Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
15 aprile 2025

Esercizio 1

a) Per determinare le condizioni di equilibrio per il sistema formato dalle due sbarrette occorre imporre che il risultante delle forze esterne e il momento totale delle forze esterne siano entrambi nulli. Tuttavia, per effetto dei vari vincoli, il sistema formato dalle due sbarrette può solo ruotare intorno ad un asse perpendicolare al piano della figura e passante per il punto O. Di conseguenza, la condizione di equilibrio consiste semplicemente nell'annullare il momento delle forze esterne rispetto al polo O.

Le forze che agiscono sul sistema sono la forza peso (applicata nel suo cento di massa), e la reazione vincolare che si sviluppa nel punto O. Il momento di tali forze rispetto al polo O è dato da:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_c \times \vec{F}_p = \vec{0} \tag{1}$$

dove $\vec{r}_c$ è il vettore posizione del centro di massa del sistema delle due sbarrette, $\vec{F}_p = (m_A + m_B)\vec{g}$ la forza peso. Si noti che la reazione vincolare che si sviluppa nel punto O non contribuisce a $\vec{M}_O$ in quanto applicata proprio nel polo rispetto al quale tale momento viene calcolato.

Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel punto O, con asse x orizzontale diretto da sinistra verso destra, con asse y verticale diretto verso l'alto e con asse z perpendicolare al piano della figura e uscente da esso. In tale sistema di riferimento la (1) si esplicita nel seguente modo:

$$\vec{M}_O = -(m_A + m_B)x_c g\hat{k} = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad x_c = 0 \tag{2}$$

dove $\hat{k}$ è il versore dell'asse z e x_c rappresenta la coordinata x del vettore $\vec{r}_c$. Imporre l'equilibrio del sistema composto dalle due sbarrette equivale a imporre che l'ascissa del centro di massa sia nulla.

Determiniamo, quindi, le coordinate del vettore $\vec{r}_c$ nel sistema di riferimento scelto. Poiché entrambe le sbarrette sono omogenee il centro di massa di ognuna di esse si trova nel corrispondente punto medio. Indichiamo rispettivamente con $\vec{r}_{A_c}$ e $\vec{r}_{B_c}$ i vettori che individuano la posizione del centro di massa delle singole sbarrette A e B. In base a semplici considerazioni geometriche si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{r}_{A_c} \equiv \left(-\dfrac{1}{2}\cos\theta_0; -\dfrac{1}{2}\sin\theta_0\right) l \\ \vec{r}_{B_c} \equiv \left(-\cos\theta_0 + \dfrac{1}{2}\sin\theta_0; -\sin\theta_0 - \dfrac{1}{2}\cos\theta_0\right) l \end{cases} \tag{3}$$

Una volta note le coordinate dei centri di massa delle singole sbarrette possiamo facilmente calcolare le coordinate del centro di massa del sistema formato da entrambe assimilando le sbarrette a due punti materiali di massa pari all'intera massa delle singole sbarrette le cui posizioni sono individuate proprio dai vettori $\vec{r}_{A_c}$ e $\vec{r}_{B_c}$. Per definizione la posizione del centro di massa di un sistema formato da due punti materiali disposti in posizioni note è data da:

$$\vec{r}_c = \frac{m_A\vec{r}_{A_c} + m_B\vec{r}_{B_c}}{m_A + m_B} \tag{4}$$

Sostituendo le (3) nella (4):

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{m_B \sin\theta_0 - (m_A + 2m_B)\cos\theta_0}{2(m_A + m_B)} l \\ y_c = -\dfrac{m_B \cos\theta_0 + (m_A + 2m_B)\sin\theta_0}{2(m_A + m_B)} l \end{cases} \tag{5}$$

Ricordando la condizione di equilibrio (2) si ottiene:

$$\tan\theta_0 = \frac{m_A + 2m_B}{m_B} \qquad \rightarrow \qquad \theta_0 = \arctan\frac{m_A + 2m_B}{m_B} \approx 76^\circ \tag{6}$$

b) Per determinare l'equazione del moto che descrive le oscillazioni del sistema formato dalle due sbarrette intorno al punto O consideriamo l'equazione cardinale che riguarda il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema:

$$\vec{M}_O = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \vec{r}_c \times (m_A + m_B)\vec{g} = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{7}$$

dove I_O rappresenta il momento di inerzia del sistema delle due sbarrette calcolato rispetto all'asse di rotazione passante per O e $\vec{\omega}$ il corrispondente vettore velocità angolare. Per descrivere le oscillazioni del sistema è più comodo utilizzare l'angolo α che il raggio vettore $\vec{r}_c$ forma rispetto alla verticale passante per O anziché l'angolo θ che la sbarretta A forma con la direzione orizzontale. In termini dell'angolo α, infatti, la condizione di equilibrio (6) diventa semplicemente $\alpha = 0$ (se $x_c = 0$ significa che il raggio vettore $\vec{r}_c$ è verticale). In termini dell'angolo α la (7) si scrive come:

$$-(m_A + m_B) r_c g \sin\alpha = I_O \frac{d^2\alpha}{dt^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{(m_A + m_B) r_c g}{I_O} \sin\alpha = 0 \tag{8}$$

Per piccole oscillazioni $\sin\alpha \approx \alpha$ e quindi la (8) può essere approssimata nel seguente modo:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Omega^2 \alpha = 0 \tag{9}$$

dove si è posto:

$$\Omega = \sqrt{\frac{(m_A + m_B) r_c g}{I_O}} \tag{10}$$

La (9) rappresenta l'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione Ω. Il periodo delle piccole oscillazioni è quindi dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{(m_A + m_B) r_c g}} \tag{11}$$

Il modulo del raggio vettore del centro di massa è facilmente esprimibile attraverso le sue coordinate x_c e y_c date dalle (5):

$$r_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = \frac{\sqrt{m_A^2 + 5m_B^2 + 4m_A m_B}}{2(m_A + m_B)} l \tag{12}$$

Per ottenere I_O possiamo semplicemente sommare i momenti di inerzia I_O^A e I_O^B delle singole sbarrette calcolati rispetto ad un asse passante per O ($I_O = I_O^A + I_O^B$). Inoltre, applicando il

teorema di Huygens-Stainer, possiamo esprimere i momenti I_O^A e I_O^B in termini dei momenti calcolati rispetto ad un asse passante per il loro centro di massa:

$$I_O = I_O^A + I_O^B = m_A r_{A_c}^2 + I_c^A + m_B r_{B_c}^2 + I_c^B \tag{13}$$

Si noti che nello scrivere la (13) si è considerato che per la sbarretta A l'asse di rotazione passante per O e quello ad esso parallelo passante per il suo centro di massa sono ad una distanza pari al modulo del vettore $\vec{r}_{A_c}$ le cui coordinate sono date dalla prima delle (3). Analogamente, per la sbarretta B l'asse di rotazione passante per O e quello passante per il suo centro di massa distano di una quantità pari al modulo del vettore $\vec{r}_{B_c}$ le cui coordinate sono date dalla seconda delle (3). Tenendo conto delle (3) e del fatto che $I_c = ml^2/12$, la (13) diventa:

$$I_O = \frac{m_A l^2}{2} + \frac{m_A l^2}{12} + \frac{5m_B l^2}{4} + \frac{m_B l^2}{12} = \frac{7m_A l^2}{12} + \frac{4m_B l^2}{3} = \frac{(7m_A + 16m_B)l^2}{12} \tag{14}$$

Sostituendo il valore trovato per r_c e I_O nella (11) si ottiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7m_A + 16m_B}{6\sqrt{m_A^2 + 5m_B^2 + 4m_A m_B}} \frac{l}{g}} \approx 0.86\text{s} \tag{15}$$

c) Quando si aggiunge al sistema formato dalle due sbarrette una massa puntiforme nel punto indicato si varia la posizione del centro di massa del sistema. Il raggio vettore $\vec{r}_m$ che individua il punto in cui viene saldata la massa puntiforme m è dato da:

$$\vec{r}_m \equiv (-\cos\theta_0 + \sin\theta_0; -\sin\theta_0 - \cos\theta_0)\, l \tag{16}$$

Il raggio vettore che individua la posizione del centro di massa del sistema delle due sbarrette e della massa puntiforme aggiuntiva è pertanto dato da:

$$\vec{r}_c = \frac{m_A \vec{r}_{A_c} + m_B \vec{r}_{B_c} + m\vec{r}_m}{m_A + m_B + m} \tag{17}$$

Le corrispondenti coordinate x_c e y_c sono:

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{(2m + m_B)\sin\theta_0 - (m_A + 2m_B + 2m)\cos\theta_0}{2(m_A + m_B + m)} l \\ y_c = -\dfrac{(2m + m_B)\cos\theta_0 + (m_A + 2m_B + 2m)\sin\theta_0}{2(m_A + m_B + m)} l \end{cases} \tag{18}$$

La condizione $x_c = 0$ permette di ricavare il valore di m per cui si ha equilibrio in corrispondenza dell'angolo $\theta_0 = \pi/3$:

$$m = \frac{m_A + m_B(2 - \tan\theta_0)}{2(\tan\theta_0 - 1)} \approx 77.5\text{g} \tag{19}$$

Esercizio 2

a) Imponiamo le condizioni di equilibrio per le tre masse m_1, m_2 e m_3.

Sulla massa m_1 agiscono la forza peso ($m_1\vec{g}$) verticale e diretta verso il basso, la reazione vincolare $\vec{N}_1$ esercitata da piano orizzontale (verticale e diretta verso l'alto), la tensione $\tau_1\hat{i}$ della corda C_1 (diretta lungo la corda C_1, $\hat{i}$ rappresenta quindi un versore orizzontale diretto da sinistra verso destra) e la forza di attrito statico $\vec{F}_a^{(1)}$ che opponendosi al moto di m_1 è diretta orizzontalmente da destra verso sinistra.

Sul cilindro agiscono invece la forza peso ($m_2\vec{g}$ verticale, diretta verso il basso ed applicata nel suo centro di massa), la reazione vincolare $\vec{N}_2$ esercitata da piano orizzontale (verticale e diretta verso l'alto), la tensione $-\tau_1\hat{i}$ della corda C_1 diretta lungo la corda da destra a sinistra ed applicata nel suo centro di massa, la tensione $\tau_2\hat{i}$ della corda C_2 applicata nel suo estremo superiore e la forza di attrito statico $\vec{F}_a^{(2)}$ applicata nel punto O di contatto del cilindro sul piano orizzontale. Tale forza è orizzontale e ipotizziamo sia diretta da sinistra verso destra (se otterremo un valore negativo significa che essa è diretta in verso opposto).

Sulla massa m_3, infine, agiscono solo due forze: la forza peso $m_3\vec{g}$ (verticale e diretta verso il basso) e la tensione $\vec{\tau}_2$ della corda C_2 (verticale e diretta verso l'alto).

Si noti che le masse m_1 e m_3 possono solo traslare e, pertanto, le condizioni di equilibrio si riducono solo all'annullamento del risultante delle forze che agiscono su di esse.

Il cilindro, invece, oltre a traslare può anche ruotare (visto che si ipotizza che il suo moto sia di puro rotolamento). In tal caso, quindi, l'equilibrio è garantito solo se si annullano sia il risultante delle forze esterne sia il momento delle forze esterne.

Le condizioni di equilibrio del sistema pertanto si scrivono come:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \tau_1\hat{i} + \vec{F}_a^{(1)} + \vec{N}_1 = \vec{0} \\ m_2\vec{g} + (\tau_2 - \tau_1)\hat{i} + \vec{N}_2 + \vec{F}_a^{(2)} = \vec{0} \\ \vec{r} \times \tau_2\hat{i} - 2\vec{r} \times \tau_1\hat{i} = \vec{0} \\ m_3\vec{g} + \tau_2\hat{j} = \vec{0} \end{cases} \tag{20}$$

Si noti che il momento delle forze esterne che agiscono sul cilindro è stato calcolato rispetto al punto O. In tal modo le uniche due forze che contribuiscono sono le due tensioni delle corde C_1 e C_2. Il vettore $\vec{r}$ si suppone essere verticale e diretto verso l'alto.

Fissiamo, ora un sistema di riferimento S con asse x orizzontale e diretto da sinistra verso destra, asse y verticale e diretto verso l'alto e asse z ortogonale al piano delle figura ed entrante. Proiettando le (20) nel sistema S si ha:

$$\begin{cases} \tau_1 - F_a^{(1)} = 0 \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ \tau_2 - \tau_1 + F_a^{(2)} = 0 \\ N_2 - m_2 g = 0 \\ \tau_2 - 2\tau_1 = 0 \\ \tau_2 - m_3 g = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Le (21) rappresentano 6 equazioni nelle sei incognite τ_1, τ_2, $F_a^{(1)}$, $F_a^{(2)}$, N_1 e N_2 le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{m_3 g}{2} \\ \tau_2 = m_3 g \\ F_a^{(1)} = \dfrac{m_3 g}{2} \\ F_a^{(2)} = -\dfrac{m_3 g}{2} \\ N_1 = m_1 g \\ N_2 = m_2 g \end{cases} \tag{22}$$

Il valore negativo ottenuto per $F_a^{(2)}$ indichi che tale forza è diretta in verso opposto rispetto a quanto ipotizzato (ossia è diretta da destra verso sinistra).

La condizione cercata sul valore minimo μ_{min} si ottiene imponendo che $F_a^{(1)}$ sia pari al suo valore massimo ossia $\mu_{min}N_1 = \mu_{min}m_1 g$. Procedendo in tal modo si ottiene:

$$\mu_{min} = \frac{m_3}{2m_1} = 0.125 \tag{23}$$

Si noti che la condizione di non scivolamento del cilindro sul piano orizzontale risulta verificata solo se il modulo di $F_a^{(2)}$ è minore o uguale del suo valore massimo. Stiamo quindi ipotizzando che il coefficiente di attrito statico tra cilindro e piano orizzontale $\mu_s^{(2)}$ sia tale da verificare la condizione $|F_a^{(2)}| \leq \mu_s^{(2)} N_2$ con $F_a^{(2)}$ ed N_2 date dalle (22).

b) I moduli delle tensioni delle due corde sono date dalle prime due equazioni delle (22):

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{m_3 g}{2} \approx 4.91\text{N} \\ \tau_2 = m_3 g \approx 9.81\text{N} \end{cases} \tag{24}$$

c) Se l'attrito tra massa m_1 e piano orizzontale è trascurabile il sistema non può essere in equilibrio. Per scrivere le corrispondenti equazioni del moto basta applicare il secondo principio delle dinamica alle masse m_1 e m_3 e le equazioni cardinali della dinamica al cilindro di massa m_2. Avendo già effettuato il conteggio di tutte le forze che agiscono sulle tre masse è facile vedere che le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \tau_1\hat{i} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + (\tau_2 - \tau_1)\hat{i} + \vec{N}_2 + \vec{F}_a^{(2)} = m_2\vec{a}_c \\ \vec{r} \times \tau_2\hat{i} - 2\vec{r} \times \tau_1\hat{i} = I_O \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \\ m_3\vec{g} + \tau_2\hat{j} = m_3\vec{a}_3 \end{cases} \tag{25}$$

dove con $\vec{a}_1$, $\vec{a}_c$ e $\vec{a}_3$ sono state indicate rispettivamente le accelerazioni della massa m_1, del centro di massa del cilindro e della massa m_3. La quantità $\vec{\omega}$ indica invece il vettore velocità angolare che descrive il moto rotatorio del cilindro mentre I_O è il momento di inerzia del cilindro rispetto ad un asse passante per il punto O.

Si noti che stiamo supponendo assenza di attrito solo tra massa m_1 e piano orizzontale mentre tra cilindro e piano orizzontale occorre comunque ipotizzare che vi sia attrito (ossia che $F_a^{(2)} \neq 0$) affiché il cilindro possa rotolare e non strisciare.

Proiettando tali equazioni nel sistema di riferimento S introdotto precedentemente si ottiene:

$$\begin{cases} \tau_1 = m_1 a_1 \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ \tau_2 - \tau_1 + F_a^{(2)} = m_2 a_c \\ N_2 - m_2 g = 0 \\ r(\tau_2 - 2\tau_1) = I_0 \dfrac{d\omega}{dt} \\ \tau_2 - m_3 g = m_3 a_3 \end{cases} \tag{26}$$

Poiché la corda C_1 è inestensibile è chiaro che $a_1 = a_c$. D'altra parte però anche C_2 è inestensibile e quindi l'accelerazione $\vec{a}_3$ deve essere uguale all'accelerazione in corrispondenza del punto più alto del cilindro. Poiché per ipotesi il moto del cilindro è di puro rotolamento è chiaro che l'accelerazione in corrispondenza del suo punto più alto (che quindi dista $2r$ dal punto O) è pari al doppio dell'accelerazione in corrisponenza del suo centro di massa

(che dista r dal punto O). Possiamo quindi scrivere $a_3 = 2a_c$. Introducendo infine anche la condizione di puro rotolamento $a_c = r|d\omega/dt|$ le (27) diventano:

$$\begin{cases} \tau_1 = m_1 a_c \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ \tau_2 - \tau_1 + F_a^{(2)} = m_2 a_c \\ N_2 - m_2 g = 0 \\ r^2(\tau_2 - 2\tau_1) = I_0 a_c \\ \tau_2 - m_3 g = 2m_3 a_c \end{cases} \tag{27}$$

Che rappresentano 6 equazioni nelle incognite a_c, $F_a^{(2)}$, N_1, N_2, τ_1 e τ_2 le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} a_c = \dfrac{4m_3 g}{2m_1 + 3m_2 + 8m_3} \\ F_a^{(2)} = \dfrac{2m_1 + m_2}{2m_1 + 3m_2 + 8m_3} m_3 g \\ N_1 = m_1 g \\ N_2 = m_2 g \\ \tau_1 = \dfrac{4m_1 m_3 g}{2m_1 + 3m_2 + 8m_3} \\ \tau_2 = \dfrac{2m_1 + 3m_2}{2m_1 + 3m_2 + 8m_3} m_3 g \end{cases} \tag{28}$$

dove nelle (28) si è tenuto conto del fatto che $I_O = 3m_2 r^2/2$.

Per quanto visto in precedenza l'accelerazione a_3 della massa m_3 è pari $a_3 = 2a_c$ per cui si ottiene:

$$a_3 = 2a_c = \frac{8m_3}{2m_1 + 3m_2 + 8m_3} g \approx 3.57 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{29}$$

d) Il modulo delle forza di attrito è dato dalla seconda delle (28):

$$F_a^{(2)} = \frac{2m_1 + m_2}{2m_1 + 3m_2 + 8m_3} m_3 g \approx 4.46\mathrm{N} \tag{30}$$

Poiché il valore ottenuto è positivo significa che la forza d'attrito è diretta nella direzione ipotizzata (ossia essa è orizzontale e diretta da sinistra a destra).

Esercizio 3

Nota la densità dell'acqua ρ il calcolo della sua massa iniziale m (ossia prima che venga tolto il tappo dal recipiente cilindrico) si riduce al calcolo del suo volume iniziale V ($m = \rho V$). Tenendo conto delle dimensioni del recipiente cilindrico si ha:

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi D^2 H}{4} \tag{31}$$

Nella (31) l'unica incognita è H ossia l'altezza iniziale dell'acqua nel recipiente prima che venga tolto il tappo. Per trovare H imponiamo che la gittata del flusso d'acqua che si viene a determinare una volta rimosso il tappo sia pari a Δ. Il moto dell'elemento di massa infinitesimo di acqua dm che fuoriesce dal foro è quello di un proiettile di massa dm sparato dall'altezza h con una velocità iniziale v_1 pari alla velocità con cui dm fuoriesce dal foro (che, considerata la geometria del problema si può supporre perpendicolare alla superficie del foro e, quindi, orizzontale). Per determinare v_1

possiamo applicare la legge di Bernoulli un punto 0 che si trova sulla superficie libera dell'acqua e il punto 1 in corrispondenza del foro:

$$P_0 + \rho g H + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_1 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \tag{32}$$

dove P_0 e P_1 rappresentano le pressioni dell'acqua nei punti 0 e 1, v_0 e v_1 i moduli della sua velocità negli stessi punti. Dalla geometria del problema si evince che $P_0 = P_1 = P_{atm}$.

Poiché il foro è supposto essere di dimensioni trascurabili rispetto alle dimensioni del recipiente possiamo assumere che superficie libera dell'acqua sia ferma mentre essa fluisce dal foro (in realtà essa possiede una velocità non nulla diretta verso il basso che tuttavia consideriamo trascurabile rispetto alla velocità con cui l'acqua fuoriesce dal foro). Adottando questa approssimazione possiamo porre $v_0 = 0$. Dalla (32) quindi otteniamo:

$$v_1 = \sqrt{2g(H-h)} \tag{33}$$

Nota v_1 possiamo facilmente ricavare l'equazione del moto della massa dm di acqua una volta fuoriuscita dal foro. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nella proiezione ortogonale del foro sulla superficie (orizzontale) su cui è poggiato il recipiente, con asse y verticale rivolto verso l'alto e asse x orizzontale (da sinistra a destra). In tale sistema il moto della massa dm è descritto dalla seguente legge oraria:

$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + h \end{cases} \tag{34}$$

Imponiamo ora che la gittata del moto (34) sia Δ. Per far ciò basta calcolare $x(t)$ in corrispondenza dell'istante T in cui $y(T) = 0$:

$$\Delta = v_1 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)} \qquad \rightarrow \qquad H = h + \frac{\Delta^2}{4h} \tag{35}$$

sostituendo la (35) nella (31) si ottiene:

$$m = \rho \pi D^2 \frac{\Delta^2 + 4h^2}{16h} \approx 802.6\text{kg} \tag{36}$$

Esercizio 4

a) Nel piano PV la trasformazione isobara $A \rightarrow B$ si rappresenta attraverso una linea orizzontale che va dal punto A al punto B, mentre la trasformazione isocora $B \rightarrow C$ è data da una linea verticale che va dal punto B al punto C. Essendo $V_B > V_A$ (espansione isobara) e $P_C < P_B$ (raffreddamento isocoro) il grafico delle trasformazioni subite dal gas è quello riportato in figura 1.

b) Per ottenere Q_{AC} calcoliamo le temperature T_A, T_B e T_C in funzione delle quantità note.

Essendo note sia V_A che P_A, utilizzando la legge di stato dei gas perfetti possiamo calcolare T_A:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} \tag{37}$$

dove n rappresenta il numero di moli di gas perfetto.

Per ottenere T_B basta considerare che la trasformazione $A \rightarrow B$ è isobara e quindi $T_A/V_A = T_B/V_B$. Tenendo conto che per ipotesi $V_B = 3V_A$ si ha:

$$T_B = \frac{V_B}{V_A} T_A = 3T_A \tag{38}$$

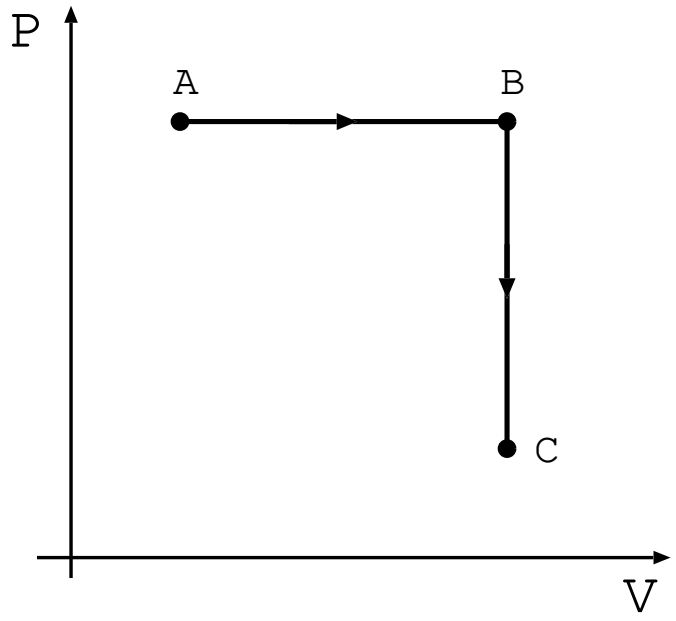

Figura 1: Trasformazioni subite dal gas

Infine, per quanto riguarda T_C, tenendo conto che la trasformazione $B \to C$ è isocora deve essere $T_B/P_B = T_C/P_C$ e poiché per ipotesi $P_C = P_A/3$ si ha:

$$T_C = \frac{P_C}{P_B} T_B = \frac{T_B}{3} = T_A \tag{39}$$

La quantità di calore Q_{AC} è pari alla somma della quantità di calore scambiata durante la trasformazione isobara (Q_{AB}) e la quantità di calore scambiata durante la trasformazione isocora (Q_{BC}) pertanto:

$$Q_{AC} = Q_{AB} + Q_{BC} = nc_P(T_B - T_A) + nc_V(T_C - T_B) \tag{40}$$

dove c_P e c_V rappresentano rispettivamente il calore specifico a pressione e volume costante del gas perfetto. Sostituendo le espressioni trovate per T_A, T_B e T_C nella (40) e tenendo conto che $R = c_P - c_V$ si ottiene:

$$Q_{AC} = 2n(c_P - c_V)T_A = 2nRT_A = 2P_AV_A \approx 3343.7\text{J} \tag{41}$$

c) Il lavoro L_{AC} è pari al lavoro effettuato solo durante la trasformazione isobara (L_{AB}) in quanto in una qualsiasi trasformazione isocora il lavoro scambiato è nullo ($L_{BC} = 0$). Di conseguenza:

$$L_{AC} = L_{AB} = P_A(V_B - V_A) = 2P_AV_A \approx 3343.7\text{J} \tag{42}$$

Si noti come sia $L_{AC} = Q_{AC}$. Per il primo principio della termodinamica questo può accadere solo se tra gli stati A e C non vi è variazione di energia interna. Poiché nei gas perfetti l'energia interna dipende solo dalla temperatura affinché non vi sia variazione di energia interna tra gli stati A e C deve essere che $T_A = T_C$ che è esattamente quanto fornito dalla (39).

d) Ovviamente sul piano PV gli stati A e C sono collegabili attraverso un'isoterma (ramo di iperbole) in quanto $T_A = T_C$. Per il primo principio della termodinamica, nella trasformazione isoterma $C \to A$ avremo $L_{CA} = Q_{AC}$ e quindi:

$$Q_{CA} = L_{CA} = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = -P_AV_A \ln 3 \tag{43}$$

Il lavoro totale L_t effettuato durante l'intero ciclo è pertanto dato da:

$$L_t = L_{AC} + L_{CA} = (2 - \ln 3) P_A V_A \tag{44}$$

Poiché $L_t > 0$ siamo in presenza di una macchina termica che converte parte della quantità di calore assorbito dall'esterno nel lavoro L_t dato dalla (44).

Il rendimento η di tale macchina termica è per definizione il rapporto tra L_t e la quantità totale di calore assorbito. Nel ciclo il gas assorbe calore dall'esterno solo durante la trasformazione $A \to B$ (infatti $Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A) = 2nc_P T_A > 0$) mentre durante le trasformazioni $C \to A$ e $B \to C$ è il gas a cedere calore all'esterno ($Q_{CA} < 0$ e $Q_{BC} < 0$). Di conseguenza:

$$\eta = \frac{L_{AC} + L_{CA}}{Q_{AB}} = \frac{2 - \ln 3}{7} \approx 0.129 \tag{45}$$

dove si è tenuto conto che per un gas perfetto biatomico $c_P = 7R/2$.