Prima Prova Intercorso Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
20 dicembre 2022

Esercizio 1

a) Consideriamo un sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale di A e con asse x orizzontale e diretto da A verso B e asse y verticale diretto dal basso verso l'alto. In tale sistema di riferimento la legge oraria di A è data da:

$$a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = v_0 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 \cos\alpha t \tag{1}$$

$$a_y = -g \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t \tag{2}$$

Imponendo la condizione $y(t_s) = 0$ ricaviamo l'istante $t_s > 0$ in cui A tocca il suolo:

$$t_s = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \tag{3}$$

Di conseguenza, la gittata di A è data da:

$$d = x(t_s) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \tag{4}$$

Il valore massimo di d si ottiene in corrispondenza dell'angolo $\alpha = \pi/4$ per cui il seno assume il suo massimo valore (ossia 1) e vale $d_{max} = v_0^2/g$. I valori di α (compresi tra 0 e $\pi/2$) per cui la gittata di A è pari a $d_{max}/2$ sono quelli per cui vale la relazione:

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{12}, \quad \frac{5\pi}{12} \tag{5}$$

b) La condizione che assicura che A colpisce B è $x(t_s) = D$ da cui si ricava:

$$\sin 2\alpha = \frac{Dg}{v_0^2} \qquad \alpha = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{Dg}{v_0^2}\right) \approx 14.7° \tag{6}$$

Dalla conservazione dell'energia si ricava facilmente che il modulo della velocità di A al momento dell'impatto è pari a v_0.

c) Se B si muove a velocità costante v_B orizzontale partendo dalla stessa posizione occupata da A a $t = 0$, la sua legge oraria è data da $x_B(t) = v_B t$. In tal caso, la condizione che assicura l'impatto tra A e B è $x_B(t_s) = x(t_s)$:

$$\cos\alpha = \frac{v_B}{v_0} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{v_B}{v_0}\right) \approx 78.5° \tag{7}$$

Per calcolare l'istante τ in cui avviene l'impatto tra A e B basta sostituire il valore di α trovato nella (3):

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2\sqrt{v_0^2 + v_B^2}}{g} \approx 2s \tag{8}$$

d) Se B si muove di moto uniformemente accelerato partendo da fermo dalla stessa posizione da cui parte A, la sua legge oraria è data da:

$$x_B(t) = \frac{1}{2} a_B t^2 \tag{9}$$

La condizione che assicura che non avvenga lo scontro è $x_B(t_s) \neq x(t_s)$. Ricordando la (3) si ottiene la condizione:

$$a_B \neq \frac{g}{\tan\alpha} \tag{10}$$

La gittata massima di A si ha in corrispondenza di $\alpha = \pi/4$ e quindi la condizione richiesta è $a_B \neq g$.

Esercizio 2

a) Fissiamo come positivo il verso di percorrenza dei fili inestensibili che va dalla massa m_A alla massa m_C. Essendo i fili inestensibili, inoltre, il modulo dell'accelerazione è lo stesso per le tre masse. Indicando con a tale modulo dell'accelerazione otteniamo le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} \tau_1 = m_A a \\ \tau_2 - \tau_1 - m_B g = m_B a \\ m_C g - \tau_2 = m_C a \end{cases} \tag{11}$$

dove τ_1 e τ_2 sono rispettivamente i moduli delle tensioni dei fili che collegano le coppie di masse m_A e m_B e m_B e m_C. Risolvendo per le incognite a, τ_1 e τ_2 otteniamo:

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_C - m_B}{m_A + m_B + m_C} g \approx 1.40 \mathrm{m/s^2} \\ \tau_1 = \dfrac{m_A(m_C - m_B)}{m_A + m_B + m_C} g \approx 28.0 \mathrm{N} \\ \tau_2 = \dfrac{m_C(m_A + 2m_B)}{m_A + m_B + m_C} g \approx 84.1 \mathrm{N} \end{cases} \tag{12}$$

b) Per ricavare la velocità richiesta basta applicare la legge di conservazione dell'energia. Inizialmente il sistema si suppone in quite quindi l'energia totale meccanica del sistema si riduce alla somma delle energie potenziali. Se indichiamo con h_A^i, h_B^i e h_C^i le altezze iniziali rispetto al suolo delle tre masse, l'energia iniziale del sistema è data da:

$$E_i = m_A g h_A^i + m_B g h_B^i + m_C g h_C^i \tag{13}$$

L'energia finale E_f del sistema invece è data da:

$$E_f = \frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C) v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 + g h_A^f + m_B g h_B^f + m_C g h_C^f \tag{14}$$

dove si è indicata con v_f il modulo della velocità posseduta da ciascuna delle tre masse nell'istante in cui la massa m_C tocca il suolo, con I il momento di inerzia della carrucola C_2 rispetto al suo asse di rotazione e ω_f la sua velocità angolare. Tenendo conto che $v_f = \omega_f r$, che $I = Mr^2/2$ e che $h_A^i - h_A^f = 0$, $h_B^i - h_B^f = -h$, $h_A^i - h_A^f = h$, imponendo $E_i = E_f$ otteniamo:

$$v_f = \sqrt{\frac{4(m_C - m_A)}{M + 2(m_A + m_B + m_C)} gl} \approx 2.37 \mathrm{m/s} \tag{15}$$

c) Aggiungendo la forza di attrito statico F_A tra massa m_A e superficie orizzontale e imponendo $a = 0$ le (11) diventano:

$$\begin{cases} \tau_1 - F_A = 0 \\ \tau_2 - \tau_1 - m_B g = 0 \\ m_C g - \tau_2 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Risolvendo per F_A otteniamo:

$$F_A = (m_C - m_B)g \tag{17}$$

Tenendo, infine, conto che deve essere $F_A \leq \mu_S m_A g$ si ottiene:

$$\mu_S \geq \frac{m_C - m_B}{m_A} = 0.25 \tag{18}$$

Esercizio 3

a) Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel punto O con asse x orizzontale e diretto da sinistra verso destra e asse y verticale diretto dal basso verso l'alto. Poiché le due aste sono omogenee i rispettivi centri di massa $P_A = (x_A; y_A)$ e $P_B = (x_B; y_B)$ si trovano nel loro centro geometrico. Di conseguenza, le loro coordinate sono:

$$x_A = \frac{l}{2}\cos\beta \qquad y_A = \frac{l}{2}\sin\beta \tag{19}$$

$$x_B = l\cos\beta - \frac{l}{2}\cos(\alpha - \beta) \qquad y_B = l\sin\beta + \frac{l}{2}\sin(\alpha - \beta) \tag{20}$$

Pertanto, le coordinate del centro di massa del sistema $P_C = (x_C; y_C)$ sono date da:

$$x_C(\beta) = \frac{m x_A + 2m x_B}{3m} = \frac{l}{6}\left[5\cos\beta - 2\cos(\alpha - \beta)\right] \tag{21}$$

$$y_C(\beta) = \frac{m y_A + 2m y_B}{3m} = \frac{l}{6}\left[5\sin\beta + 2\sin(\alpha - \beta)\right] \tag{22}$$

Infine, le coordinate del centro di massa nella posizione indicata ($\beta = \pi/6$) sono date da:

$$x_C\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 8.0\text{cm} \tag{23}$$

$$y_C\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 10.0\text{cm} \tag{24}$$

b) Affinché il sistema formato dalle due aste sia in equilibrio è necessario che il momento delle forze esterne sia nullo. Le forze esterne che agiscono sul sistema sono la forza peso (di modulo pari a $3mg$, verticale e diretta verso il basso e applicata nel centro di massa P_C del sistema), la forza $\vec{F}$ anch'essa verticale ma diretta verso l'alto e applicata all'estremo libero dell'asta B e la reazione vincolare $\vec{R}$ che si sviluppa nel punto O (origine del sistema di riferimento scelto) in cui il sistema è incernierato al suolo. Se fissiamo come polo per il calcolo dei momenti il punto O il modulo del momento totale delle forze esterne agente sul sistema risulta essere:

$$M = 3|x_C|mg - |x_F|F \tag{25}$$

dove con $x_F = l\cos\beta - l\cos(\alpha - \beta)$ si è indicata la coordinata x del punto in cui la forza $\vec{F}$ è applicata. Imponendo $M = 0$ si ottiene la condizione richiesta per F:

$$F = \frac{3|x_C|}{|x_F|}mg = \frac{|5\cos\beta - 2\cos(\alpha - \beta)|}{|2\cos(\beta) - 2\cos(\alpha - \beta)|}mg \approx 235.5\text{N} \tag{26}$$

c) Una volta rimossa la forza $\vec{F}$, il momento generato dalla forza peso non può essere bilanciato da nessuna altra forza esterna e, pertanto, il momento totale delle forze esterne non può essere nullo. Di conseguenza, il sistema ruota in senso orario intorno a un asse di rotazione perpendicolare al piano formato dagli assi x e y e passante per il punto O. Indichiamo con I_O il momento di inerzia del sistema rispetto a tale asse di rotazione. Per determinare la velocità angolare ω del sistema quando il punto di saldatura tocca il suolo (ossia quando $\beta = 0$) basta applicare la legge di conservazione dell'energia:

$$3mgy_C(\beta) = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + 3mgy_C(0) \qquad \omega = \sqrt{\frac{6mg[y_c(\beta) - y_c(0)]}{I_O}} \tag{27}$$

Utilizzando la (22) dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl[\sin\beta(5 - 2\cos\alpha) - 2\sin\alpha(1 - \cos\beta)]}{I_O}} \tag{28}$$

Per calcolare I_O basta tener conto che il momento di inerzia di un'asta omogena di massa m e lunghezza l rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa è $I_G = ml^2/12$. Di conseguenza, tenendo conto del teorema di Huygens-Steiner si ottiene:

$$I_O = m(x_A^2 + y_A^2) + m\frac{l^2}{12} + 2m(x_B^2 + y_B^2) + 2m\frac{l^2}{12} = ml^2(3 - 2\cos\alpha) \tag{29}$$

Pertanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sin\beta(5 - 2\cos\alpha) - 2\sin\alpha(1 - \cos\beta)}{3 - 2\cos\alpha}\frac{g}{l}} \approx 7.04\text{rad/s} \tag{30}$$

Infine, il modulo della velocità del punto P di saldatura delle due aste quando esso tocca il suolo è dato da:

$$v = \omega l = \sqrt{\frac{3\sin\beta(5 - 2\cos\alpha) - 2\sin\alpha(1 - \cos\beta)}{3 - 2\cos\alpha}gl} \approx 1.41\text{m/s} \tag{31}$$