

**Prova di Esame di Fisica Generale I**  
**Corso di Laurea in Matematica (L-35)**  
7 marzo 2024

**Esercizio 1**

- a) Consideriamo la direzione individuata dal filo che collega le masse  $m_1$  ed  $m_2$  e assumiamo come positivo il verso da  $m_1$  ad  $m_2$ . Se  $B$  è fermo e non vi è attrito tra masse e  $B$  allora sulla massa  $m_1$  agisce la forza elastica (di modulo pari a  $k\delta$ ) e la tensione del filo (di modulo pari a  $\tau$ ). La forza peso è completamente bilanciata dalla reazione vincolare esercitata da  $B$ . Su  $m_2$  agisce la tensione del filo (di modulo  $\tau$ ) e la componente della forza peso lungo la direzione del piano inclinato dell'angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale (di modulo pari a  $m_2g \sin \alpha$ ). Proiettando le varie forze descritte lungo la direzione individuata dal filo, le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} -k\delta + \tau = 0 \\ -\tau + m_2g \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Risolvendo il sistema (1) nelle incognite  $\tau$  e  $\delta$  si ottiene:

$$\begin{cases} \tau = m_2g \sin \alpha \approx 42.5\text{N} \\ \delta = \frac{m_2g \sin \alpha}{k} \approx 14.2\text{cm} \end{cases} \quad (2)$$

- b) Se  $B$  è fermo e sussiste attrito statico nel conteggio delle forze che agiscono su  $m_1$  e  $m_2$  bisogna tener conto anche dell'attrito statico. In particolare se indichiamo con  $F_A^1$  e  $F_A^2$  il modulo della forza di attrito statico che agisce rispettivamente su  $m_1$  ed  $m_2$  le condizioni di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} -k\delta - F_A^1 + \tau = 0 \\ -\tau - F_A^2 + m_2g \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Si noti che entrambe le forze di attrito statico sono state considerate con il segno meno in quanto entrambe si oppongono al moto delle due masse  $m_1$  ed  $m_2$  che avviene nella direzione scelta come positiva (ossia da  $m_1$  a  $m_2$ ). Risolvendo il sistema (3) nelle incognite  $\tau$  e  $\delta$  si ottiene:

$$\begin{cases} \tau = m_2g \sin \alpha - F_A^2 \\ \delta = \frac{m_2g \sin \alpha}{k} - \frac{F_A^1 + F_A^2}{k} \end{cases} \quad (4)$$

Poiché per le due forze di attrito statico valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 0 \leq F_A^1 \leq \mu_s m_1 g \\ 0 \leq F_A^2 \leq \mu_s m_2 g \cos \alpha \end{cases} \quad (5)$$

si evince che i valori di  $\delta$  che garantiscono l'equilibrio sono tutti quelli compresi tra un valore  $\delta_{min}$  dato dalla seconda delle (4) in cui  $F_A^1$  e  $F_A^2$  sono le massime possibili e un valore  $\delta_{max}$  in cui  $F_A^1$  e  $F_A^2$  sono le minime possibili (ossia nulle). Quindi:

$$\begin{cases} \delta_{min} = \frac{m_2g \sin \alpha}{k} - \frac{\mu_s g}{k} (m_1 + m_2 \cos \alpha) \approx 11.2\text{cm} \\ \delta_{max} = \frac{m_2g \sin \alpha}{k} \approx 14.2\text{cm} \end{cases} \quad (6)$$

Analogamente anche la tensione del filo  $\tau$  risulta compresa tra un valore  $\tau_{min}$  (che si ottiene considerando le forze di attrito massime possibili) e  $\tau_{max}$  (forze di attrito nulle):

$$\begin{cases} \tau_{min} = m_2g (\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha) \approx 37.6\text{N} \\ \tau_{max} = m_2g \sin \alpha \approx 42.5\text{N} \end{cases} \quad (7)$$

- c) Se  $B$  si muove di moto accelerato allora il sistema di riferimento solidale con  $B$  non è inerziale. Nello scrivere le condizioni di equilibrio per le masse  $m_1$  e  $m_2$  in tale sistema occorre aggiungere alle forze viste per il caso b) anche le forze apparenti. In tal caso le condizioni di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} -k\delta - F_A^1 + \tau - m_1 A = 0 \\ -\tau - F_A^2 + m_2 g \sin \alpha - m_2 A \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Risolvendo il sistema (8) nelle incognite  $\tau$  e  $\delta$  si ottiene:

$$\begin{cases} \tau = m_2(g \sin \alpha - A \cos \alpha) - F_A^2 \\ \delta = \frac{m_2 g \sin \alpha}{k} - \frac{A}{k}(m_1 + m_2 \cos \alpha) - \frac{F_A^1 + F_A^2}{k} \end{cases} \quad (9)$$

La forza apparente che agisce su  $m_1$  non incide sulla reazione vincolare pertanto  $F_A^1$  è la stessa vista precedentemente. Su  $m_2$ , invece, la forza apparente modifica la reazione vincolare in quanto  $m_2$  non è posta in piano. Valgono, quindi, le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 0 \leq F_A^1 \leq \mu_s m_1 g \\ 0 \leq F_A^2 \leq \mu_s m_2 (g \cos \alpha + A \sin \alpha) \end{cases} \quad (10)$$

Di conseguenza avremo:

$$\begin{cases} \delta_{min} = \frac{m_2 g \sin \alpha}{k} - \frac{A}{k}(m_1 + m_2 \cos \alpha) - \frac{\mu_s g}{k} \left[ m_1 + m_2 \left( \cos \alpha + \frac{A}{g} \sin \alpha \right) \right] \approx 4.1 \text{cm} \\ \delta_{max} = \frac{m_2 g \sin \alpha}{k} - \frac{A}{k}(m_1 + m_2 \cos \alpha) \approx 8.2 \text{cm} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \tau_{min} = m_2 [g \sin \alpha - A \cos \alpha - \mu_s (g \cos \alpha + A \sin \alpha)] \approx 24.1 \text{N} \\ \tau_{max} = m_2 (g \sin \alpha - A \cos \alpha) \approx 32.5 \text{N} \end{cases} \quad (12)$$

- d) Per determinare il modulo dell'accelerazione  $A$  che consente l'equilibrio delle masse  $m_1$  ed  $m_2$  rispetto al blocco  $B$  in assenza di attriti e con la molla né compressa né allungata basta semplicemente risolvere le (8) nell'incognita  $A$  annullando sia la forza elastica che la forza di attrito:

$$A = \frac{m_2}{m_1 + m_2 \cos \alpha} g \sin \alpha \approx 9.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (13)$$

## Esercizio 2

- a) Poiché la lastrina è omogenea e la sua forma è simmetrica rispetto all'asse  $z$  è chiaro che il suo centro di massa si trova sull'asse  $z$  (che rappresenta un'asse di simmetria per la lastrina stessa). Di conseguenza  $x_c = 0$ . Possiamo ottenere  $z_c$  direttamente dalla definizione di centro di massa:

$$z_c = \frac{\int z dm}{m} = \frac{\rho}{m} \int z dS = \frac{1}{S} \int z dS = \frac{2}{\pi R^2} \int z dS \quad (14)$$

dove  $\rho = m/S$  è la densità della lastrina metallica ed  $S = \pi R^2/2$  la sua superficie. Per calcolare l'integrale (14) conviene utilizzare le coordinate polari  $r$  e  $\theta$ :

$$z_c = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4}{3\pi} R \approx 21.2 \text{cm} \quad (15)$$

- b) Calcoliamo il momento di inerzia  $I_O$  della lastrina metallica rispetto all'asse passante per  $O$  e perpendicolare alla lastrina. Dalla definizione di momento di inerzia si ha:

$$I_O = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dS = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi d\theta = m R^2 \quad (16)$$

Possiamo ora facilmente calcolare il momento di inerzia  $I_c$  rispetto ad un'asse parallelo al precedente ma passante per il centro di massa della lastrina utilizzando il teorema di Huygens-Steiner e tenendo conto che la distanza tra i due assi considerati è pari a  $z_c$  dato dalla (15):

$$I_c = I_O - mz_c^2 = mR^2 \left( 1 - \frac{16}{9\pi^2} \right) \approx 0.102 \text{kg m}^2 \quad (17)$$

- c) Per ricavare il periodo  $T$  delle piccole oscillazioni della lastrina basta considerare la seconda equazione cardinale della dinamica utilizzando come polo il punto  $O$  (fisso):

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{r}_c \times m\vec{g} = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (18)$$

dove  $\vec{\omega}$  rappresenta il vettore velocità angolare e  $\vec{r}_c$  il vettore posizione del centro di massa della lastrina. Tale equazione vettoriale porta ad un'unica equazione scalare (non banale) lungo la direzione perpendicolare al piano della lastrina (ossia lungo la direzione  $y$  del sistema di riferimento considerato):

$$-z_c mg \sin \theta = I_O \ddot{\theta} \quad (19)$$

che per piccole oscillazioni diventa:

$$\ddot{\theta} + \frac{z_c mg}{I_O} \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0 \quad (20)$$

dove si è posto  $\Omega^2 = z_c mg / I_O$ . La (20) è l'equazione di un oscillatore armonico con periodo  $T = 2\pi / \Omega$ . Si ricava quindi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{z_c mg}} = \pi \sqrt{\frac{3\pi R}{g}} \approx 2.18 \text{s} \quad (21)$$

- d) Non essendoci attriti l'energia meccanica si conserva. Pertanto possiamo calcolare la velocità  $v_c$  del centro di massa della lastrina nella sua posizione finale imponendo che l'energia totale iniziale sia pari a quella finale:

$$E_i = E_f \quad \rightarrow \quad T_i + U_i = T_f + U_f \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 - mgz_c \quad (22)$$

dove si è tenuto conto del fatto che la lastrina inizialmente è ferma e che il suo centro di massa si trova a quota nulla. Mentre nella posizione finale il centro di massa si trova a quota  $z_c$ . Poiché  $v_c = \omega z_c$  dopo semplici calcoli si ottiene:

$$v_c = \sqrt{\frac{2mgz_c^3}{mz_c^2 + I_c}} = \sqrt{\frac{2mgz_c^3}{I_O}} = \sqrt{\frac{128}{27\pi^3}gR} \approx 0.87 \text{m/s} \quad (23)$$

### Esercizio 3

- a) Calcoliamo innanzitutto le variabili  $P$ ,  $V$  e  $T$  in corrispondenza degli stati  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Per quanto riguarda lo stato  $A$ , essendo già note  $V_A$  e  $T_A$  possiamo utilizzare l'equazione di stato dei gas perfetti per ricavare  $P_A$ :

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} \quad (24)$$

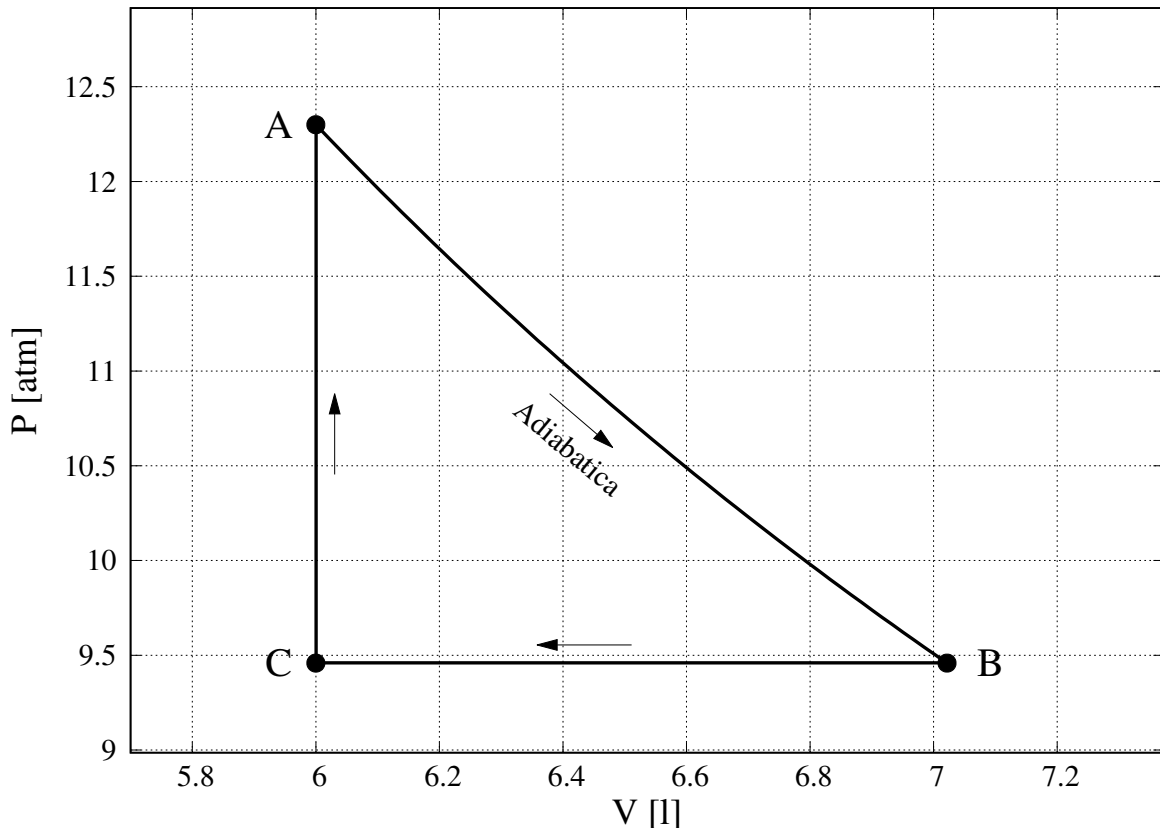


Figura 1: Trasformazioni subite dal gas

Relativamente allo stato  $B$  è data solo  $T_B$ . Tuttavia possiamo calcolare  $V_B$  tenendo conto che la trasformazione  $A \rightarrow B$  è adiabatica e quindi si ha  $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$  da cui si ricava facilmente:

$$V_B = V_A \left( \frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (25)$$

Calcoliamo  $P_B$  utilizzando la legge di stato di gas perfetti:

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_B}{V_A} \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (26)$$

Infine, per quanto riguarda lo stato  $C$  sappiamo che  $V_C = V_A$  (trasformazione  $C \rightarrow A$  isocora) e  $P_C = P_B$  (trasformazione  $B \rightarrow C$  isobara). Possiamo quindi calcolare  $T_C$  utilizzando la legge di stato dei gas perfetti:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_B V_A}{nR} = T_B \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (27)$$

Il ciclo pertanto è composta da una espansione adiabatica ( $V_B > V_A$ ) che nel piano  $PV$  assume la forma  $PV^\gamma = cost$ , seguita da una compressione a pressione costante ( $V_C < V_B$ ) e da un riscaldamento a volume costante ( $T_A > T_C$ ). Il grafico nel piano  $PV$  delle trasformazioni subite dal gas è riportato in figura 1.

- b) Essendo la trasformazione  $A \rightarrow B$  adiabatica non vi è scambio di calore con l'esterno ( $Q_{AB} = 0$ ) e di conseguenza (dal primo principio della termodinamica) il lavoro è pari all'opposto della variazione di energia interna:

$$L_{AB} = -U_{AB} = - \int_{T_A}^{T_B} n c_V dT = -n c_V (T_B - T_A) \quad (28)$$

Nella trasformazione isobara  $B \rightarrow C$  possiamo facilmente calcolare  $L_{BC}$ :

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} PdV = P_B(V_C - V_B) = nRT_B \left[ \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (29)$$

Il calore scambiato  $Q_{BC}$  è dato da:

$$Q_{BC} = \int_{T_B}^{T_C} nc_P dT = nc_P T_B \left[ \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (30)$$

La variazione di energia interna  $U_{BC}$  è data da:

$$U_{BC} = \int_{T_B}^{T_C} nc_V dT = nc_V(T_C - T_B) = nc_V T_B \left[ \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (31)$$

Si noti come dalle (31), (30) e (29) si ricava  $Q_{BC} - L_{BC} = U_{BC}$  in quanto  $c_P + R = c_V$  (ossia il primo principio).

Infine nella trasformazione isocora  $C \rightarrow A$  il lavoro è nullo ( $L_{CA} = 0$ ) e quindi il calore scambiato è pari alla variazione dell'energia interna:

$$Q_{CA} = U_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = nc_V T_A \left[ 1 - \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] \quad (32)$$

Il lavoro totale effettuato dal gas nel ciclo è pertanto dato da:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = -nc_V(T_B - T_A) + nRT_B \left[ \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right] \approx 146.4J \quad (33)$$

- c) Poiché si tratta di un ciclo è ovvio che la variazione di energia interna deve essere nulla (l'energia interna è una funzione di stato e in un ciclo stato finale e stato iniziale coincidono). In ogni caso è possibile verificare questa condizione sommando le espressioni delle variazioni di energia interna trovate per le varie trasformazioni:

$$\begin{aligned} \Delta U_{tot} &= U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = \\ &= nc_V(T_B - T_A) + nc_V T_B \left[ \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 \right] + nc_V T_A \left[ 1 - \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] = \\ &= nc_V T_B \left[ 1 - \frac{T_A}{T_B} + \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1 + \frac{T_A}{T_B} - \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right] = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

- d) Nell'espansione  $A \rightarrow B$  non vi è scambio di calore in quanto si tratta di una adiabatica. L'effetto del lavoro effettuato dal gas si traduce quindi in una diminuzione della sua energia interna con un conseguente raffreddamento (si passa da  $T_A = 300K$  a  $T_B = 270K$ ). Nella trasformazione  $B \rightarrow C$  il gas viene compresso a pressione costante. Viene quindi effettuato un lavoro sul gas (pari a  $L_{BC}$  dato dalla (29)) e il gas cede calore all'ambiente esterno (pari a  $Q_{BC}$  dato dalla (30)). In tale trasformazione il gas si raffredda ulteriormente portandosi a temperatura  $T_C$  data dalla (27). Infine nella trasformazione a volume costante  $C \rightarrow A$  il gas assorbe calore dall'esterno portandosi dalla temperatura  $T_C$  alla temperatura  $T_A$ . Il rendimento reale del ciclo per definizione è dato da:

$$\eta_r = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}} = \frac{L_{tot}}{Q_{CA}} \quad (35)$$

Sostituendo nella (35) le espressioni (33) e (32) dopo semplici calcoli si ottiene:

$$\eta_r = 1 - \gamma \frac{T_B}{T_A} \frac{1 - \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{1 - \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \approx 0.053 \quad (36)$$

Dal principio di Carnot possiamo ricavare il rendimento  $\eta_i$  ideale (ossia il massimo possibile). Il ciclo lavora tra le due temperature estreme  $T_A$  (sorgente calda) e  $T_C$  (sorgente fredda) quindi:

$$\eta_i = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 1 - \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \approx 0.23 \quad (37)$$

Dovi si è tenuto conto dell'espressione di  $T_C$  data dalla (27). Come si può notare il rendimento della macchina di Carnot è maggiore di quello della macchina reale come deve essere.

#### Esercizio 4

a) Applicando l'equazione di Bernoulli al punto 1 e 2 otteniamo:

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (38)$$

dove  $P_1$  e  $P_2$  rappresentano le pressioni dell'acqua nei punti 1 e 2,  $\rho$  è la densità dell'acqua e  $v_1$  e  $v_2$  sono i moduli della velocità dell'acqua nei punti 1 e 2 del condotto. Dalla figura si evince che  $P_1 = P_2 = P_{atm}$ . Inoltre se trattiamo l'acqua come un fluido incompressibile ideale le portate  $Q_1$  e  $Q_2$  nei punti 1 e 2 devono essere uguali:

$$Q_1 = Q_2 \quad \rightarrow \quad v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \rightarrow \quad v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2 \quad (39)$$

Sostituendo la (39) nell (38) dopo semplici calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{\frac{2gd_2^4(h_2 - h_1)}{d_1^4 - d_2^4}} \approx 0.57 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \sqrt{\frac{2gd_1^4(h_2 - h_1)}{d_1^4 - d_2^4}} \approx 2.29 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \quad (40)$$

b) Come già detto le portate nei punti 1 e 2 del condotto sono uguali. Pertanto calcoliamo solo la portata nel punto 1 moltiplicando la velocità data dalla prima delle (40) per la superficie della sezione del condotto nel punto 1 data da  $\pi d_1^2/4$ :

$$Q_2 = Q_1 = v_1 \pi \frac{d_1^2}{4} \approx 7.12 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad (41)$$