Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
11 dicembre 2024

Esercizio 1

a) Consideriamo la direzione individuata dal filo che collega le masse m, m_1, m_2 e m_3 e assumiamo come positivo il verso da m a m_3. Su tutte le masse agisce la forza peso verticale e diretta verso il basso, la tensione dei fili (su m agisce τ_1, su m_1 agiscono τ_1 e τ_2 , su m_2 agiscono τ_2 e τ_3 e su m_3 agisce τ_3) e la reazione vincolare sviluppata dalle superfici d'appoggio. Se solo la superficie orizzontale è scabra, su m agisce anche la forza di attrito statico. Per quanto riguarda le masse m e m_2, essendo disposte orizzontalmente, la forza peso è completamente bilanciata dalla reazione vincolare esercitata dalla superficie di appoggio. Su m_1 e m_3, invece, agisce una componente della forza peso non bilanciata dalla reazione vincolare di modulo pari rispettivamente a $m_1 g \sin\alpha$ e $m_3 g \sin\alpha$. Proiettando le varie forze descritte lungo la direzione individuata dal filo, le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} -F_A + \tau_1 = 0 \\ -\tau_1 - m_1 g \sin\alpha + \tau_2 = 0 \\ -\tau_2 + \tau_3 = 0 \\ -\tau_3 + m_3 g \sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove F_A rappresenta la forza di attrito statico tra m e superficie orizzontale. Sommando le tre equazioni del sistema (1) si ottiene facilmente:

$$F_A = (m_3 - m_1) g \sin\alpha \tag{2}$$

Per definizione la forza d'attrito statico ha un valore massimo pari a $\mu_s N$. Il modulo della reazione vincolare N esercitata dalla superficie orizzontale per la massa m è pari a $N = mg$. Da cui si ottiene:

$$F_A = (m_3 - m_1) g \sin\alpha \leq \mu_s m g \qquad m \geq \frac{m_3 - m_1}{\mu_s} \sin\alpha \tag{3}$$

Si evince, quindi, che il valore minimo m_{min} che garantisce l'equilibrio è pari a:

$$m_{min} = \frac{(m_3 - m_1)}{\mu_s} \sin\alpha \approx 8.66\text{kg} \tag{4}$$

b) Se sussiste attrito anche tra le masse m_1, m_2 e m_3 e il blocco B allora le condizioni di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} -F_A + \tau_1 = 0 \\ -F_{A_1} - \tau_1 - m_1 g \sin\alpha + \tau_2 = 0 \\ -F_{A_2} - \tau_2 + \tau_3 = 0 \\ -F_{A_3} - \tau_3 + m_3 g \sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{5}$$

dove F_{A_1} , F_{A_2} e F_{A_3} rappresentano rispettivamente le forze di attrito statico tra le masse m_1, m_2 e m_3 e il blocco B. Sommando le tre equazioni del sistema (5) si ottiene:

$$F_A + F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3} = (m_3 - m_1) g \sin\alpha \tag{6}$$

Ragionando in maniera analoga a quanto fatto precedentemente, si ricava:

$$F_A + F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3} = (m_3 - m_1) g \sin\alpha \leq \mu_s [m + m_2 + (m_1 + m_3) g \cos\alpha] g \tag{7}$$

da cui, dopo semplici calcoli, si ottiene:

$$m_{min} = \frac{m_3 - m_1}{\mu_s} \sin\alpha - (m_1 + m_3)\cos\alpha - m_2 \approx 4.66\text{kg} \tag{8}$$

c) e **d)** Se $m = m_{min}/2$ il sistema di masse non è più in equilibrio e pertanto si mette in moto con accelerazione a positiva (considerando il verso scelto precedentemente). Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} -\mu_d mg + \tau_1 = ma \\ -\mu_d m_1 g\cos\alpha - \tau_1 - m_1 g\sin\alpha + \tau_2 = m_1 a \\ -\mu_d m_2 g - \tau_2 + \tau_3 = m_2 a \\ -\mu_d m_3 g\cos\alpha - \tau_3 + m_3 g\sin\alpha = m_3 a \end{cases} \tag{9}$$

dove si è esplicitata la forza di attrito dinamico in termini di coefficiente di attrito dinamico e della corrispondente reazione vincolare. Risolvendo il sistema (9) nelle incognite a, τ_1, τ_2 e τ_3 si ottiene:

$$\begin{cases} a = \dfrac{(m_3 - m_1)\sin\alpha - \mu_d[m + m_2 + (m_1 + m_3)\cos\alpha]}{m + m_1 + m_2 + m_3} g \approx 1.29\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \tau_1 = \dfrac{(m_3 - m_1)\sin\alpha + \mu_d(m_1 + m_3)(1 - \cos\alpha)}{m + m_1 + m_2 + m_3} mg \approx 5.30\text{N} \\ \tau_2 = \dfrac{[m_3(m + 2m_1) + m_1 m_2]\sin\alpha + \mu_d(mm_3 - m_1 m_2)(1 - \cos\alpha)}{m + m_1 + m_2 + m_3} g \approx 15.58\text{N} \\ \tau_3 = \dfrac{(m + 2m_1 + m_2)\sin\alpha + \mu_d(m + m_2)(1 - \cos\alpha)}{m + m_1 + m_2 + m_3} m_3 g \approx 20.13\text{N} \end{cases} \tag{10}$$

Esercizio 2

a) Per determinare la tensione τ del filo occorre imporre che la posizione in cui si trova il sistema formato dalle quattro sbarrette ($\alpha = \pi/6$) sia di equilibrio. Per far ciò occorre imporre che il risultante delle forze esterne e il momento totale delle forze esterne siano entrambi nulli. Tuttavia, per effetto dei vari vincoli, il sistema può solo ruotare intorno al punto O in cui è incernierato. Di conseguenza, basta imporre unicamente che il momento delle forze esterne rispetto al polo O sia nullo.

Le forze che agiscono sul sistema sono:

- la forza peso (applicata nel suo cento di massa) verticale, diretta verso il basso e di modulo pari a $4mg$;
- la tensione τ del filo applicata a metà della sbarretta in alto a destra del punto O (verticale e diretta verso l'alto);
- la reazione vincolare che si sviluppa nel punto O.

Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel punto O, asse x orizzontale diretto da sinistra verso destra, asse y verticale diretto verso l'alto e con asse z perpendicolare al piano formato dal sistema delle due sbarrette e uscente da esso.

In tale sistema di riferimento, la condizione di equilibrio (annullamento $\vec{M}_O$) si scrive come:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_c \times \vec{F}_p + \vec{r} \times \vec{\tau} = \vec{0} \tag{11}$$

dove $\vec{r}_c$ è il vettore posizione del centro di massa del sistema delle quattro sbarrette rispetto all'origine O, $\vec{F}_p$ la forza peso ($\vec{F}_p = 4m\vec{g}$) , $\vec{r}$ il vettore posizione del punto in cui è attaccato il filo e $\vec{\tau}$ la tensione del filo. Si noti che la reazione vincolare che si sviluppa nel punto O non contribuisce a $\vec{M}_O$ in quanto applicata proprio nel polo rispetto al quale tale momento viene calcolato.

Indicando con $\hat{k}$ il versore dell'asse z e svolgendo i prodotti vettoriali nella (11) si ottiene:

$$\vec{M}_O = \left(-4|x_c|mg + \frac{l}{2}\tau\cos\alpha\right)\hat{k} = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \tau = \frac{8|x_c|}{l\cos\alpha}mg \tag{12}$$

dove x_c rappresenta la coordinata x del vettore $\vec{r}_c$.

Poiché tutte le sbarrette hanno la stessa massa, per questione di simmetria, il centro di massa del quadrato formato dalle quattro sbarrette si trova in corrispondenza del suo centro geometrico (punto di incontro delle sue diagonali). È facile rendersi conto che se il lato superiore del quadrato forma l'angolo α rispetto alla direzione orizzontale la sua diagonale passante per O forma un angolo $\beta = \alpha + \pi/4$ rispetto alla direzione orizzontale. Poiché, come già detto, il centro di massa del sistema delle quattro sbarrette si trova nel centro del quadrato (ossia a metà delle sue diagonali) si ottiene:

$$\begin{cases} x_c = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} l \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ y_c = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} l \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \tag{13}$$

Inserendo, infine, la prima delle (13) nella (12) si ottiene:

$$\tau = 4\sqrt{2}\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha} mg \approx 1.66\text{N} \tag{14}$$

b) In assenza del filo la condizione di equilibrio (11) diventa:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_c \times \vec{F}_p = \vec{0} \tag{15}$$

Tale condizione può verificarsi solo se i vettori $\vec{r}_c$ e $\vec{F}_p$ sono paralleli, ossia quando $\vec{r}_c$ è verticale. In tale posizione è immediato verificare che $\alpha = \alpha_0 = \pi/4$.

c) Per descrivere le piccole oscillazioni del sistema conviene introdurre l'angolo θ formato dal raggio vettore del centro di massa ($\vec{r}_c$) e la verticale passante per O. In termini dell'angolo θ, la seconda equazione cardinale della dinamica diventa:

$$-4mgr_c \sin\theta = I_O \ddot{\theta} \tag{16}$$

dove I_O rappresenta il momento di inerzia del sistema delle quattro sbarrette calcolato rispetto all'asse di rotazione passante per O e $\omega = \cdot\theta$ la sua velocità angolare ($L_O = I_O \omega$).

Per piccole oscillazioni la (16) diventa:

$$\ddot{\theta} + \frac{4mgr_c}{I_O}\theta = 0 \tag{17}$$

che rappresenta l'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{4mgr_c/I_O}$ e, quindi, con periodo T dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{4mgr_c}} \tag{18}$$

Per ottenere I_O possiamo semplicemente sommare i quattro momenti di inerzia delle singole sbarrette ($I_O^{(1)}$, $I_O^{(2)}$, $I_O^{(3)}$ e $I_O^{(4)}$) calcolati rispetto ad un asse passante per O. Inoltre, applicando il teorema di Huygens-Steiner, possiamo esprimere i vari $I_O^{(i)}$ in termini del momento di inerzia $I_c = ml^2/12$ delle sbarrette calcolati rispetto ad un asse passante per il loro centro di massa (che essendo le sbarrette omogenee si trova nel loro centro geometrico):

$$I_O = I_O^{(1)} + I_O^{(2)} + I_O^{(3)} + I_O^{(4)} = 12ml^2 + 4I_c = \frac{37}{3}ml^2 \tag{19}$$

Si noti che nello scrivere la (19) si è considerato che per le due sbarrette in alto, l'asse di rotazione passante per O e quello ad esso parallelo passante per il loro centro di massa sono separati da una distanza pari a $l/2$, mentre per le due sbarrette in basso da semplici considerazioni geometriche si ricava che tale distanza è pari a $\sqrt{5}l/2$. Sostituendo nella (18) e tenendo conto che $r_c = \sqrt{2}l/2$ si ottiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{37\sqrt{2}}{3}\frac{l}{g}} \approx 1.87\text{s} \tag{20}$$

Esercizio 3

Indichiamo con A lo stato iniziale del gas, B quello a cui si porta in seguito al riscaldamento isocoro e C lo stato finale della trasformazione isoterma e calcoliamo il lavoro e il calore scambiato in ognuna delle trasformazioni $A \to B$, $B \to C$ e $C \to A$ che costituiscono il ciclo.

Essendo la trasformazione $A \to B$ isocora il lavoro è nullo ($L_{AB} = 0$) mentre il calore scambiato è:

$$Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A) \tag{21}$$

Si noti che essendo $T_B > T_A$ si ha $Q_{AB} > 0$ e, quindi, il gas assorbe calore dall'esterno (riscaldandosi a volume costante).

La trasformazione $B \to C$ è invece isoterma e, di conseguenza avremo:

$$Q_{BC} = L_{BC} = nRT_B \ln\frac{V_C}{V_B} \tag{22}$$

Essendo la trasformazione $C \to A$ isobara vale la relazione $T_C/V_C = T_A/V_A$. Ma essendo $V_A = V_B$ (trasformazione $A \to B$ isocora) e $T_C = T_B$ (trasformazione $B \to C$ isoterma), si ottiene $V_C/V_B = V_C/V_A = T_C/T_A = T_B/T_A$. Possiamo pertanto scrivere la (22) come:

$$Q_{BC} = L_{BC} = nRT_B \ln\frac{T_B}{T_A} \tag{23}$$

Infine, per quanto riguarda il calore scambiato durante la trasformazione isobara $C \to A$ avremo:

$$Q_{CA} = nc_P(T_A - T_B) \tag{24}$$

mentre il lavoro effettuato risulta:

$$L_{CA} = Q_{CA} - U_{CA} = n(c_P - c_V)(T_A - T_B) = nR(T_A - T_B) \tag{25}$$

dove nell'ultimo passaggio di è tenuto conto che $R = c_P - c_v$.

Si noti come in questo caso $Q_{CA} < 0$ e, pertanto il gas cede calore all'ambiente esterno (raffreddandosi a pressione costante).

Per definizione il rendimento del ciclo è dato dal rapporto tra il lavoro totale $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$ e i calore assorbito $Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{BC}$:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{2T_B \ln\frac{T_B}{T_A} - 2(T_B - T_A)}{2T_B \ln\frac{T_B}{T_A} + 3(T_B - T_A)} \approx 0.41 \tag{26}$$

dove si è tenuto conto che per un gas monoatomico $c_V = 3R/2$.

Esercizio 4

a) Applicando la legge di Bernoulli tra i punti 1 e 2 si ottiene:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{27}$$

Assumendo, inoltre, il fluido incompressibile la portata è costante è quindi $S_1 v_1 = S_2 v_2$ da cui troviamo:

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = 5v_1 \tag{28}$$

Sostituendo tale espressione nella (27) siamo in grado di calcolare P_2:

$$P_2 = P_1 - \rho g h - 12\rho v_1^2 \approx 132.6\text{kPa} \tag{29}$$

b) Per determinare la distanza d occorre ricavare l'equazione del moto dell'elemento di massa infinitesimo di liquido dm una volta fuoriuscito dal condotto. Si tratta, ovviamente, del moto di un proiettile di massa dm sparato dall'altezza h con una velocità iniziale orizzontale e di modulo pari a v_2 dato dalla (28). Fissiamo un sistema di riferimento con origine nella proiezione sulla superficie orizzontale del punto in cui il fluido fuoriesce dal condotto, con asse y verticale rivolto verso l'alto e asse x orizzontale (da sinistra a destra). In tale sistema il moto della massa dm è descritto dalla seguente legge oraria:

$$\begin{cases} x(t) = v_2 t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases} \tag{30}$$

Per determinare d basta calcolare $x(t)$ in corrispondenza dell'istante in cui $y(t) = 0$. Procedendo in tal modo si ottiene:

$$d = v_2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5v_1 \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 17.7\text{m} \tag{31}$$