (20)$$

Si noti come il lavoro fatto dal sistema sia positivo a dimostrazione del fatto che inserendo il materiale dielettrico all'interno del condensatore C_3 l'energia elettrostatica totale del sistema si abbassa.

Esercizio 4

- a) Il filo rettilineo percorso da corrente elettrica i_0 genera un campo magnetico nella regione dello spazio dove è presente la spira triangolare. Essendo quest'ultima percorsa da corrente elettrica risente di una forza di natura magnetica data dalla seconda legge di Laplace.

Il campo magnetico generato dal filo percorso dalla corrente i_0 è dato dalla formula di Biot-Savat che può essere ottenuta anche grazie al teorema della circuitazione di Ampere. Un filo rettilineo indefinito percorso da corrente elettrica costituisce una sorgente di un campo magnetico dotata di simmetria cilindrica. Questo implica che anche il campo magnetico sia dotato della stessa tipologia di simmetria. Di conseguenza, il campo $\vec{B}$ generato dal filo può dipendere solo dalla distanza r dal filo ossia $\vec{B} = \vec{B}(r)$. In virtù della prima legge di Laplace, inoltre, $\vec{B}$ deve essere ortogonale alla direzioni individuata dal filo. Ricaviamo quindi che il campo magnetico $\vec{B}(r)$ deve giacere nel piano ortogonale al filo e in tale piano dipende solo dalla distanza dal filo. Le linee di forza di un campo con queste caratteristiche non possono che essere delle circonferenze nel piano ortogonale alla direzione del filo. Appliciamo quindi il teorema di Ampere alla generica circonferenza γ di raggio r nel piano ortogonale al filo:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_0 \quad \rightarrow \quad B(r) 2\pi r = \mu_0 i_0 \quad \rightarrow \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r} \hat{t} \quad (21)$$

dove nel calcolo dell'integrale di circuitazione si è tenuto conto che $\vec{B}$ e $d\vec{l}$ sono paralleli (entrambi tangenti alla circonferenza γ) e che $B(r)$ è costante su γ . Si è inoltre indicato con $\hat{t}$ il versore tangente alla circonferenza γ .

Una volta ottenuto il campo magnetico generato del filo possiamo calcolare la forza risultante sulla spira applicando la seconda legge di Laplace. La forza risultante sulla spira è ovviamente la somma delle forze che agiscono su ciascuno dei suoi lati.

Consideriamo il lato inferiore obliquo della spira che indichiamo con a . Se $d\vec{\xi}_a$ rappresenta l'elemento infinitesimo di tale lato orientato nello stesso verso in cui scorre la corrente i_1 , la forza magnetica $d\vec{F}_a$ che agisce su $d\vec{\xi}_a$ è data da:

$$d\vec{F}_a = i_1 d\vec{\xi}_a \times \vec{B} \quad (22)$$

dove $\vec{B}$ è dato dalla (21). Poichè $\vec{B}$ è ortogonale al piano del disegno ed entrante è chiaro che $d\vec{\xi}_a$ e $\vec{B}$ sono fra di loro ortogonali. Se, quindi, indichiamo con $\hat{n}_a$ il versore che giace sul piano della spira ortogonale al lato a e diretto verso l'interno della spira avremo $d\vec{\xi}_a \times \vec{B} = d\xi_a B \hat{n}_a$. Di conseguenza integrando la (22) su tutto il lato a otteniamo:

$$\vec{F}_a = \int_0^l d\vec{F}_a = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{2\pi} \hat{n}_a \int_0^l \frac{d\xi_a}{r} \quad (23)$$

Si ricorda che r nella (21) rappresenta la distanza dal filo mentre l'integrale (23) va eseguito lungo il lato a della spira (ossia in termini della variabile ξ_a). Dalla geometria del problema è evidente che $r = d + \xi_a \cos(\pi/6) = d + \sqrt{3}\xi_a/2$. Sostituendo nella (23) ed eseguendo l'integrale otteniamo:

$$\vec{F}_a = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{\pi} \int_0^l \frac{d\xi_a}{2d + \sqrt{3}\xi_a} = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{\sqrt{3}\pi} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{d} \right) \hat{n}_a \quad (24)$$

Calcoliamo ora la forza $\vec{F}_b$ che agisce sul lato b (obliquo superiore della spira) ragionando in modo analogo a quanto fatto per il lato a :

$$\vec{F}_b = \int_0^l d\vec{F}_b = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{2\pi} \hat{n}_b \int_0^l \frac{d\xi_b}{r} \quad (25)$$

dove $\hat{n}_b$ rappresenta il versore che giace nel piano della spira, ortogonale al lato b e diretto verso l'interno della spira. L'elemento infinitesimo $d\vec{\xi}_b$ è diretto nello stesso verso in cui scorre la corrente i_1 nel lato b quindi la variabile ξ_b vale 0 all'estremità del lato b opposta al suo lato parallelo al filo ed l all'altro estremo. Di conseguenza questa volta $r = d + \sqrt{3}(l - \xi_b)/2$. Sostituendo nella (25) ed eseguendo l'integrale:

$$\vec{F}_b = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{\pi} \int_0^l \frac{d\xi_b}{2d + \sqrt{3}(l - \xi_b)} = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{\sqrt{3}\pi} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{d} \right) \hat{n}_b \quad (26)$$

Calcoliamo infine la forza $\vec{F}_c$ che agisce sul lato c della spira (parallelo al filo). Ragionando come in precedenza:

$$\vec{F}_c = \int_0^l d\vec{F}_c = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{2\pi} \hat{n}_c \int_0^l \frac{d\xi_c}{r} \quad (27)$$

dove $\hat{n}_c$ rappresenta il versore che giace nel piano della spira, ortogonale al lato c e diretto verso l'interno della spira. In tal caso $r = d$ e quindi l'integrale diventa:

$$\vec{F}_c = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{2\pi} \frac{l}{d} \hat{n}_c \quad (28)$$

Il risultante $\vec{F}$ delle forze che agiscono sulla spira è dato dalla somma delle forze che agiscono sui singoli lati:

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{d} \right) (\hat{n}_a + \hat{n}_b) + \frac{l}{2d} \hat{n}_c \right] \quad (29)$$

Il versore $\hat{n}_c$ è ovviamente orizzontale e diretto dal filo verso la spira. La somma $\hat{n}_a + \hat{n}_b$ è anch'essa orizzontale ma diretta dalla spira verso il filo. È facile vedere, Infatti, che le componenti dei versori $\hat{n}_a$ e $\hat{n}_b$ (in un sistema di riferimento con asse x orizzontale e asse y verticale) sono date da:

$$\hat{n}_a = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right) \quad \hat{n}_b = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} \right) \quad \rightarrow \quad \hat{n}_a + \hat{n}_b = (-\sqrt{3}; 0) \quad (30)$$

Dalla (30) deduciamo che $\hat{n}_a + \hat{n}_b = -\sqrt{3}\hat{n}_c$. Sostituendo tale espressione nella (29) si ha:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 i_0 i_1}{\pi} \left[\frac{l}{2d} - \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{d} \right) \right] \hat{n}_c \quad (31)$$

Quindi il modulo $F \approx 1.32 \times 10^{-6} \text{N}$. Poché nella (31) il coefficiente di $\hat{n}_c$ è negativo, la direzione di $\vec{F}$ è opposta a quella di $\hat{n}_c$ ossia orizzontale e diretta dalla spira verso il filo.

- b) La forza elettromotrice f_i indotta nella spira si ottiene applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz. Se indichiamo con S la superficie piana che ha come contorno la spira avremo:

$$f_i = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (32)$$

Se sostituiamo nella (32) l'espressione di $\vec{B}$ data dalla (21) avremo:

$$f_i = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{di}{dt} \int_S \frac{\hat{t} \cdot d\vec{S}}{r} \quad (33)$$

Il vettore $d\vec{S}$ è ortogonale al piano della spira. Per individuare l'orientazione di tale vettore occorre assegnare un verso di percorrenza lungo la spira. Se scegliamo un verso di percorrenza antiorario allora $d\vec{S}$ è uscente dal piano del foglio. Poiché invece $\hat{t}$ è ortogonale al piano del foglio ma entrante in esso (visto il verso di percorrenza della corrente $i(t)$ nel filo) il prodotto scalare $\hat{t} \cdot d\vec{S}$ è negativo e quindi:

$$f_i = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{di}{dt} \int_S \frac{dS}{r} \quad (34)$$

Fissiamo un sistema di riferimento in cui calcolare l'integrale (34) con origine in corrispondenza del punto medio del lato della spira parallelo al filo, asse x orizzontale (diretto da sinistra a destra) e asse y verticale (diretto verso l'alto). L'integrale (34) va calcolato su tutta la superficie della spira. Tuttavia per la simmetria del problema notiamo che possiamo limitarci a calcolare l'integrale sulla superficie S' pari a metà spira. Indicando quindi con S' la regione della spira che si trova nel semipiano superiore dell'asse y del sistema scelto avremo:

$$\int_S \frac{dS}{r} = 2 \int_{S'} \frac{dS}{r} \quad (35)$$

Si noti che la (35) è valida perché il campo magnetico generato dal filo dipende solo dalla distanza dal filo e quindi è chiaro che i due integrali calcolati sulle due metà della spira (uno nel semipiano superiore dell'asse y e l'altro nel semipiano inferiore) sono uguali. Di conseguenza, possiamo riscrivere la (34) come:

$$f_i = \frac{\mu_0}{\pi} \frac{di}{dt} \int_{S'} \frac{dx dy}{d+x} \quad (36)$$

Tenendo conto che nel sistema di riferimento scelto il lato obliquo superiore della spira ha equazione $y = -(\sqrt{3}/3)x + l/2$ l'integrale (36) diventa:

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{\mu_0}{\pi} \frac{di}{dt} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} \frac{dx}{d+x} \int_0^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{l}{2}} dy = \frac{\mu_0}{\pi} \frac{di}{dt} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} \frac{l}{2(d+x)} dx - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} \frac{\sqrt{3}x}{3(d+x)} dx \right) \\ &= \frac{\mu_0}{\pi} \frac{di}{dt} \left[\left(\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}d \right) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} \frac{dx}{d+x} - \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} dx \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{di}{dt} \left[\left(l + \sqrt{3}d \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}l}{2d} \right) - l \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Tenendo infine conto dell'espressione data per $i(t)$ si ha:

$$f_i = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi\tau} \left[l - \left(l + \sqrt{3}d \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}l}{2d} \right) \right] \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \quad (38)$$

Il valore massimo di f_i si ha per $t = 0$ ed è dato da:

$$f_{max} = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi\tau} \left[l - \left(l + \sqrt{3}d \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}l}{2d} \right) \right] \approx -2.61V \quad (39)$$

Si noti che il valore negativo di f_{max} sta ad indicare che in accordo con la legge di Faraday-Neumann-Lenz la forza elettromotrice indotta tende ad opporsi alla causa che l'ha generata. L'intensità di corrente $i(t)$ decresce esponenzialmente con il tempo. Di conseguenza anche il campo magnetico prodotto da tale corrente e il corrispondente flusso attraverso la superficie S concatenata alla spira decresce esponenzialmente con il tempo. La forza elettromotrice indotta f_i deve quindi spingere la corrente indotta nella spira nel verso in cui essa produce un

campo magnetico che va ad aumentare il flusso del campo attraverso S . La corrente indotta quindi deve circolare nella spira in senso orario (in modo tale che generi un campo magnetico concorde con quello generato dal filo). Ma nel calcolo dell'integrale di flusso (33) è stato scelto $d\vec{S}$ assumendo una circolazione nella spira antioraria. Il segno meno, quindi, nella (39) indica semplicemente che la forza elettromotrice indotta tende a spingere la corrente nella spira nel senso opposto a quello ipotizzato.