Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
31 ottobre 2023

Esercizio 1

a) Poiché nel tratto $A \to B$ non vi sono attriti, la velocità del punto materiale nel punto B è facilmente calcolabile applicando la conservazione dell'energia totale meccanica. Se quindi indichiamo con E_A ed E_B l'energia totale del punto materiale quando esso si trova rispettivamente in A e B avremo:

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgr = E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \tag{1}$$

da cui tenendo conto che inizialmente il punto materiale è fermo ($v_A = 0$) si ricava:

$$v_B = \sqrt{2gr} \approx 3.71\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2}$$

b) Se indichiamo con L il lavoro dissipato dalle forze d'attrito e con E_f l'energia del punto materiale nella sua posizione finale (ossia quando esso è in quite in un punto del tratto BC) per la conservazione dell'energia avremo $L = E_f - E_B$.

Chiaramente $E_f = 0$ (nella posizione finale il punto materiale è fermo in un punto del tratto BC) e poiché dalla (1) si ricava $E_B = mgr$ avremo $L = -mgr$.

D'altra parte, per definizione, L è dato da:

$$L = \int \vec{F}_A \cdot d\vec{s} = -\mu mg \int_0^d ds = -\mu mgd \tag{3}$$

dove con d si è indicata la distanza percorsa dal punto materiale lungo il tratto $B \to C$ a partire da B.

Mettendo insieme la (3) e la conservazione dell'energia si ottiene $d = r/\mu$. Se, quindi, indichiamo con D la distanza totale percorsa dal punto materiale a partire dalla sua posizione iniziale A abbiamo:

$$D = \frac{\pi r}{2} + d = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\mu}\right) r \approx 3.9\mathrm{m} \tag{4}$$

c) Indichiamo con P il punto sul tratto BC a distanza d a partire da B da cui il punto materiale parte con velocità iniziale v_0.

Poiché il tratto $P \to B$ è orizzontale non vi è variazione dell'energia potenziale gravitazionale. Di conseguenza, nel tratto $P \to B$ la variazione di energia cinetica del punto materiale è pari al lavoro L dissipato dalle forze d'attrito:

$$T_B - T_P = L \qquad \to \qquad T_P = T_B - L = T_B + \mu mgd = T_B + mgr \tag{5}$$

Nel tratto $B \to A$ non ci sono attriti e quindi l'energia meccanica si conserva:

$$T_B + U_B = T_A + U_A \qquad \to \qquad T_B - T_A = U_A - U_B = mgr \tag{6}$$

Sostituendo la (6) nella (5) si ottiene:

$$T_P = T_A + 2mgr \qquad \to \qquad v_p = \sqrt{v_0^2 + 4gr} \approx 5.61\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{7}$$

Esercizio 2

a) Per determinare ω_1 e v_{C_1} (rispettivamente i moduli della velocità angolare e della velocità del centro di massa dell'asta subito prima dell'urto con l'asta in posizione verticale) basta applicare la conservazione dell'energia meccanica. Non essendoci attriti, infatti, l'energia meccanica iniziale dell'asta (ossia quella corrispondente all'asta in quiete e disposta orizzontalmente) risulta pari all'energia meccanica dell'asta quando essa si trova in posizione verticale (subito prima dell'urto con la massa m_1). In generale, l'energia meccanica totale (E) dell'asta rigida è data dalla somma della sua energia cinetica (T) e della sua energia potenziale (U). L'energia cinetica T si esprime facilmente utilizzando il teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \tag{8}$$

dove v_C rappresenta il modulo della velocità del centro di massa dell'asta, I_C il suo momento di inerzia rispetto al centro di massa e ω il modulo della velocità angolare dell'asta.

L'energia potenziale U è quella associata alla forza peso e risulta pari a mgy_c dove y_c rappresenta la quota (ossia l'ordinata nel sistema in figura) del punto occupato dal centro di massa dell'asta. Poiché l'asta si suppone omogena, il suo centro di massa si trova nel suo centro geometrico.

Se indichiamo rispettivamente con E_0 ed E_1 l'energia meccanica totale dell'asta iniziale e relativa alla posizione assunta subito prima dell'urto (verticale), dalla conservazione dell'energia si ottiene:

$$E_0 = E_1 \qquad \rightarrow \qquad T_0 + U_0 = T_1 + U_1 \qquad \rightarrow \qquad mgl = \frac{1}{2}mv_{C_1}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_1^2 + mg\frac{l}{2} \tag{9}$$

Tenendo conto che le quantità v_c e ω sono legate dalla relazione $v_c = \omega l/2$ e che $I_C = ml^2/12$ dalla (9) si ottiene:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{4mgl}{ml^2 + I_C}} = \sqrt{\dfrac{3mg}{l}} \approx 3.84\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \\ v_{C_1} = \dfrac{l}{2}\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3gl}{8}} \approx 3.84\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \tag{10}$$

b) Per calcolare la massima altezza raggiunta dal centro di massa dell'asta dopo l'urto basta applicare di nuovo la conservazione dell'energia meccanica totale. Subito dopo l'urto, l'asta è dotata di velocità angolare ω_f (nota), il suo centro di massa di velocità pari a $v_{C_f} = \omega_f l/2$ e la sua energia potenziale è $mgl/2$. Il centro di massa dell'asta (che dopo l'urto ruota in senso antiorario intorno al punto O) raggiunge il punto di altezza massima quando la sua energia cinetica è nulla (ossia nella posizione in cui l'asta si ferma subito prima di riscendere verso il basso ruotando in senso orario). Indicando, pertanto con h_{max} il punto di altezza massima del centro di massa dell'asta dalla conservazione dell'energia avremo:

$$\frac{1}{2}mv_{C_f}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_f^2 + mg\frac{l}{2} = mgh_{max} \tag{11}$$

da cui risolvendo per h_{max} dopo semplici passaggi si ottiene:

$$h_{max} = \frac{l}{2} + \frac{\omega_f^2 l^2}{6g} \approx 1.27\text{m} \tag{12}$$

Da semplici considerazioni geometriche si ricava che l'angolo α che l'asta forma con la verticale quando il suo centro di massa di trova all'altezza h_{max} è dato da:

$$\frac{l}{2}\cos\alpha = l - h_{max} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \arccos\left[2\left(1 - \frac{h_{max}}{l}\right)\right] \approx 43.3° \tag{13}$$

c) L'asta e il sistema dei due blocchi m_1 ed m_2 interagiscono tra di loro (ossia si scambiano delle forze) solo durante l'urto che si suppone essere di durata trascurabile (ossia istantaneo). Dalla geometria del problema, inoltre, si deduce che durante l'urto l'asta interagisce solamente con la massa m_1. Immediatamente prima dell'urto, l'asta ruota in senso orario intorno ad O con velocità angolare ω_1 data dalla prima delle (10) e il blocco m_1 si trova in quiete. Immediatamente dopo l'urto l'asta ruota in senso antiorario intorno ad O con velocità angolare ω_f (nota) e il blocco m_1 ha una velocità v_0 (orizzontale e diretta come l'asse x) da determinare. Per determinare v_0 concentriamoci sul sistema formato dall'asta e dalla massa m_1 (gli unici oggetti che si scambiano forze durante l'urto). Dalla seconda equazione cardinale della dinamica sappiamo che il momento totale delle forze esterne che agisce su un qualsiasi sistema è pari alla variazione rispetto al tempo del momento angolare totale del sistema. Si noti che le forze che l'asta e la massa m_1 si scambiano durante l'urto sono interne al sistema scelto e pertanto non contribuiscono al momento totale delle forze esterne. Le forze esterne che agiscono sul sistema sono pertanto la forza peso e le reazioni vincolari che si sviluppano nel punto O e nel punto di contatto tra piano orizzontale e massa m_1. Se scegliamo il punto O come polo per il calcolo del momento totale delle forze esterne ci accorgiamo immediatamente che esso è nullo in quanto durante l'urto (che ricordiamo si assume di durata trascurabile) l'asta si trova in posizione verticale; le reazioni vincolari in O non generano momento in quanto sono applicate proprio nel polo rispetto al quale calcoliamo i momenti e, infine, sul blocco m_1 (che si assume di dimensioni trascurabili) la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare esercitata dal piano orizzontale (che in ogni caso essendo entrambe verticali durante l'urto non generano momento durante l'urto). Ricaviamo, quindi, che il momento angolare totale del sistema formato dall'asta e dal blocco m_1 rispetto al polo O si conserva durante l'urto. Se quindi indichiamo rispettivamente con L_O^i e L_O^f il momento angolare totale del sistema immediatamente prima e dopo l'urto avremo:

$$L_O^i = L_O^f \qquad \rightarrow \qquad I_O\omega_1 = I_O\omega_f + m_1 v_0 l \tag{14}$$

da cui possiamo ricavare facilmente v_0 tendondo conto che per il teorema di Huygens-Steiner $I_O = ml^2/4 + I_C$:

$$v_0 = \frac{I_O(\omega_1 - \omega_f)}{m_1 l} = \frac{ml}{3m_1}(\omega_1 - \omega_f) \tag{15}$$

Una volta che l'urto è avvenuto asta e blocco m_1 (o più in generale asta e sistema formato dalle masse m_1 ed m_2) tornano ad essere indipendenti l'uno dall'altro. Pertanto, dopo l'urto il moto delle masse m_1 ed m_2 è del tutto equivalente al moto unidirezionale di due masse m_1 ed m_2 interagenti attraverso la molla di costante elastica k (e lunghezza a riposo l_0) le cui condizioni iniziali sono note (ossia massa m_1 inizialmente nell'origine del sistema di riferimento in figura e dotato di velocità v_0 precedentemente calcolata e massa m_2 in quite posta a distanza l_0 da m_1). Siano x_1 e x_2 le coordintate che nel sistema in figura indentificano le posizioni di m_1 e m_2. Le corrispondenti equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) \end{cases} \tag{16}$$

Sommando le (16) ricaviamo che la quantità $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$ ossia l'accelerazione del centro di massa del sistema formato delle due masse m_1 e m_2 è nulla. In altre parole il centro di massa del sistema formato dalle masse m_1 ed m_2 si muove di moto rettilineo uniforme. Alla stessa conclusione si poteva giungere applicando la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi e considerando che il risultante delle forze esterne che agisce sulle masse m_1 e m_2 è nullo (forza peso bilanciata dalla reazione vincolare di piano orizzontale; si noti che la forza elastica che si scambiano m_1 ed m_2 è interna al sistema). Poiché la velocità del centro di massa (V_C) è costante essa è pari al suo valore assunto inizialmente:

$$V_C(t) = V_C(0) = \frac{m_1\dot{x}_1(0) + m_2\dot{x}_2(0)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0 \tag{17}$$

Da cui possiamo facilmente ottenere la legge oraria del centro di massa:

$$X_C(t) = V_C(0)t + X_C(0) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0 t + X_C(0) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0 t + \frac{m_2}{m_1 + m_2}l_0 \tag{18}$$

Dividendo la prima delle (16) per m_1, la seconda per m_2 e poi effettuando la differenza otteniamo la seguente equazione per la variabile $X = x_2 - x_1$:

$$\ddot{X} = -\frac{k}{\mu}(X - l_0) = -\omega_{12}^2(X - l_0) \tag{19}$$

dove $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ è la massa ridotta del sistema di masse m_1 e m_2. La (19) rappresenta l'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione $\omega_{12} = \sqrt{k/\mu}$. Le soluzioni sono date da:

$$X(t) = A\cos\omega_{12}t + B\sin\omega_{12}t + l_0 \tag{20}$$

Le costanti A e B si determinano imponendo le condizioni iniziali ossia: $\dot{X}(0) = \dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) = -v_0$ e $X(0) = x_2(0) - x_1(0) = l_0$. È facile vedere che imponendo tali condizioni iniziali si arriva alla legge oraria:

$$X(t) = l_0 - \frac{v_0}{\omega_{12}}\sin\omega_{12}t \tag{21}$$

A partire dalle definizioni di X_C e X possiamo facilmente esprimere le quantità x_1 e x_2 in termini di X_C e X:

$$\begin{cases} x_1(t) = X_C(t) - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}X(t) \\ x_2(t) = X_c(t) + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}X(t) \end{cases} \tag{22}$$

Per deteriminare la posizione delle masse m_1 ed m_2 all'istante $t = 1$s dopo l'urto basta sostituire nelle (22) $t = 1$s:

$$\begin{cases} x_1(1) = X_C(1) - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}X(1) \approx 1.54\text{m} \\ x_2(1) = X_C(1) + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}X(1) \approx 2.52\text{m} \end{cases} \tag{23}$$

Esercizio 3

Indichiamo con P_A e P_B la pressione del fluido in corrispondenza della base del pistone A e B rispettivamente. Assumendo il fluido incomprimibile, per la legge di Stevino possiamo scrivere:

$$P_A = P_B + \rho g h \tag{24}$$

D'altra parte le pressioni P_A e P_B esercitate dai pistoni A e B sul fluido sono pari rispettivamente a $m_A g/S_A$ e $m_B g/S_B$ con S_A ed S_B superfici dei due pistoni. Sostituento nella (24) si ottiene:

$$h = \frac{P_A - P_B}{\rho g} = \frac{m_A S_B - m_B S_A}{S_A S_B \rho} = \frac{4}{\pi}\frac{m_A d_B^2 - m_B d_A^2}{d_A^2 d_B^2 \rho} \approx 1.55\text{m} \tag{25}$$

Esercizio 4

a) Applicando la legge di stato dei gas perfetti allo stato iniziale del gas è possibile ricavare il numero di moli n di ossigeno da cui poi la massa m di ossigeno in grammi moltiplicando per la sua massa molare:

$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} \qquad m = nM = \frac{P_0 V_0}{RT0} M \approx 8.0\mathrm{g} \tag{26}$$

b) Il volume finale V si ottiene semplicemente sommando al volume iniziale V_0 l'aumento di volume dovuto al fatto che il pistone si è sollevato di un tratto h. Di conseguenza:

$$V = V_0 + Sh = 5.4\mathrm{l} \tag{27}$$

La pressione finale P si ottiene applicando la legge di stato dei gas prefetti allo stato finale del gas:

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{T}{T_0} \frac{V_0}{V_0 + Sh} P_0 \approx 1.14\mathrm{atm} \tag{28}$$

c) Se indichiamo con P_e la pressione esercitata dal pistone sul gas per effetto della molla di costante elastica k evidentemente si ha $P = P_0 + P_e$ e quindi $P_e = P - P_0$. D'altra parte $P_e = kh/S$ e quindi ricordando la (28) si ottiene:

$$k = \frac{S}{h}(P - P_0) = \frac{S}{h} \frac{V_0(T - T_0) - T_0 Sh}{T_0(V_0 + Sh)} P_0 \approx 1.45 \times 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{29}$$

d) Il lavoro L compiuto dal gas è dato da:

$$L = \int_{V_0}^{V} p dV = \int_0^h p(x) S dx \tag{30}$$

dove $p(x)$ indica la pressione del gas durante la sua espansione corrispondente al pistone ad un'altezza x rispetto alla sua posizione iniziale. Evidentemente $p(x) = P_0 + kx/S$. Sostituendo tale espressione nella (30) e ricordando la (29) si ottiene:

$$L = \int_0^h (P_0 S + kx) dx = Sh \frac{P + P_0}{2} \approx 43.4\mathrm{J} \tag{31}$$

d) Il calore Q assorbito dal gas si ottiene applicando il primo principio della termodinamica $Q - L = \Delta U$ e quindi $Q = L + \Delta U$. Tenendo conto che la variazione di energia interna del gas è data da $\Delta U = nc_V(T - T_0)$ e che per un gas biatomico $c_V = 5R/2$ si ottiene:

$$Q = \frac{1}{2} Sh(P + P_0) + \frac{5}{2} \frac{T - T_0}{T_0} V_0 P_0 \approx 340.4\mathrm{J} \tag{32}$$