

Prova di Esame di Fisica Generale II
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
6 novembre 2025

Esercizio 1

- a) Inizialmente le armature di entrambi i condensatori sono alla stessa differenza di potenziale ΔV e sono separate dal vuoto. Possiamo facilmente calcolare la carica Q_1 e Q_2 depositata sulle armature di ciascuno di entrambi dalla definizione di capacità:

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 \Delta V = \epsilon_0 \frac{L^2}{d_1} \Delta V \\ Q_2 = C_2 \Delta V = \epsilon_0 \frac{L^2}{d_2} \Delta V \end{cases} \quad (1)$$

dove si è tenuto conto del fatto che la capacità di un condensatore piano (nel vuoto) è $C = \epsilon_0 S/d = \epsilon_0 L^2/d$.

Una volta scollegato il generatore dal condensatore 2 esso resta isolato e, pertanto, la carica Q_2 data dalla seconda delle (1) si mantiene costante.

Quando si inserisce la lastra di materiale dielettrico tra le armature dei condensatori la loro capacità si modifica. Questo implica una variazione dell'energia elettrostatica U immagazzinata all'interno di ciascuno dei due condensatori. Tale variazione di U comporta la comparsa di una forza di natura meccanica sulla lastra che tende a farla muovere nella posizione che minimizza l'energia elettrostatica U .

In generale, dato un condensatore di capacità C , la sua energia elettrostatica U può essere espressa equivalentemente in termini della sua differenza di potenziale ΔV o della sua carica Q come segue:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (2)$$

Poiché la carica del condensatore 2 resta costante (essendo isolato) per il calcolo della sua energia elettrostatica U_2 conviene utilizzare l'espressione di U in termini della carica Q_2 precedentemente calcolata. La capacità C_2 dipende dalla posizione della lastra dielettrica. Se indichiamo con x il tratto della lastra che si trova tra le armature del condensatore 2 avremo $C_2 = C_2(x)$.

Per calcolare C_2 in funzione di x basta notare che la situazione in cui la lastra è inserita nel tratto x è del tutto equivalente a due condensatori piani collegati in parallelo: il primo con capacità $C_2^a = \epsilon_0 \epsilon_r Lx/d_2$ (corrispondente alla porzione del condensatore 2 in cui è inserita la lastra) e il secondo con capacità $C_2^b = \epsilon_0 L(L-x)/d_2$ (corrispondente alla porzione del condensatore 2 ancora non occupata dalla lastra). Di conseguenza la capacità del condensatore 2 è data da:

$$C_2(x) = C_2^a + C_2^b = \epsilon_0 \frac{L}{d_2} [L + x(\epsilon_r - 1)] \quad (3)$$

Ricordando la (1) e la (2), l'energia elettrostatica U_2 è data da:

$$U_2(x) = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2(x)} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{L^3}{d_2} \Delta V^2 \frac{1}{L + x(\epsilon_r - 1)} \quad (4)$$

In accordo con la (3) e la (4), man mano che la lastra entra all'interno del condensatore 2 la sua capacità aumenta (in quanto $\epsilon_r > 1$) e, quindi, U_2 diminuisce. Di conseguenza, la forza meccanica $\vec{F}_2$ che agisce sulla lastra tenderà a risucchiare la lastra all'interno del condensatore (in modo da minimizzare U_2). Per calcolare tale forza occorre calcolare il gradiente della funzione $U_2(x)$. Poiché U_2 dipende solo da x la forza $\vec{F}_2$ è diretta come l'asse x ed è data da:

$$F_2 = -\frac{dU_2}{dx} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{L^3}{d_2} \Delta V^2 \frac{\epsilon_r - 1}{[L + x(\epsilon_r - 1)]^2} \quad (5)$$

Poiché $\epsilon_r > 1$, F_2 è positiva e, pertanto, come già anticipato, F_2 è diretta nella direzione in cui x aumenta spingendo la lastra all'interno del condensatore 2. Si noti, inoltre, che F_2 diminuisce al crescere di x . In particolare F_2 è massima per $x = 0$ ossia quando la lastra è completamente fuori dal condensatore.

Per il condensatore 1 si ragiona in maniera analoga. Questa volta però si mantiene costante la differenza di potenziale ai suoi capi (essendo il condensatore 1 collegato al generatore). Se indichiamo con y il tratto della lastra che si trova all'interno delle armature del condensatore 1, l'energia U_1 è quindi data da:

$$U_1(y) = \frac{1}{2}C_1(y)\Delta V^2 \quad (6)$$

Differentemente dal caso precedente il condensatore 1 non è isolato in quanto è collegato al generatore. Nell'effettuare il bilancio energetico, quindi, va considerata anche l'energia erogata dal generatore U_g . In particolare, per la conservazione dell'energia, una variazione dell'energia dU_g erogata dal generatore deve essere pari alla somma della variazione di energia elettrostatica del condensatore dU_1 e della variazione di energia meccanica dU_m legata al lavoro effettuato dalla forza che agisce sulla lastra ossia:

$$dU_g = dU_1 + dU_m \quad (7)$$

Il primo termine della (7) si ottiene a partire dalla (6):

$$dU_1 = \frac{1}{2}\Delta V^2 dC_1 \quad (8)$$

Calcoliamo il termine dU_g . Supponiamo che la lastra entri di un tratto dy all'intero del condensatore 1. Per quanto visto precedentemente la sua capacità aumenta e, quindi, la sua energia elettrostatica U_1 diminuisce. Se il condensatore 1 fosse isolato accadrebbe quanto visto già per il condensatore 2 ossia la carica resterebbe costante e la sua differenza di potenziale diminuirebbe in quanto $\Delta V = Q_1/C_1$. La presenza del generatore, invece, deve assicurare che la differenza di potenziale ΔV ai capi di C_1 resti costante. Affinché questo accada occorre che il generatore faccia circolare corrente in maniera tale da aumentare la carica del condensatore (ossia caricandolo ulteriormente) in modo tale che ΔV si mantenga sempre allo stesso valore anche se la capacità del condensatore è aumentata. Se indichiamo con dq la quantità di carica che il generatore fornisce al condensatore avremo che:

$$dU_g = \Delta V dq = \Delta V^2 dC_1 \quad (9)$$

dove si è tenuto conto che la carica aggiuntiva dq che si accumula sulle armature del condensatore 1 quando la sua capacità varia di dC_1 (mentre ΔV resta costante) è data da $dq = \Delta V dC$.

Sostituendo la (8) e la (9) nella (7) si ha:

$$dU_m = dU_g - dU_1 = \frac{1}{2}\Delta V^2 dC_1 \quad (10)$$

La variazione dU_m è legata alla forza F_1 che agisce sulla lastra dalla relazione $dU_m = -F_1 dy$. Si noti che F_1 non può che essere diretta orizzontalmente visto che questa è l'unica direzione per cui si possono avere variazioni in termini energetici.

$$F_1 = -\frac{dU_m}{dy} = -\frac{1}{2}\Delta V^2 \frac{dC_1}{dy} \quad (11)$$

Da considerazioni di carattere geometrico si ha $y = L - \Delta - x$ da cui $dy = -dx$ e quindi in termini della variabile x la (11) diventa:

$$F_1 = \frac{1}{2}\Delta V^2 \frac{dC_1}{dx} \quad (12)$$

Per calcolare C_1 procediamo in maniera analoga a quanto fatto per il calcolo di C_2 . Anche in questo caso possiamo esprimere C_1 come la somma delle capacità $C_1^a = \epsilon_0 L(L - y)/d_1 = \epsilon_0 L(\Delta + x)/d_1$ (corrispondente alla porzione del condensatore 1 non occupata dalla lastra) e C_1^b (corrispondente alla porzione del condensatore 1 in cui è inserita la lastra).

Per calcolare C_1^b dobbiamo tener conto che questa volta la lastra dielettrica ha uno spessore minore della distanza tra le due armature. Fra le armature del condensatore il campo elettrico $\vec{E}$ è costante e diretto perpendicolarmente alle armature. Inoltre per la definizione di potenziale elettrico deve essere:

$$\Delta V = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (13)$$

dove Γ è un qualsiasi percorso che unisce due punti appartenenti alle due armature del condensatore. In particolare, calcoliamo l'integrale (13) lungo un percorso rettilineo perpendicolare alle due armature:

$$\Delta V = \int_0^{s_1} E_0 ds + \int_{s_1}^{s_2} E_1 ds + \int_{s_2}^{d_1} E_0 ds = E_0(d_1 - d_2) + E_1 d_2 \quad (14)$$

dove s_1, s_2 indicano rispettivamente la distanza a partire dall'armatura a potenziale minore della prima e della seconda interfaccia vuoto-lastra e E_0 ed E_1 il campo elettrico in corrispondenza dello spazio vuoto e all'interno della lastra dielettrica. Tenendo conto che $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ e che $E_1 = \sigma/(\epsilon_0 \epsilon_r)$ dove $\sigma = Q_1^b/(Ly)$ è la densità di carica sulle armature del condensatore C_1^b la (14) diventa:

$$\Delta V = \frac{Q_1^b}{Ly\epsilon_0} \frac{(d_1 - d_2)\epsilon_r + d_2}{\epsilon_r} \quad (15)$$

da cui si deduce:

$$C_1^b = \frac{Q_1^b}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r Ly}{(d_1 - d_2)\epsilon_r + d_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L(L - \Delta - x)}{(d_1 - d_2)\epsilon_r + d_2} \quad (16)$$

In definitiva:

$$C_1(x) = C_1^a + C_1^b = \epsilon_0 L \frac{Ld_1\epsilon_r - d_2(\epsilon_r - 1)(x + \Delta)}{d_1[(d_1 - d_2)\epsilon_r + d_2]} \quad (17)$$

Sostituendo tale espressione nella (12) si ottiene:

$$F_1 = -\frac{1}{2}\Delta V^2 \epsilon_0 L \frac{d_2(\epsilon_r - 1)}{d_1[(d_1 - d_2)\epsilon_r + d_2]} \quad (18)$$

Si noti come il valore di F_1 trovato è negativo ad indicare che anche il condensatore 1 tende a risucchiare al suo interno la lastra dielettrica. Inoltre, a differenza di F_2 che dipende da x , F_1

è costante e indipendente della posizione della lastra dielettrica all'interno del condensatore 1.

La lastra è in equilibrio quando il modulo delle due forze opposte $\vec{F}_1$ esercitata dal condensatore 1 e $\vec{F}_2$ esercitata dal condensatore 2 sono uguali in modulo. Imponendo quindi che $|F_2| = |F_1|$ si ottiene il valore $x = x_0$ per cui la lastra è in equilibrio. Tenendo conto delle (5) e (18) dopo semplici passaggi si ottiene:

$$x_0 = \frac{L}{\epsilon_r - 1} \left\{ \frac{\sqrt{d_1[(d_1 - d_2)\epsilon_r + d_2]}}{d_2} - 1 \right\} \approx 6.2 \text{ cm} \quad (19)$$

- b) Quando la lastra è penetrata tra le armature del condensatore 2 per il tratto x_0 dato dalla (19) la sua capacità si ottiene sostituendo $x = x_0$ nella (3). Poiché il condensatore 2 è isolato la sua carica è pari a quella posseduta dallo stesso condensatore prima dell'inserimento della lastra data dalla seconda delle (1). Di conseguenza la differenza di potenziale ΔV_2 tra le armature del condensatore 2 dopo l'inserimento della lastra è dato da:

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2(x_0)} = \frac{L}{L + x_0(\epsilon_r - 1)} \Delta V = \frac{d_2}{\sqrt{d_1[(d_1 - d_2)\epsilon_r + d_2]}} \Delta V \approx 14.3 \text{ V} \quad (20)$$

Si noti come il potenziale ΔV_2 sia minore del potenziale iniziale ΔV in accordo con il fatto che la capacità C_2 aumenta quando la lastra è parzialmente inserita tra le armature del condensatore 2. A parità di carica un aumento della capacità implica una diminuzione della differenza di potenziale.

- c) La carica Q_1 del condensatore 1 quando la lastra è penetrata tra le armature del condensatore 2 per il tratto x_0 si ottiene tenendo conto che la differenza di potenziale ai capi del condensatore 1 si mantiene costante al valore ΔV . Di conseguenza si ha:

$$Q_1 = C_1(x_0) \Delta V = \epsilon_0 L \frac{L d_1 \epsilon_r - d_2 (\epsilon_r - 1) (x_0 + \Delta)}{d_1 [(d_1 - d_2) \epsilon_r + d_2]} \Delta V \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ C} \quad (21)$$

Il valore di Q_1 dato dalla (21) risulta maggiore di quello iniziale (prima che la lastra venga inserita all'interno dei condensatori) dato dalla prima delle (1). Ancora una volta questo aumento di carica è dovuto al fatto che la capacità del condensatore 1 aumenta quando la lastra dielettrica è inserita parzialmente al suo interno. Poiché la differenza di potenziale si mantiene costante un aumento di capacità si traduce in un aumento della carica del condensatore.

Esercizio 2

- a) Il circuito è composto da due maglie indipendenti:

- (a) maglia composta dal generatore f_1 e dalle resistenze R_1 e R_3
- (b) maglia composta dalle resistenze R_2 , R_3 e dal generatore f_2 .

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff ad ognuna di queste maglie assumendo delle correnti di maglia fittizie I_a e I_b tutte circolanti in senso orario.

$$\begin{cases} I_a R_1 + (I_a - I_b) R_3 = f_1 \\ (I_b - I_a) R_3 + I_b R_2 = -f_2 \end{cases} \quad (22)$$

Risolvendo per le incognite I_a ed I_b si ottiene:

$$\begin{cases} I_a = \frac{f_1(R_2 + R_3) - f_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \\ I_b = \frac{f_1 R_3 - f_2(R_1 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \end{cases} \quad (23)$$

A partire dalla correnti I_a e I_b possiamo calcolare le correnti I_1 , I_2 e I_3 che circolano nei vari resistori:

$$\begin{cases} I_1 = I_a = \frac{f_1(R_2 + R_3) - f_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \approx 197.6 \text{mA} \\ I_2 = I_b = \frac{f_1 R_3 - f_2(R_1 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \approx 21.2 \text{mA} \\ I_3 = I_a - I_b = \frac{f_1 R_2 + f_2 R_1}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \approx 176.5 \text{mA} \end{cases} \quad (24)$$

b) Le potenze erogata dai due generatori sono:

$$\begin{cases} W_1 = f_1 I_a = \frac{f_1^2(R_2 + R_3) - f_1 f_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \approx 4.74 \text{W} \\ W_2 = -f_2 I_b = \frac{f_2 f_1 R_3 - f_2^2(R_1 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \approx -0.25 \text{W} \end{cases} \quad (25)$$

Si noti che la corrente I_b è positiva e quindi essa circola nel verso ipotizzato ossia orario. Essa quindi fluisce dal polo positivo a quello negativo del generatore f_2 . Di conseguenza il generatore f_2 non eroga ma assorbe potenza.

c) Le resistenze interne dei due generatori vanno collegate in serie ai generatori stessi. Di conseguenza, una volta aggiunte, il circuito risulta equivalente a quello dato in precedenza ma nel quale al posto delle resistenze R_1 e R_2 sono considerate la serie di tali resistenze con r_g . Per ottenere quindi la corrente che circola in R_3 basta sostituire nell'ultima delle (24) R_1 con $R_1 + r_g$ e R_2 con $R_2 + r_g$:

$$I_3 = \frac{f_1(R_2 + r_g) + f_2(R_1 + r_g)}{(R_1 + r_g)(R_2 + r_g + R_3) + (R_2 + r_g)R_3} \quad (26)$$

Da cui possiamo calcolare il potenziale ΔV_3 come:

$$\Delta V_3 = R_3 I_3 = \frac{f_1(R_2 + r_g)R_3 + f_2(R_1 + r_g)R_3}{(R_1 + r_g)(R_2 + r_g + R_3) + (R_2 + r_g)R_3} \approx 13.7 \text{V} \quad (27)$$

Esercizio 3

a) La carica puntiforme q risente sia del campo elettrico $\vec{E}$ generato dalla distribuzione di carica lineare uniforme λ sia (essendo dotata di velocità non nulla) del campo magnetico $\vec{B}$ generato dal filo conduttore percorso da corrente elettrica I . Di conseguenza, la forza complessiva che agisce sulla carica q quando si trova in A con velocità $\vec{v}_A$ è data dalla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E}_A + \vec{v}_A \times \vec{B}_A) \quad (28)$$

dove $\vec{E}_A$ e $\vec{B}_A$ indicano rispettivamente il campo elettrico generato dalla distribuzione λ e il campo magnetico generato dal filo conduttore entrambi calcolati nel punto A .

Considerata la simmetria cilindrica della distribuzione di carica λ è facile calcolare il corrispondente campo elettrico applicando il teorema di Gauss. Scegliamo in particolare una superficie cilindrica Σ centrata intorno alla distribuzione di carica filiforme di altezza L e raggio di base r_λ . Vista la simmetria cilindrica della distribuzione di carica il corrispondente campo elettrico dipende solo da r_λ ed ha direzione radiale ossia $\vec{E}(\vec{r}_\lambda) = E(r_\lambda)\hat{r}_\lambda$. Di conseguenza, il flusso di $\vec{E}$ attraverso Σ si riduce al calcolo del flusso attraverso la sua superficie

laterale dato da $\Phi = E(r_\lambda)2\pi r_\lambda L$. Per il teorema di Gauss tale flusso è pari alla carica contenuta in Σ (ossia λL) divisa per ϵ_0 . Da tale relazione ricaviamo:

$$\vec{E}(r_\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_\lambda}{r_\lambda} \quad (29)$$

dove r_λ rappresenta la distanza dalla distribuzione di carica lineare λ .

Anche il filo rettilineo infinito percorso da corrente elettrica I costituisce una sorgente di un campo magnetico dotata di simmetria cilindrica. Questo implica che anche il campo magnetico sia dotato della stessa tipologia di simmetria. Di conseguenza, il campo $\vec{B}$ generato dal filo può dipendere solo dalla distanza r dal filo ossia $\vec{B} = \vec{B}(r)$. In virtù della prima legge di Laplace, inoltre, $\vec{B}$ deve essere ortogonale alla direzione individuata dal filo. Ricaviamo quindi che il campo magnetico $\vec{B}(r)$ deve giacere nel piano ortogonale al filo e in tale piano dipende solo dalla distanza dal filo. Le linee di forza di un campo con queste caratteristiche non possono che essere delle circonferenze nel piano ortogonale alla direzione del filo. Applichiamo quindi il teorema di Ampere alla generica circonferenza γ di raggio r nel piano ortogonale al filo:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \rightarrow \quad B(r)2\pi r = \mu_0 I \quad \rightarrow \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{t} \quad (30)$$

dove si è indicato con $\hat{t}$ il versore tangente alla circonferenza γ .

Fissiamo un sistema di riferimento S con asse y verticale e diretto verso l'alto coincidente con filo conduttore, asse x orizzontale, diretto da sinistra a destra e passante per il punto A e asse z perpendicolare al piano del foglio e da esso uscente.

Nel sistema S il campo elettrico (29) calcolato nel punto A (a distanza $r_\lambda = d_A - D$ dalla distribuzione di carica λ) è dato da:

$$\vec{E}_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{i}}{d_A - D} \quad (31)$$

con $\hat{i}$ versore dell'asse x .

Analogamente il campo magnetico generato dal filo conduttore nel punto A (a distanza $r = d_A$):

$$\vec{B}_A = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\hat{k}}{d_A} \quad (32)$$

dove $\hat{k}$ rappresenta il versore dell'asse z . Si noti che visto il verso della corrente I che circola nel filo conduttore il campo magnetico in A risulta perpendicolare al piano del foglio ma entrante. Il segno meno nella (32) è presente in quanto l'asse z risulta uscente dallo stesso piano.

Sostituendo la (31) e la (32) nella (28) e tenendo conto che $\vec{v}_A = v_A \hat{j}$ (con $\hat{j}$ versore dell'asse y) si ha:

$$\vec{F} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{1}{d_A - D} \hat{i} - \mu_0 I \frac{v_A}{d_A} \hat{j} \times \hat{k} \right) \quad (33)$$

Poiché $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ la (33) diventa:

$$\vec{F} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_0} \frac{1}{d_A - D} - \mu_0 I \frac{v_A}{d_A} \right) \hat{i} \quad (34)$$

Sostituendo i valori numerici si ha $F = -8.92 \times 10^{-10} \text{N}$. Il segno meno indica che la forza (34) ha verso opposto rispetto all'asse x e, quindi, conferisce alla carica q un'accelerazione orizzontale che la porta ad avvicinarsi alla distribuzione filiforme λ . In particolare, il moto che la carica q compie a partire dal punto A sotto l'azione di tale si svolge nel piano xy .

- b) Per determinare il modulo della velocità v_B si può utilizzare il teorema delle forze vive. Se indichiamo con Γ la traiettoria che la carica q percorre nel piano xy per spostarsi da A a B si ha:

$$T_B - T_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (35)$$

Si noti come nella (35) compare solo la componente di natura elettrica di $\vec{F}$ in quanto quella magnetica non compie lavoro (essendo perpendicolare allo spostamento).

Tenendo conto della (29) e che nel piano xy si ha $\hat{r}_{\lambda} = \hat{i}$ si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\hat{i} \cdot d\vec{l}}{r_{\lambda}} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{d_A}^{d_B} \frac{dx}{x - D} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d_B - D}{d_A - D} \right) \quad (36)$$

Si noti che come deve essere il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica lineare λ è conservativo e quindi il lavoro presente nella (36) non dipende dal percorso Γ ma solo dai punti iniziali e finali.

Ricaviamo quindi:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + \frac{q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d_B - D}{d_A - D} \right)} \approx 164.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (37)$$

Per determinare la direzione del vettore $\vec{v}_B$ basta tener conto che la componente lungo y della velocità della carica q non può variare in quanto il campo magnetico non compie lavoro e la forza esercitata dal campo elettrico ha componente solo lungo x . Di conseguenza, $v_{B_y} = v_A$. Se quindi indichiamo con α l'angolo che il vettore $\vec{v}_B$ forma con l'asse delle x abbiamo:

$$\tan \alpha = -\frac{v_{B_y}}{v_{B_x}} = -\frac{v_A}{v_{B_x}} = -\frac{v_A}{\sqrt{v_B^2 - v_A^2}} = -\frac{v_A}{\sqrt{\frac{q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d_B - D}{d_A - D} \right)}} \quad (38)$$

Il segno meno nella (38) deriva dal fatto che la carica q inizialmente (ossia quando si trova in A) ha velocità solo lungo y e, quindi, componente orizzontale della velocità nulla. A partire da questa situazione, la forza (34) tende a diminuire la componente orizzontale della velocità iniziale che quindi assume valori negativi (ossia la carica deflette verso sinistra nel piano xy).

In definitiva tenendo conto della (38) si ottiene:

$$\alpha = \arctan \left[-\frac{v_A}{\sqrt{\frac{q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d_B - D}{d_A - D} \right)}} \right] \approx 113.8^\circ \quad (39)$$

- c) La carica q si muove di moto rettilineo uniforme solo se il risultante delle forze che agiscono su di essa è nullo. Di conseguenza il valore di I per cui questo accade è quello per cui la (34) si annulla:

$$I = \frac{\lambda}{\mu_0\epsilon_0} \frac{d_A}{d_A - D} \frac{1}{v_A} \approx 131.8 \text{A} \quad (40)$$

Esercizio 4

- a) Quando la spira viene messa in rotazione con velocità angolare ω , il flusso del campo magnetico $\vec{B}_0$ attraverso la superficie ad essa concatenata varia nel tempo. Di conseguenza, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz si genera una forza elettromotrice indotta f_i nella spira e, quindi, in essa circola una corrente i .

Descriviamo il problema in un sistema di riferimento in cui l'asse y è diretto come $\vec{B}_0$ mentre gli assi x e z sono diretti rispettivamente come il lato orizzontale e verticale della spira quando essa si trova nella posizione iniziale (ossia è verticale).

Se indichiamo con Γ la superficie concatenata alla spira, il flusso di $\vec{B}_0$ attraverso Γ è dato da:

$$\Phi(\vec{B}_0) = \int_{\Gamma} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_0^L B_0 \cos \theta dx dz = B_0 L^2 \cos \theta \quad (41)$$

dove con θ si è indicato l'angolo formato dai vettori $\vec{B}_0$ e $d\vec{S}$. Ricordiamo che $d\vec{S}$ rappresenta l'elemento di superficie infinitesima della spira ($dx dz$) diretto perpendicolarmente alla superficie della spira e orientato in maniera tale che vede scorrere la corrente nella spira in senso antiorario. Di conseguenza, la posizione iniziale della spira è quella per cui $d\vec{S}$ e $\vec{B}_0$ sono paralleli e, quindi, $\theta = 0$. Quando la spira inizia a ruotare in senso antiorario intorno al suo asse di rotazione con velocità ω si ha $\theta = \omega t$. Sostituendo nella (41) otteniamo:

$$\Phi(\vec{B}_0) = B_0 L^2 \cos \omega t \quad (42)$$

La forza elettromotrice indotta nella spira risulta quindi:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 L^2 \omega \sin \omega t \quad (43)$$

Di conseguenza la corrente che circola nella spira è data da:

$$i(t) = \frac{f_i}{R} = \frac{B_0 L^2 \omega}{R} \sin \omega t \quad (44)$$

Analizziamo come circola i all'interno della spira in corrispondenza di un suo giro completo. Per far ciò consideriamo le quattro posizioni della spira individuate dagli angoli $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi$, $\theta_4 = 3\pi/2$. Tali posizioni sono assunte in corrispondenza degli istanti $t_i = \theta_i/\omega$.

Durante la rotazione della spira, per $t_1 < t < t_2$ il flusso Φ diminuisce e quindi in essa circola una corrente tale da generare un campo magnetico che va a compensare la diminuzione di flusso (legge di Lenz). Di conseguenza il campo generato dalla corrente indotta deve essere diretto come $d\vec{S}$ ossia deve circolare in senso antiorario nella spira. Infatti per $t_1 < t < t_2$ la (44) restituisce un valore positivo per $i(t)$.

Per $t_2 < t < t_3$ il flusso Φ invece aumenta. In particolare a $t = t_2$ esso è nullo ($\vec{B}_0$ e $d\vec{S}$ sono ortogonali in tale istante) e aumenta negli istanti successivi. La corrente indotta nella spira, quindi, questa volta deve scorrere in senso orario in modo da generare un campo magnetico opposto a $d\vec{S}$ che tende a compensare l'aumento di flusso. A conferma per $t_2 < t < t_3$ la (44) restituisce un valore negativo per $i(t)$.

Ragionando analogamente si ricava che la corrente nella spira scorre in senso antiorario per $t_3 < t < t_4$ e di nuovo in senso orario per $t > t_4$ fino al completamento del giro completo.

Il valore massimo della corrente circolante nella spira è quindi dato da:

$$i_{max} = \frac{B_0 L^2 \omega}{R} = 75 \text{mA} \quad (45)$$

- b) Poiché nella rotazione della spira non ci sono attriti l'unica energia dissipata è quella che si trasforma in calore per effetto Joule (visto che la spira è dotata di resistenza elettrica R). Poiché la potenza dissipata per effetto Joule è data da $P = Ri^2$ per ottenere l'energia dissipata in ΔT occorre integrare P tra $t = 0$ e $t = \Delta T$:

$$U = \int_0^{\Delta T} Ri^2 = \frac{B_0^2 L^4 \omega^2}{R} \int_0^{\Delta T} \sin^2 \omega t = \frac{B_0^2 L^4 \omega^2}{2R} \left[\Delta T - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega \Delta T) \right] \approx 1.21 \text{mJ} \quad (46)$$