Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
18 marzo 2025

Esercizio 1

a) Inizialmente sia il pendolo che il corpo M sono fermi. Quando il pendolo viene lasciato libero di muoversi a partire dalla sua posizione iniziale ($\alpha = \alpha_0$) esso, sotto l'azione della forza peso accelera fino a raggiungere una velocità $\vec{v}_i$ in corrispondenza di $\alpha = 0$. Si noti che dalla geometria del problema si deduce che $\vec{v}_i$ è orizzontale. La massa m dotata di velocità $\vec{v}_i$ urta elasticamente la massa M che si trova in quiete. Indichiamo rispettivamente con $\vec{v}_f$ e $\vec{V}_f$ le velocità di m e M dopo l'urto. Poiché in un urto perfettamente elastico si conserva sia la quantità di moto totale che l'energia cinetica totale possiamo scrivere:

$$\begin{cases} m\vec{v}_i = m\vec{v}_f + M\vec{V}_f \\ \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}mV_f^2 \end{cases} \tag{1}$$

Tenendo conto che $\vec{v}_i$ è orizzontale le (1) implicano che anche $\vec{v}_f$ e $\vec{V}_f$ sono orizzontali. Di conseguenza le (2) equivalgono alle due equazioni scalari:

$$\begin{cases} mv_i = mv_f + MV_f \\ \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}mV_f^2 \end{cases} \tag{2}$$

Una volta nota v_i, ossia la velocità di m prima dell'urto, le (2) ci permettono di ricavare le velocità delle due masse subito dopo l'urto:

$$\begin{cases} v_f = \dfrac{m-M}{m+M}v_i \\ V_f = \dfrac{2m}{m+M}v_i \end{cases} \tag{3}$$

Si noti come V_f sia sempre concorde con v_i. Questo significa che dopo l'urto il corpo M si muove sempre da sinistra a destra (stesso verso di $\vec{v}_i$) qualsiasi siamo i valori delle masse m e M. La velocità $\vec{v}_f$, invece, è concorde o discorde rispetto a $\vec{v}_i$ a seconda se $m - M$ sia positivo o negativo. Nel nostro caso $M > m$ e quindi $\vec{v}_f$ è opposta a $\vec{v}_i$ il che implica che dopo l'urto la massa m del pendono torna indietro (ossia tende ad oscillare in senso orario). Si noti anche che se $m = M$ allora $v_f = 0$ e $V_f = v_i$. In tal caso, quindi, durante l'urto tutta l'energia cinetica posseduta prima dell'urto da m viene trasferita a M.

Per calcolare v_i possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. Siano E_0 ed E_i le energia del pendolo in corrispondenza della posizione iniziale ($\alpha = \alpha_0$) e quella in cui avviene l'urto ($\alpha = 0$). Poiché il moto del pendolo avviene senza dissipazioni (non ci sono attriti) possiamo scrivere $E_0 = E_i$ o in termini di energia cinetica (T) e potenziale (U) $T_0 + U_0 = T_i + U_i$. Essendo il pendolo inizialmente in quiete ($T_0 = 0$) si ha:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = U_0 - U_i = mgL(1 - \cos\alpha_0) \tag{4}$$

Sostituendo la (4) nelle (3) si ottiene:

$$\begin{cases} v_f = \dfrac{m-M}{m+M}\sqrt{2gL(1-\cos\alpha_0)} \\ V_f = \dfrac{2m}{m+M}\sqrt{2gL(1-\cos\alpha_0)} \end{cases} \tag{5}$$

Se non vi è attrito tra blocco e massa M quest'ultima trasla sul blocco di moto rettilineo uniforme. Di conseguenza, la velocità con cui M giunge all'estremità opposta del blocco è ancora V_f data dalla seconda delle (5).

Il moto di M una volta lasciato il blocco è quello di un proiettile lanciato con velocità orizzontale e di modulo pari V_f da un'altezza h rispetto al suolo:

$$\begin{cases} x(t) = V_f t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \tag{6}$$

Per trovare la distanza d basta trovare l'istante τ in cui $y(\tau) = 0$ e poi calcolare $d = x(\tau)$:

$$d = x(\tau) = V_f\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{4m}{m+M}\sqrt{Lh(1-\cos\alpha_0)} \approx 1.71\text{m} \tag{7}$$

b) Se sussiste attrito tra blocco e M allora il moto orizzontale di M sul blocco non è più rettilineo uniforme ma uniformemente ritardato. In tal caso è possibile calcolare il modulo V della velocità di M quando essa giunge all'altra estremità del blocco imponendo che la sua variazione di energia cinetica sia pari al lavoro compiuto dalle forze d'attrito dinamico (si noti che M trasla orizzontalmente quindi la sua energia potenziale non varia):

$$\frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \mu_d MgD \tag{8}$$

Il valore minimo di μ_d per cui non si ha fase di volo di M è quello per cui $V = 0$ e quindi dalla (8) si ottiene:

$$\mu_{min} gD = \frac{V_f^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad \mu_{min} = \frac{4m^2}{(m+M)^2}\frac{4L}{D}(1-\cos\alpha_0) \approx 0.073 \tag{9}$$

c) Il valore fornito di μ_d risulta minore di μ_{min} dato dalla (9) per cui M arriva all'altra estremità del blocco con velocità V maggiore di zero data dalla (8) e quindi si verifica la fase di volo. Risolvendo la (8) per V si ottiene:

$$V = \sqrt{V_f^2 - 2\mu_d gD} = \sqrt{\frac{2g\left[4m^2L(1-\cos\alpha_0) - (m+M)^2\mu_d D\right]}{(m+M)^2}} \tag{10}$$

Il moto di M nella fase di volo è ancora quello del proiettile visto precedentemente ma questa volta la sua velocità iniziale ha modulo V dato dalla (10):

$$\begin{cases} x(t) = Vt \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \tag{11}$$

Ragionando esattamente come fatto in precedenza si ricava:

$$d = V\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4h\left[4m^2L(1-\cos\alpha_0) - (m+M)^2\mu_d D\right]}{(m+M)^2}} \approx 0.97\text{m} \tag{12}$$

Esercizio 2

a) Per studiare le condizioni di equilibrio per i corpi C_1 e C_2 consideriamo tutte le forze che agiscono su di essi.

Sul corpo C_1 (poggiato su C_2) agisce la forza peso $m_1\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso, la tensione del filo $\vec{\tau}$ diretta lungo il filo verso la carrucola C, la reazione vincolare $\vec{N}_2$ esercitata dal corpo C_2 perpendicolare alla superficie del piano inclinato ed uscente e la forza di attrito statico $\vec{F}_a$ diretta lungo la direzione del piano inclinato. Tenendo conto che le forze di attrito sono sempre opposte alla direzione del moto e che in assenza di attrito poiché $m_2 > m_1$ il corpo C_2 tenderebbe a scendere lungo il piano inclinato mentre C_1 a salire, è ovvio che $\vec{F}_a$ va considerata lungo il piano inclinato ma diretta verso il basso.

Analogamente sul corpo C_2 (poggiato sul blocco B) agisce la forza peso $m_2\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso, la tensione del filo $\vec{\tau}$ diretta lungo il filo verso la carrucola C, la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata da B perpendicolare alla superficie del piano inclinato ed uscente, la forza di attrito statico che per il terzo principio della dinamica è pari a $-\vec{F}_a$ (se C_2 esercita su C_1 una forza allora C_1 esercita su C_2 una forza uguale e opposta) e infine, sempre per il terzo principio della dinamica la forza $-\vec{N}_2$. Le condizioni di equilibrio per i corpi C_1 e C_2 si scrivono quindi come:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{\tau} + \vec{F}_a + \vec{N}_2 = \vec{0} \\ m_2\vec{g} + \vec{\tau} - \vec{F}_a + \vec{N} - \vec{N}_2 = \vec{0} \end{cases} \tag{13}$$

Proiettando le (13) nella direzione parallela e perpendicolare alla direzione del piano inclinato si ottiene:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\alpha + \tau - F_a = 0 \\ N_2 - m_1 g \cos\alpha = 0 \\ m_2 g \sin\alpha - \tau - F_a = 0 \\ N - N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Le (14) sono 4 equazioni nelle 4 incognite N, N_2, τ ed F_a le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} N_2 = m_1 g \cos\alpha \\ F_a = \dfrac{m_2 - m_1}{2} g \sin\alpha \\ \tau = \dfrac{m_1 + m_2}{2} g \sin\alpha \\ N = (m_1 + m_2) g \cos\alpha \end{cases} \tag{15}$$

La seconda delle (15) ci fornisce un'espressione per F_a ossia il modulo della forza di attrito statico tra C_1 e C_2. Tale modulo ha un valore massimo dato da $F_a^{max} = \mu_s N_2 = \mu_s m_1 g \cos\alpha$. Imponendo quindi che $F_a \leq F_a^{max}$ si ottiene:

$$\mu_s \geq \frac{m_2 - m_1}{2m_1} \tan\alpha \qquad \rightarrow \qquad \mu_{min} = \frac{m_2 - m_1}{2m_1} \tan\alpha \approx 0.38 \tag{16}$$

b) Effettuando dei ragionamenti analoghi a quelli che ci hanno condotto a scrivere le condizioni di equilibrio (13) si ottengono le seguenti equazioni del moto per i corpi C_1 e C_2:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{\tau} + \vec{F}_d + \vec{N}_2 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{\tau} - \vec{F}_d + \vec{N} - \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases} \tag{17}$$

dove $\vec{F}_d$ rappresenta la forza di attrito dinamico tra i copri C_1 e C_2 e $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ rispettivamente le accelerazioni dei corpi C_1 e C_2. Tuttavia, poiché il filo che collega C_1 e C_2 è inestensibile le loro accelerazioni devono essere uguali in modulo ossia $a_1 = a_2 \equiv a$. Tenendo conto di questo aspetto a proiettando le (17) nelle direzioni parallela e perpendicolare alla direzione del piano inclinato abbiamo:

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\alpha + \tau - F_d = m_1 a \\ N_2 - m_1 g\cos\alpha = 0 \\ m_2 g\sin\alpha - \tau - F_d = m_2 a \\ N - N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Ricordando che la forza di attrito dinamico tra C_1 e C_2 si può scrivere come $F_d = \mu_d N_2$, le (18) sono 4 equazioni nelle 4 incognite N, N_2, τ ed a le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} N_2 = m_1 g\cos\alpha \\ a = \dfrac{(m_2 - m_1)\sin\alpha - 2\mu_d m_1\cos\alpha}{m_1 + m_2} g \approx 1.08\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ \tau = \dfrac{2m_2\sin\alpha + (m_2 - m_1)\mu_d\cos\alpha}{m_1 + m_2} m_1 g \approx 8.91\mathrm{N} \\ N = (m_1 + m_2) g\cos\alpha \end{cases} \tag{19}$$

c) I corpi C_1 e C_2 scambiano delle forze con il piano inclinato B. Per effetto di tali forze se anche B è libero di muoversi esso sarà dotato di una certa accelerazione $\vec{a}_B$. Come già detto, tale accelerazione è determinata dalle forze che i corpi C_1 e C_2 scambiano con B che a loro volta sono determinate delle accelerazioni di C_1 e C_2. Di conseguenza, per quantificare le forze che C_1 e C_2 si scambiano con B occorre risolvere prima il moto di C_1 e C_2 quando B a sua volta si muove di moto accelerato. In queste circostanze le (17) non sono più valide in quanto il sistema di riferimento solidale con B non è inerziale. Si ricorda, infatti, che le (17) sono state ricavate nell'ipotesi che B era fissato sul piano orizzontale. Se B si muove con accelerazione $\vec{a}_B$ allora nelle (17) va aggiunto il termine di forza apparente $-m_1\vec{a}_B$ nella prima e $-m_2\vec{a}_B$ nella seconda.

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{\tau} + \vec{F}_d + \vec{N}_2 - m_1\vec{a}_B = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{\tau} - \vec{F}_d + \vec{N} - \vec{N}_2 - m_2\vec{a}_B = m_2\vec{a}_2 \end{cases} \tag{20}$$

Si noti che la geometria del problema impone che B può solo traslare orizzontalmente sul piano su cui è poggiato. Di conseguenza, il vettore $\vec{a}_B$ deve essere orizzontale. Supponiamo, quindi, che il blocco B si sposti orizzontalmente da destra verso sinistra. Se il valore finale che otterremo per a_B sarà positivo allora effettivamente B si muoverà nel verso ipotizzato altrimenti il verso sarà quello opposto. Tenendo conto dell'orizzontalità di $\vec{a}_B$ e proiettando le (20) nelle direzioni parallela e perpendicolare alla direzione del piano inclinato otteniamo:

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\alpha + \tau - F_d - m_1 a_B\cos\alpha = m_1 a \\ N_2 - m_1 g\cos\alpha + m_1 a_B\sin\alpha = 0 \\ m_2 g\sin\alpha - \tau - F_d + m_2 a_B\cos\alpha = m_2 a \\ N - N_2 - m_2 g\cos\alpha + m_2 a_B\sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{21}$$

dove, come fatto in precedenza, si è tenuto conto del fatto che le accelerazioni di C_1 e C_2 hanno lo stesso modulo. Questa volta ovviamente a è il modulo dell'accelerazione di C_1 e C_2 relativa a B. Ricordando che $F_d = \mu_d N_2$ con N_2 dato dalla seconda delle (21) si ha:

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\alpha + \tau - \mu_d m_1 g\cos\alpha + \mu_d m_1 a_B\sin\alpha - m_1 a_B\cos\alpha = m_1 a \\ N_2 = m_1 g\cos\alpha - m_1 a_B\sin\alpha \\ m_2 g\sin\alpha - \tau - \mu_d m_1 g\cos\alpha + \mu_d m_1 a_B\sin\alpha + m_2 a_B\cos\alpha = m_2 a \\ N = (m_1 + m_2)(g\cos\alpha - a_B\sin\alpha) \end{cases} \tag{22}$$

Nelle (22) le quantità che ci permettono di definire le forze scambiate tra blocco B e i corpi C_1 e C_2 sono:

- N che rappresenta il modulo della reazione vincolare esercitata da B per effetto dei corpi C_1 e C_2. Essa è perpendicolare alla superficie del piano inclinato ed è uscente. È chiaro, pertanto, che in virtù del terzo principio della dinamica i corpi C_1 e C_2 esercitano su B una forza uguale e opposta ossia $-\vec{N}$ (ortogonale alla superficie del piano inclinato ed entrante);
- il filo esercita sulla carrucola C una forza di modulo pari a 2τ (la tensione τ, infatti, è presente su entrambi i lati della carrucola) diretta lungo la direzione del piano inclinato nella direzione che va dalla carrucola ai corpi C_1 e C_2. Poiché C è solidale a B, è ovvio che tale forza si applicherà al piano inclinato.

Solo la componente orizzontale di queste due forze concorre a determinare il moto di B. In altri termini la componente verticale sarà semplicemente bilanciata dalla reazione vincolare esercitata dal piano orizzontale. Tenendo conto pertanto di come sono dirette tali forze possiamo dire che F_x ossia la componente orizzontale della forza totale agente su B è data da:

$$F_x = N \sin\alpha - 2\tau\cos\alpha \tag{23}$$

Si noti che per quanto detto in precedenza si assume come positivo lo spostamento orizzontale di B che va da destra a sinistra. Per questo motivo la componente orizzontale della reazione vincolare $-\vec{N}$ è positiva (tende a far spostare B da destra a sinistra) mentre la componente orizzontale della reazione vincolare esercitata sulla carrucola è negativa (tende a far spostare B da sinistra a destra). Possiamo quindi scrivere l'equazione del moto del blocco B in un sistema di riferimento solidale al piano orizzontale (fisso e quindi inerziale) come:

$$F_x = N \sin\alpha - 2\tau\cos\alpha = m a_B \tag{24}$$

Ricavando dalle (21) N e τ in funzione di a_B si ha:

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{2m_1m_2(g\sin\alpha + a_B\cos\alpha) + m_1(m_2-m_1)\mu_d(g\cos\alpha - a_B\sin\alpha)}{m_1+m_2} \\ N = (m_1+m_2)(g\cos\alpha - a_B\sin\alpha) \end{cases} \tag{25}$$

Sostituendo tali espressioni nella (24) e risolvendo per a_B si ottiene:

$$a_B = \frac{(m_2-m_1)[(m_2-m_1)\sin\alpha - 2m_1\mu_d\cos\alpha]g\cos\alpha}{(m+m_1+m_2)(m_1+m_2) - (m_2-m_1)[(m_2-m_1)\cos\alpha + 2\mu_d m_1\sin\alpha]\cos\alpha} \approx 0.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{26}$$

Esercizio 3

Nella trasformazione $1 \to 2$ il gas si porta adiabaticamente dal punto 1 al punto 2. Di conseguenza nel piano pV percorre la curva di equazione $pV^\gamma = costante$. Trattandosi di una compressione il volume finale V_2 è minore di quello iniziale V_1 mentre la pressione finale p_2 è maggiore di quella iniziale p_1.

La trasformazione $2 \to 3$ è a volume costante e quindi nel piano pV si rappresenta come una linea verticale.

Infine la trasformazione isobara $2 \to 3$ nel piano pV è data da una linea orizzontale.

Il grafico nel piano pV delle trasformazioni subite dal gas è riportato in figura 1.

Calcoliamo le variabili termodinamiche che caratterizzano gli stati 1, 2 e 3 che compongono il ciclo.

Dello stato iniziale 1 sono date pressione p_1 e temperatura T_1. Queste informazioni insieme alla conoscenza della quantità di azoto M ci permette di calcolare il volume V_1. Dalla legge di stato dei gas permetti infatti si ha:

$$V_1 = \frac{MRT_1}{p_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mc_PT_1}{p_1} \tag{27}$$

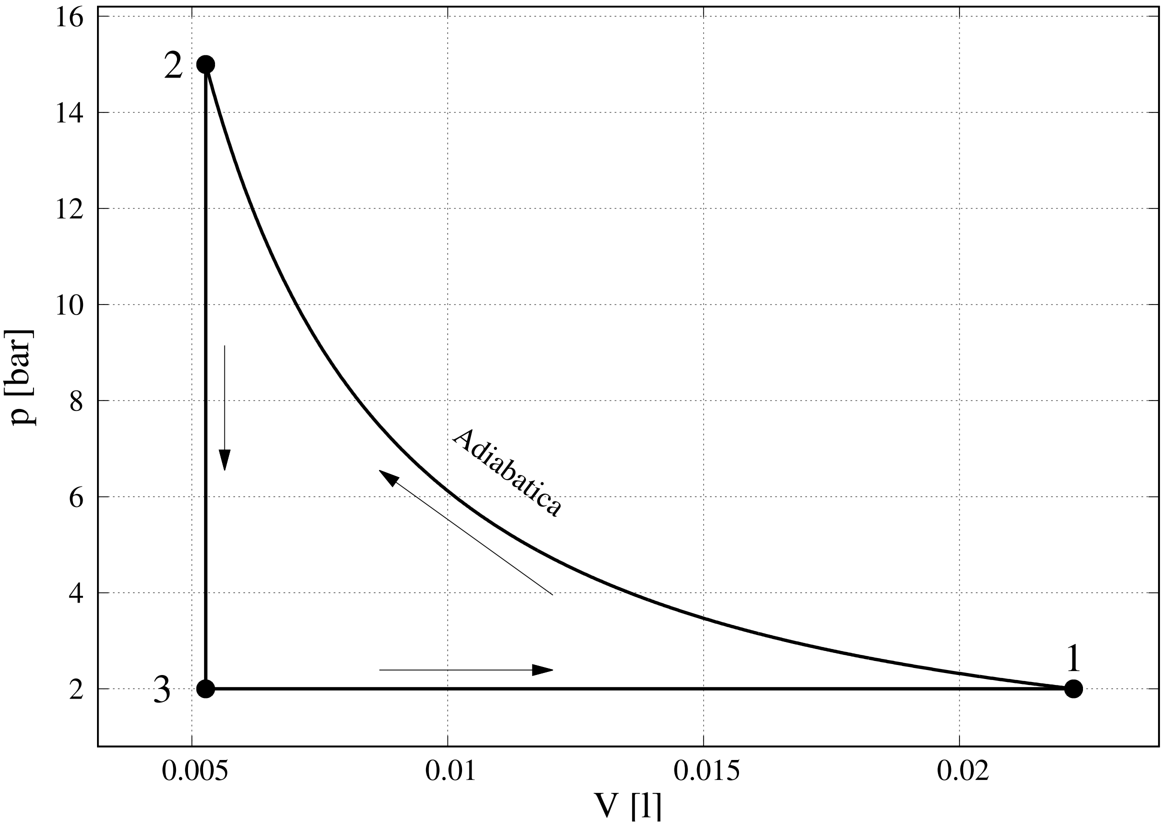

Figura 1: Trasformazioni subite dal gas

dove si sono utilizzate le relazioni $R = c_P - c_V$ e $\gamma = c_P/c_V$.

Dello stato 2 è data solo la pressione p_2. Tuttavia sappiamo che la trasformazione $1 \to 2$ è adiabatica e che quindi valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \qquad \to \qquad V_2 = V_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \qquad \to \qquad T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{cases} \tag{28}$$

Infine dello stato 3 sappiamo che $p_3 = p_1$ (la trasformazione $3 \to 1$ è isobara) e che $V_3 = V_2$ (la trasformazione $2 \to 3$ è isocora). Di conseguenza siamo in grado di calcolarci T_3 applicando la legge di stato dei gas perfetti:

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{MR} = \frac{p_1 V_1}{MR} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{29}$$

a) Il valore di T_2 è dato dalla seconda delle (28).

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \approx 533.5\text{K} \tag{30}$$

b) Essendo la trasformazione $1 \to 2$ adiabatica la quantità di calore scambiata è nulla (ossia $Q_{12} = 0$). Per il primo principio della termodinamica abbiamo $L_{12} = -\Delta U_{12} = -Mc_V(T_2 - T_1)$. Ricordando che $\gamma = c_p/c_V$ e tenendo conto della (30) si ottiene:

$$L_{12} = -Mc_V(T_2 - T_1) = M\frac{c_P}{\gamma} T_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] \approx -8681.4\text{J} \tag{31}$$

c) Per calcolare il lavoro totale scambiato durante l'intero ciclo basta sommare i lavori scambiati durante le singole trasformazioni che compongono il ciclo. Il lavoro L_{12} scambiato durante la trasformazione $1 \to 2$ è dato dalla (31). Calcoliamo quindi L_{23} ed L_{31}. Essendo la trasformazione $2 \to 3$ isocora si ha $L_{23} = 0$. Nella trasformazione $3 \to 1$ la pressione è costante e quindi:

$$L_{31} = p_1(V_1 - V_3) = p_1(V_1 - V_2) = p_1 V_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} M c_P T_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] \tag{32}$$

dove si è utilizzata la (27) e la prima delle (28).

Il lavoro L_t scambiato nell'intero ciclo è quindi dato da:

$$L_t = L_{12} + L_{23} + L_{31} = \frac{M c_P T_1}{\gamma} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{\gamma \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right] + \frac{p_1 - p_2}{p_1}\right\} \approx -5277.8\text{J} \tag{33}$$

d) Trattandosi di un ciclo è ovvio che la variazione totale di energia interna è nulla. Dal primo principio ricaviamo quindi che il lavoro totale scambiato durante l'intero ciclo è pari al calore totale scambiato:

$$Q_t = L_t \approx -5289.0\text{J} \tag{34}$$

Esercizio 4

Applicando la legge di Bernoulli tra i punti 1 e 2 si ottiene:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{35}$$

dove v_1 e v_2 rappresentano rispettivamente le velocità dell'acqua nei punti 1 e 2. Analogamente le quantità h_1 h_2 rappresentano le quote dei punti 1 e 2 rispetto ad un'altezza presa come riferimento. Essendo il condotto orizzontale è chiaro che $h_1 = h_2$ e quindi la (35) diventa:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho \left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{36}$$

Per calcolare la differenza di pressione $P_1 - P_2$ consideriamo i seguenti punti:

- punto A che si trova in corrispondenza della superficie di separazione tra mercurio ed acqua nella colonnina di sinistra del manometro (colonnina in cui il mercurio si trova ad un'altezza minore);
- punto B che si trova in corrispondenza della superficie di separazione tra mercurio ed acqua nella colonnina di destra del manometro (colonnina in cui il mercurio si trova ad un'altezza maggiore);
- punto C in corrispondenza della colonnina di destra del manometro alla stessa altezza del punto A.

Essendo A e C due punti di uno stesso liquido in quiete (mercurio) posti alla stessa altezza, per la legge di Stevino deve essere $P_A = P_C$. D'altra parte applicando ancora la legge di Stevino possiamo scrivere:

$$P_A = P_1 + \rho g(h + \Delta h) \tag{37}$$

dove ρ indica la densità dell'acqua mentre h indica la differenza in quota tra i punti 1 e B. Analogamente possiamo scrivere P_C come:

$$P_C = P_2 + \rho g h + \rho_{Hg} \rho g \Delta h \tag{38}$$

dove la densità assoluta del mercurio è stata espressa in termini della sua densità relativa ρ_{Hg}. Imponendo quindi $P_A = P_C$ si ha:

$$P_1 - P_2 = (\rho_{Hg} - 1)\rho g \Delta h \tag{39}$$

Sostituendo la (39) nella (36) si ottiene:

$$(\rho_{Hg} - 1) g \Delta h = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{40}$$

Assumendo che l'acqua si comporti come un fluido incompressibile allora la sua portata lungo il condotto orizzontale è costante. Di conseguenza, se S_1 ed S_2 sono rispettivamente le sezioni del tubo in corrispondenza dei punti 1 e 2 avremo che $Q_1 = v_1 S_1 = Q_2 = v_2 S_2$. Sostituendo tale espressione nella (40) e risolvendo per v_1 si ha:

$$v_1^2 = 2(\rho_{Hg} - 1) g \Delta h \frac{d_2^4}{d_1^4 - d_2^4} \tag{41}$$

Ricordando, infine, la definizione di portata si ha:

$$Q \equiv Q_1 = v_1 S_1 = \frac{\pi}{2} d_1^2 d_2^2 \sqrt{\frac{(\rho_{Hg} - 1) g \Delta h}{2(d_1^4 - d_2^4)}} \approx 0.279 \frac{\mathrm{m}^3}{s} \tag{42}$$