Prova di Esame di Fisica Generale II
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
28 maggio 2025

Esercizio 1

a) Per il principio di sovrapposizione il campo elettrico generato dai due dischi è pari alla somma dei campi elettrici generati dai singoli dischi. Se, pertanto, indichiamo con $\vec{E}$ il campo totale e con $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ rispettivamente i campi generati dai dischi 1 e 2 avremo $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

La distribuzione di carica σ_1 uniforme sul disco 1 determina una simmetria cilindrica. Di conseguenza, il campo elettrico $\vec{E}_1$ gode della stessa tipologia di simmetria. Per questo motivo è comodo descrivere il problema utilizzando le coordinate cilindriche. Fissiamo un sistema di riferimento S con origine nel centro del disco 1 e con asse z coincidente con l'asse che unisce i centri dei due dischi. In S un generico punto P dello spazio tridimensionale è individuato dal raggio vettore $\vec{r}$ di coordinate (ρ, ϕ, z) dove ρ e ϕ indicano rispettivamente la lunghezza e l'angolo (rispetto all'asse x) della proiezione di $\vec{r}$ sul piano xy (ossia sul piano su cui giace il disco 1). Vista la simmetrica cilindrica, in generale, il campo elettrico non può dipendere dall'angolo ϕ ma solo dalle coordinate ρ e z ($\vec{E}_1 = \vec{E}_1(\rho, z)$). Poiché, inoltre siamo interessati a calcolare il campo elettrico esclusivamente sui punti dell'asse z (ossia per $\rho = 0$) è ovvio che in tali circostanze il campo elettrico dipende unicamente dalla coordinata z ossia $\vec{E}_1 = \vec{E}_1(z)$.

Supponiamo, di considerare un generico elemento A di superficie infinitesimale dS del disco 1 posto nel punto $(\rho, \phi, 0)$ (ovviamente con $\rho \leq R$). Esso è dotato di un carica $dq_A = \sigma_1 dS$. Il campo elettrico infinitesimale generato da dq_A in un generico punto P di coordinate $(0, 0, z)$ (quindi sull'asse z) è quello generato da un carica puntiforme:

$$d\vec{E}_A = \frac{dq_A}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_{AP}}{r_{AP}^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma_1 dS}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\vec{r}_{AP} \tag{1}$$

dove $\vec{r}_{AP}$ rappresenta il vettore congiungente i punti A e P. Vista la simmetria del problema, qualsiasi sia A appartenente al disco è sempre possibile trovare un altro punto B sempre appartenente al disco simmetrico di A rispetto all'asse z. In particolare, le coordinate del punto B sono $(\rho, \phi + \pi, 0)$ mentre la sua carica è $dq_B = \sigma_1 dS = dq_A$. Analogamente a quanto fatto in precedenza, il campo elettrico generato da dq_B è:

$$d\vec{E}_B = \frac{dq_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_{BP}}{r_{BP}^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma_1 dS}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\vec{r}_{BP} \tag{2}$$

dove $\vec{r}_{BP}$ rappresenta il vettore congiungente i punti B e P. Si noti che nello scrivere la (2) si è tenuto conto che per questioni di simmetria i vettori $\vec{r}_{AP}$ e $\vec{r}_{BP}$ hanno lo stesso modulo e quindi $r_{AP} = r_{BP} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Per il principio di sovrapposizione il campo elettrico in P generato dagli elementi di disco infinitesimali nei punti A e B è dato da:

$$d\vec{E}_1 = d\vec{E}_A + d\vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma_1 dS}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}(\vec{r}_{AP} + \vec{r}_{BP}) \tag{3}$$

Si noti ora che i vettori $\vec{r}_{AP}$ e $\vec{r}_{BP}$ giacciono entrambi su un piano individuato dai versori $\hat{k}$ e $\hat{\rho}$ e come già detto hanno lo stesso modulo. Questo implica che essi hanno la stessa componente lungo $\hat{k}$ ma componenti uguali e opposte lungo $\hat{\rho}$. Di conseguenza, la somma vettoriale che compare nella (3) è parallela a $\hat{k}$ ed ha modulo pari al doppio della componente lungo $\hat{k}$ di $\vec{r}_{AP}$ (o equivalentemente $\vec{r}_{BP}$). Pertanto, avremo:

$$\vec{r}_{AP} + \vec{r}_{BP} = 2(\vec{r}_{AP} \cdot \hat{k})\hat{k} = 2\sqrt{\rho^2 + z^2}\cos\alpha\hat{k} \tag{4}$$

dove si è indicato con α l'angolo compreso tra il vettore $\vec{r}_{AP}$ e il versore $\hat{k}$ dell'asse z. Da considerazioni geometriche si vede immediatamente che:

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \tag{5}$$

Sostituendo la (4) e la (5) nella (3) si ottiene:

$$d\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 z}{2\pi\epsilon_0}\frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\hat{k} \tag{6}$$

dove si è tenuto conto del fatto che l'elemento di superficie infinitesimale del disco 1 nelle coordinate scelte è dato da $dS = \rho d\rho d\phi$.

Si noti che $d\vec{E}_1$ ha direzione uguale o opposta a quella del versore $\hat{k}$ (ossia dell'asse z) a seconda se il fattore $\sigma_1 z$ è positivo o negativo. Se, ad esempio, supponiamo $\sigma_1 > 0$ allora $d\vec{E}_1$ è diretto come l'asse z se $z > 0$ (ossia a destra del disco) in direzione opposta se $z < 0$ (ossia a sinistra del disco) in accordo con il fatto che in tal caso le linee di forza del campo sono sempre uscenti dal disco. Ovviamente la situazione si ribalta se $\sigma_1 < 0$ in quanto in tal caso le linee di forza sono sempre entranti nel disco.

Per ottenere il campo $\vec{E}_1$ generato dall'intero disco occorre integrare la (6) su tutto il disco 1. Per far ciò l'integrale in $d\rho$ va da 0 a R mentre quello in $d\phi$ deve andare da 0 a π e non 2π in quanto nella (6) abbiamo già tenuto conto del contributo della coppia di punti simmetrici rispetto all'asse z. Eseguendo tale integrale e tenendo conto delle direzioni del campo viste precedemente si ottiene:

$$\vec{E}_1(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\hat{k} & z \geq 0 \\ -\dfrac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\left(1 + \dfrac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\hat{k} & z < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Per calcolare $\vec{E}_2(z)$ si procede in modo del tutto analogo sostituendo σ_2 con σ_1 e tenendo conto del fatto che nel sistema S il centro del disco 2 non si trova nell'origine ma nel punto di coordinate $(0, 0, D)$:

$$\vec{E}_2(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{z - D}{\sqrt{R^2 + (z - D)^2}}\right)\hat{k} & z \geq D \\ -\dfrac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\left(1 + \dfrac{z - D}{\sqrt{R^2 + (z - D)^2}}\right)\hat{k} & z < D \end{cases} \tag{8}$$

Di conseguenza il campo totale generato dai due dischi sull'asse z è dato dalla somma dei campi (7) e (8):

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon_0}\left[\sigma_1\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) + \sigma_2\left(1 - \dfrac{z - D}{\sqrt{R^2 + (z - D)^2}}\right)\right]\hat{k} & z \geq D \\ \dfrac{1}{2\epsilon_0}\left[\sigma_1\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) - \sigma_2\left(1 + \dfrac{z - D}{\sqrt{R^2 + (z - D)^2}}\right)\right]\hat{k} & 0 \leq z < D \\ -\dfrac{1}{2\epsilon_0}\left[\sigma_1\left(1 + \dfrac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) + \sigma_2\left(1 + \dfrac{z - D}{\sqrt{R^2 + (z - D)^2}}\right)\right]\hat{k} & z < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Il potenziale $V(z)$ generato dai due dischi lungo l'asse z si ottiene integrando la (9).
In particolare consideriamo la regione $z \geq D$:

$$\begin{aligned} V(z)-V(\infty) &= \frac{1}{2\epsilon_0}\int_z^{\infty}\left[\sigma_1\left(1-\frac{\xi}{\sqrt{R^2+\xi^2}}\right)+\sigma_2\left(1-\frac{\xi-D}{\sqrt{R^2+(\xi-D)^2}}\right)\right]d\xi \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\left\{\sigma_1\left[\xi-\sqrt{R^2+\xi^2}\right]_z^{\infty}+\sigma_2\left[\xi-\sqrt{R^2+(\xi-D)^2}\right]_z^{\infty}\right\} \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\left\{\sigma_1\left[\sqrt{R^2+z^2}-z\right]+\sigma_2\left[\sqrt{R^2+(z-D)^2}-(z-D)\right]\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

Ponendo $V(\infty)=0$ ricaviamo:

$$V(z)=\frac{1}{2\epsilon_0}\left\{\sigma_1\left[\sqrt{R^2+z^2}-z\right]+\sigma_2\left[\sqrt{R^2+(z-D)^2}-(z-D)\right]\right\} \tag{11}$$

Passiamo ora a considerare la regione $0 \leq z < D$:

$$\begin{aligned} V(z)-V(D) &= \frac{1}{2\epsilon_0}\int_z^{D}\left[\sigma_1\left(1-\frac{\xi}{\sqrt{R^2+\xi^2}}\right)-\sigma_2\left(1+\frac{\xi-D}{\sqrt{R^2+(\xi-D)^2}}\right)\right]d\xi \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\left\{\sigma_1\left[\xi-\sqrt{R^2+\xi^2}\right]_z^{D}-\sigma_2\left[\xi+\sqrt{R^2+(\xi-D)^2}\right]_z^{D}\right\} \\ &= \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-z+D-\sqrt{R^2+D^2}\right] \\ &+ \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2+(z-D)^2}+(z-D)-R\right] \end{aligned} \tag{12}$$

Calcolando $V(D)$ della (11) e sostituendolo nella (12) si ottiene:

$$V(z)=\frac{1}{2\epsilon_0}\left\{\sigma_1\left[\sqrt{R^2+z^2}-z\right]+\sigma_2\left[\sqrt{R^2+(z-D)^2}+(z-D)\right]\right\} \tag{13}$$

Infine nella regione $z < 0$:

$$\begin{aligned} V(z)-V(0) &= -\frac{1}{2\epsilon_0}\int_z^{0}\left[\sigma_1\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{R^2+\xi^2}}\right)+\sigma_2\left(1+\frac{\xi-D}{\sqrt{R^2+(\xi-D)^2}}\right)\right]d\xi \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\left\{\sigma_1\left[\xi+\sqrt{R^2+\xi^2}\right]_0^{z}+\sigma_2\left[\xi+\sqrt{R^2+(\xi-D)^2}\right]_0^{z}\right\} \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\left\{\sigma_1\left[z+\sqrt{R^2+z^2}-R\right]+\sigma_2\left[z+\sqrt{R^2+(z-D)^2}-\sqrt{R^2+D^2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{14}$$

Calcolando $V(0)$ della (13) e sostituendolo nella (14) si ottiene:

$$V(z)=\frac{1}{2\epsilon_0}\left\{\sigma_1\left[\sqrt{R^2+z^2}+z\right]+\sigma_2\left[\sqrt{R^2+(z-D)^2}+(z-D)\right]\right\} \tag{15}$$

b) Sulla carica q agisce la forza $\vec{F}(z)=q\vec{E}(z)$. Se il punto $z=D/3$ è di equilibrio per la carica q deve necessariamente essere $\vec{F}(D/3)=\vec{0}$ ossia $\vec{E}(D/3)=\vec{0}$. Sostituendo quindi $z=D/3$ nella (9) e imponendo l'annullarsi del campo si ricava:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{1-\frac{2D}{\sqrt{9R^2+4D^2}}}{1-\frac{D}{\sqrt{9R^2+D^2}}} \tag{16}$$

Esercizio 2

a) Il circuito è composto da due maglie indipendenti:

(a) maglia composta del generatore f_1 e dalle resistenze R_1 e R_2

(b) maglia composta delle resistenze R_2, R_3 e dal generatore f_2

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff ad ognuna di queste maglie assumendo delle correnti di maglia fittizie I_a e I_b tutte circolanti in senso orario.

$$\begin{cases} I_a R_1 + (I_a - I_b)R_2 = f \\ (I_b - I_a)R_2 + I_b R_3 = -f \end{cases} \tag{17}$$

Risolvendo per le incognite I_a ed I_b si ottiene:

$$\begin{cases} I_a = \dfrac{fR_3}{(R_1+R_3)R_2 + R_1R_3} \approx 5.22\text{mA} \\ I_b = -\dfrac{fR_1}{(R_1+R_3)R_2 + R_1R_3} \approx -15.65\text{mA} \end{cases} \tag{18}$$

Si noti che il segno meno ottenuto per I_b indica semplicemente che il verso in cui essa circola nella maglia b è opposto rispetto a quanto ipotizzato (ossia è antiorario). Le correnti che circolano nelle resistenze R_1 e R_3 sono proprio le correnti di maglia I_a ed I_b date dalle (18) prese in valore assoluto.

b) La potenza totale dissipata per effetto Joule è pari alla somma dalle potenze dissipate delle singole resistenze del circuito:

$$W = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 \tag{19}$$

dove $I_1 = I_a$, $I_3 = |I_b|$ e $I_2 = I_a + |I_b|$. Poiché, infatti, I_a circola nella maglia a in senso orario (in quanto $I_a > 0$) e I_b nella maglia b in senso antiorario ($I_b < 0$) è chiaro che entrambe queste correnti circolano nello stesso verso attraverso la resistenza R_2 e quindi vanno sommate (in valore assoluto) per ottenere la corrente reale circolante in R_2. Sostituendo nella (19) le espressioni trovate per I_a ed I_b si ottiene:

$$W = \frac{f^2(R_1+R_3)}{(R_1+R_3)R_2 + R_1R_3} \approx 0.25\text{W} \tag{20}$$

c) La differenza di potenziale che misurerebbe un voltmetro ideale (ossia con resistenza interna infinita) ai capi di R_2 è pari a:

$$\Delta V_2 = I_2 R_2 = (I_a + |I_b|)R_2 = \frac{f(R_1+R_3)R_2}{(R_1+R_3)R_2 + R_1R_3} \tag{21}$$

Tuttavia nel nostro caso il voltmetro ha una resistenza interna pari a r che occorre considerare collegata in parallelo ad R_2. Di conseguenza, per ricavare $\Delta V_2^{(m)}$ ossia la differenza di potenziale misurata dal voltmetro reale ai capi di R_2 possiamo ancora utilizzare la (21) a patto di sostituire in essa R_2 con $R_p = R_2 r/(R_2 + r)$ pari al parallelo delle resistenze R_2 ed r:

$$\Delta V_2^{(m)} = \frac{f(R_1+R_3)R_2 r}{(R_1+R_3)R_2 r + R_1R_3(R_2+r)} \approx 10.3\text{V} \tag{22}$$

d) La corrente I_v che circola nel voltmetro si ottiene applicando la legge di Ohm al voltmetro stesso:

$$I_v = \frac{\Delta V_2^{(m)}}{r} = \frac{f(R_1+R_3)R_2}{(R_1+R_3)R_2 r + R_1R_3(R_2+r)} \approx 2.1\text{mA} \tag{23}$$

Esercizio 3

a) Per calcolare il campo magnetico lungo l'asse della corona rotante possiamo immaginare la corona circolare come formata da un insieme di spire circolari di raggio r e larghezza dr. In altri termini, possiamo pensare la corona circolare come un susseguirsi di tante spire di larghezza infinitesima che al variare del proprio raggio vanno via via a ricoprire l'intera superficie della corona circolare. Indichiamo con S la generica spira di raggio r e larghezza dr. La carica dq contenuta in S è data da:

$$dq = \sigma_0 dS = 2\pi\sigma_0 r dr \tag{24}$$

con σ_0 densità superficiale di carica della corona circolare. Si noti che nello scrivere la (24) si è tenuto conto che la superficie della spira S è data dall'area della corona circolare di raggio r e larghezza dr ossia $dS = 2\pi r dr$. Poiché la carica totale posseduta dalla corona circolare è Q_0 dall'ipotesi di distribuzione di carica uniforme si ricava:

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{\pi(R_e^2 - R_i^2)} \tag{25}$$

Sostituendo tale espressione nella (24) si ottiene:

$$dq = \frac{2Q_0}{(R_e^2 - R_i^2)} r dr \tag{26}$$

Quando la corona circolare viene messa in rotazione con velocità angolare ω costante, la sua distribuzione di carica (fissa visto che essa è costituita da materiale isolante) viene a dipendere dal tempo e quindi costituisce una corrente elettrica. In particolare, la corrente elettrica dI corrispondente alla carica contenuta nella spira S (in rotazione con velocit'a angolare ω) è data dal rapporto della carica in essa contenuta dq e il periodo T del suo moto rotatorio. Ricordando che $T = 2\pi/\omega$ si ha:

$$dI = \frac{Q_0\omega}{\pi(R_e^2 - R_i^2)} r dr \tag{27}$$

In generale, l'espressione del campo magnetico generato da un spira circolare di raggio R percorsa da una corrente I in corrispondenza del proprio asse ad una distanza z dal suo centro è ben nota e si calcola utilizzando la prima legge di Laplace:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \tag{28}$$

dove $\hat{k}$ è il versore dell'asse della spira.

Per la spira S la (28) si scrive:

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dI}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi(R_e^2 - R_i^2)} \frac{r^3 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \tag{29}$$

Per ottenere il campo magnetico totale generato lungo l'asse dalla corona circolare basta integrare la (29) tra R_i e R_e:

$$\vec{B}(z) = \int d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi(R_e^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_e} \frac{r^3 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \tag{30}$$

Eseguendo l'integrale per parti si ottiene facilmente:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi(R_e^2 - R_i^2)} \left[\frac{2z^2 + r^2}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right]_{R_i}^{R_e} \hat{k} = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi(R_e^2 - R_i^2)} \left[\frac{2z^2 + R_e^2}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} - \frac{2z^2 + R_i^2}{\sqrt{R_i^2 + z^2}}\right] \hat{k} \quad (31)$$

In corrispondenza del centro della corona circolare il modulo del campo magnetico vale:

$$B(0) = \frac{\mu_0 Q_0 \omega}{2\pi} \frac{R_e - R_i}{R_e^2 - R_i^2} \approx 1.11 \times 10^{-6}\mathrm{T} \quad (32)$$

b) Il modulo dm del momento magnetico della spira S è per definizione il prodotto della corrente che circola in S (dI) per l'area racchiusa da S (πr^2):

$$dm = dI\pi r^2 = \frac{Q_0 \omega}{(R_e^2 - R_i^2)} r^3 dr \quad (33)$$

Il modulo del momento magnetico totale della corona circolare si ottiene integrando la (33) con r che varia da R_i a R_e:

$$m = \int dm = \frac{Q_0 \omega}{(R_e^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_e} r^3 dr = \frac{Q_0 \omega}{4} \frac{R_e^4 - R_i^4}{R_e^2 - R_i^2} \approx 8.12 \times 10^{-4}\mathrm{Am}^2 \quad (34)$$

Esercizio 4

a) Nell'istante in cui l'interruttore viene chiuso nel circuito circola una corrente elettrica in una regione dello spazio in cui è presente il campo magnetico $\vec{B}_0$. Le cariche in movimento nel circuito sono quindi soggette ad una forza data dalla seconda legge di Laplace. L'effetto di tale forza è quello di mettere in moto la sbarretta A che rappresenta l'unica parte mobile del circuito considerato. Se indichiamo con I l'intensità di corrente che circola nella sbarretta e con $d\vec{l}$ il generico elemento infinitesimo della sua lunghezza, la forza $d\vec{F}$ che agisce su $d\vec{l}$ è pari a:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}_0 \quad (35)$$

Per effetto del generatore f la corrente circola in A da C_1 verso C_2 mentre $\vec{B}_0$ è ortogonale al piano del circuito ed uscente da esso. Questo implica che $d\vec{F}$ si trova nel piano del circuito ed è perpendicolare alla sbarretta e diretta da sinistra verso destra. La sbarretta, quindi, si mette in moto traslando rigidamente da sinistra verso destra. Allo stesso tempo quando questo accade si ha una variazione del flusso del campo magnetico $\vec{B}_0$ attraverso la superficie concatenata al circuito (perché muovendosi A varia la forma del circuito) che genera nel circuito una forza elettromotrice indotta f_i data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$f_i = -\frac{d\Phi_S}{dt} \quad (36)$$

dove Φ_S rappresenta il flusso di $\vec{B}_0$ attraverso la superficie S concatenata al circuito. Fissiamo un sistema di riferimento in cui descrivere il moto di A. In particolare scegliamo l'origine nella posizione del contatto C_1 quando l'interruttore è aperto, asse x diretto come $\vec{B}_0$, asse z diretto lungo la sbarretta (nel verso che va C_1 ad C_2) e asse y perpendicolare alla sbarretta (nel verso che va da sinistra a destra).

Come già detto nel momento in cui l'interruttore viene chiuso la sbarretta di mette in moto nella direzione individuata dall'asse y. In un generico istante t successivo alla chiusura dell'interruttore il flusso Φ_S è dato da:

$$\Phi_S = \int_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = B_0 \int_0^l dz \int_0^{L+y} d\xi = B_0 l(L + y) \quad (37)$$

dove L rappresenta la distanza iniziale (prima della chiusura dell'interruttore) tra A e l'altro ramo del circuito contenente il generatore f (parallelo ad A). Sostituendo la (37) nella (36) si ottiene:

$$f_i = -B_0 l \frac{dy}{dt} = -B_0 l v \tag{38}$$

dove con v si è indicata la velocità della sbarretta.

Tenendo conto che la sbarretta ha una resistenza R, la corrente I che in essa circola per effetto sia della forza elettromotrice f che della forza elettromotrice indotta f_i è pari a:

$$I = \frac{f + f_i}{R} = \frac{f - B_0 l v}{R} \tag{39}$$

Sostituendo il valore di I dato dalla (39) nella (35) e tenendo conto che nel sistema scelto $d\vec{l}$ è diretto lungo z e $\vec{B}_0$ lungo l'asse x si ottiene:

$$d\vec{F} = \frac{fB_0 - B_0^2 l v}{R} dy \hat{j} \tag{40}$$

dove con $\hat{j}$ si è indicato il versore dell'asse y.

Per ottenere la forza totale che agisce su A occorre integrare $d\vec{F}$ su tutta la sbarretta:

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \hat{j} \int_0^l \frac{fB_0 - B_0^2 l v}{R} dy = \frac{fB_0 l - B_0^2 l^2 v}{R} \hat{j} \tag{41}$$

Nota la forza che agisce su A siamo in grado di scrivere l'equazione del suo moto:

$$m\frac{dv}{dt} = F = \frac{fB_0 l - B_0^2 l^2 v}{R} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{fB_0 l}{mR} \tag{42}$$

dove si è posto:

$$\tau = \frac{mR}{B_0^2 l^2} \tag{43}$$

La (42) rappresenta un'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti constanti non omogenea. La generica soluzione si ottiene sommando alla generica soluzione dell'equazione omogenea associata una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea associata alla (42) ha come generica soluzione:

$$v(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{44}$$

con K costante di integrazione.

Per ottenere una soluzione particolare dell'equazione completa basta sostituire nell'equazione completa (42) $v(t) = v_L$ con v_L costante. Procedendo in tal modo è facile vedere che si ottiene:

$$v_L = \frac{f}{B_0 l} \tag{45}$$

Di conseguenza, la generica soluzione $v(t)$ della (42) si scrive come:

$$v(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_L \tag{46}$$

Per determinare la costante K occorre imporre le condizioni iniziali ossia imporre che la sbarretta inizialmente è ferma. Imponendo quindi che $v(0) = 0$ si ottiene:

$$v(t) = v_L \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \tag{47}$$

La velocità della sbarretta a regime si ottiene dalla (47) nel limite $t \to \infty$:

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = v_L = \frac{f}{B_0 l} = 166.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{48}$$

b) Tra gli istanti $t_0 = 0$ e t_1 l'interruttore è chiuso e la situazione è la stessa discussa nel punto precedente. La velocità della sbarretta per $0 \leq t \leq t_1$ è quindi descritta ancora dalla (47). Di conseguenza, per ottenere lo spazio percorso dalla sbarretta tra 0 e t_1 basta integrare la (47) tra tali istanti:

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} v(t)dt = v_L t_1 + v_L \tau \left[\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) - 1\right] \tag{49}$$

Tenendo conto della (47) e che inizialmente la sbarretta si trova nell'origine del sistema di riferimento scelto (ossia $y(0) = 0$) la (49) diventa:

$$y_1 \equiv y(t_1) = v_L t_1 - \tau v(t_1) \tag{50}$$

Per $t > t_1$, l'interruttore viene riaperto e quindi non vi è nessuna forza elettromotrice esterna agente su A. Tuttavia, essendo la sbarretta in moto con velocità $v(t_1)$ nel campo magnetico, continua ad esserci una corrente indotta. In tali condizioni, quindi, il moto della sbarretta è ancora descritto dalla (42) a patto di porre in essa $f = 0$:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \tag{51}$$

Poiché siamo interessati a conoscere la distanza percorsa dalla sbarretta prima di fermarsi è comodo ricavare v in funzione della distanza percorsa y e non del tempo t. Se quindi si sostituisce nella (51) $v = dy/dt$ si ottiene:

$$\frac{dv}{dy} + \frac{1}{\tau} = 0 \tag{52}$$

La generica soluzione di tale equazione si scrive come:

$$v(y) = -\frac{y}{\tau} + K \tag{53}$$

Anche in questo caso la costante di integrazione K si determina in base alle condizioni iniziali. Nell'istante $t = t_1$ la sbarretta si trova nella posizione y_1 data dalla (50) e possiede una velocità $v(t_1)$ data dalla (47) calcolata in $t = t_1$. Imponendo quindi nella (53) $v(y_1) = v(t_1)$ si ha:

$$v(y) = -\frac{y - y_1}{\tau} + v(t_1) \tag{54}$$

La sbarretta si ferma quando la sua velocità si annulla. Quindi la distanza totale D percorsa dalla sbarretta è il valore di y per cui la (54) si annulla:

$$D = y_1 + \tau v(t_1) = v_L t_1 = \frac{f t_1}{B_0 l} \approx 83.3\text{m} \tag{55}$$