Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
14 febbraio 2025

Esercizio 1

a) Poiché la massa m_1 è mantenuta fissa sul piano orizzontale, le condizioni di equilibrio vanno considerate solo per le masse m_2 e m_3. Sulla massa m_3, sospesa in verticale agisce la forza peso $m_3\vec{g}$ diretta verticalmente verso il basso e la tensione $\vec{\tau}_1$ del filo verticale e diretta verso l'alto. Sulla massa m_2 agiscono la tensione del filo $\vec{\tau}_2$ orizzontale e diretta da sinistra verso destra di modulo pari al modulo di $\vec{\tau}_1$ ($\tau_1 = \tau_2$), la forza peso $m_2\vec{g}$ (verticale e diretta verso il basso), la reazione vincolare $\vec{N}_1$ esercitata dalla massa m_1 (verticale e diretta verso l'alto) e la forza di attrito statico $\vec{F}_A$ che si oppone al moto di m_2. Poiché per effetto della massa m_3, m_2 può solo muoversi orizzontalmente strisciando su m_1 da sinistra verso destra è chiaro che $\vec{F}_a$ deve essere orizzontale e diretta da destra verso sinistra. Di conseguenza le condizioni di equilibrio per le masse m_2 e m_3 sono:

$$\begin{cases} m_3\vec{g} + \vec{\tau}_1 = \vec{0} \\ m_2\vec{g} + \vec{\tau}_2 - \vec{F}_a + \vec{N}_1 = \vec{0} \end{cases} \tag{1}$$

Proiettando le (1) nella direzione orizzontale e verticale si ottiene:

$$\begin{cases} N_1 - m_2 g = 0 \\ -F_a + \tau = 0 \\ -\tau + m_3 g = 0 \end{cases} \tag{2}$$

dove si è posto $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Le (2) rappresentano 3 equazioni nelle tre incognite N_1, τ ed F_a le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} N_1 = m_2 g \\ F_a = m_3 g \\ \tau = m_3 g \end{cases} \tag{3}$$

Nella seconda delle (3), F_a rappresenta il modulo della forza di attrito statico. È ben noto che tale modulo ha un valore massimo dato da $F_a^{max} = \mu_s N_1 = \mu_s m_2 g$. Imponendo quindi che $F_a \leq F_a^{max}$ si ottiene:

$$m_3 g \leq \mu_s m_2 g \qquad \rightarrow \qquad m_3 \leq \mu_s m_2 \qquad \rightarrow \qquad m_3^{max} = \mu_s m_2 = 2.4\text{Kg} \tag{4}$$

b) Visto che il piano orizzontale è liscio, se m_1 è libero di muoversi non possono sussistere condizioni di equilibrio per il sistema formato dalla tre masse che, quindi, sotto l'azione della forza peso esercitata dalla massa m_3, si mettono in moto. Poiché il filo che collega le masse m_2 e m_3 è supposto essere inestensibile le loro accelerazioni sono uguali. L'accelerazione della massa m_1 è la stessa delle masse m_2 e m_3 se l'attrito statico presente tra m_1 e m_2 è in grado di contrastare il moto relativo di m_2 rispetto a m_1 (ossia lo scivolamento di m_2 su m_1). In tal caso m_1 e m_2 si muoveranno sul piano orizzontale come se fossero un blocco unico di massa $m_1 + m_2$. Se questo non accade l'accelerazione della massa m_1 sarà diversa rispetto a quella delle masse m_2 e m_3. Per trovare la condizione su m_3 per cui non si ha scivolamento di m_2 su m_1 scriviamo le equazioni del moto supponendo che m_2 non scivoli su m_1 e che, quindi, le tre masse siano dotate di una stessa accelerazione a. In altre parole supponiamo che il sistema sia formato dalla massa m_3 e da un unico blocco formato dalle due masse m_1 e m_2 che si muovono in maniera solidale l'una rispetto all'altra.

$$\begin{cases} N - (m_1 + m_2)g = 0 \\ \tau = (m_1 + m_2)a \\ -\tau + m_3 g = m_3 a \end{cases} \tag{5}$$

dove N rappresenta la reazione vincolare esercitata dal piano orizzontale. Si noti come nelle (5) non compare la forza di attrito tra m_1 e m_2 in quanto essa è "interna" al sistema di masse formato da m_1 e m_2 che stiamo ipotizzando si muova come un singolo blocco rigido. In tal caso, infatti, per il terzo principio della dinamica, la forza che m_1 esercita su m_2 è uguale e opposta a quella che m_2 esercita su m_1. Di conseguenza, nel computo totale delle forze agenti sul blocco formato da m_1 e m_2 non vi è nessun contributo dovuto alle forza di attrito tra m_1 e m_2 che si annullano a vicenda. Tuttavia stiamo ipotizzando che la forza di attrito statico esiste e che sia sufficientemente grande da garantire nessuno scivolamento di m_2 su m_1. Risolvendo le (5) si ottiene:

$$\begin{cases} N = (m_1 + m_2)g \\ a = \dfrac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g \\ \tau = \dfrac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}(m_1 + m_2)g \end{cases} \tag{6}$$

Consideriamo ora la massa m_1: essa si muove con accelerazione (orizzontale) a data dalla seconda delle (6). L'unica forza orizzontale che agisce su m_1 è la forza di attrito statico F_a che essa si scambia con m_2. Di conseguenza, dal secondo principio delle dinamica otteniamo:

$$F_a = m_1 a = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g \tag{7}$$

Tenendo conto che $F_a \leq F_a^{max} = \mu_s N_1 = \mu_s m_2 g$ si ricava facilmente:

$$m_3 \leq \frac{m_2(m_1 + m_2)\mu_s}{m_1 - \mu_s m_2} \qquad \rightarrow \qquad m_3^{max} = \frac{m_2(m_1 + m_2)\mu_s}{m_1 - \mu_s m_2} \approx 3.62\text{Kg} \tag{8}$$

Si noti come applicando la seconda legge della dinamica al moto della massa m_2 si giunga ad un'espressione di F_a identica a quella fornita dalla (7). In tal caso, infatti, sulla massa m_2 agiscono sia la reazione vincolare τ che la forza di attrito F_a. Tenendo conto che l'accelerazione di m_2 è a data dalla seconda delle (6) possiamo scrivere $\tau - F_a = m_2 a$. Ma tenendo dell'espressione di τ fornita dalle (6) si ottiene $F_a = \tau - m_2 a = m_1 a$ ossia esattamente quanto risulta dalla (7).

c) Poiché il valore di $m_3 = 10$kg è maggiore di m_3^{max} dato dalla (8) è chiaro che in tali condizioni m_2 striscia su m_1. Di conseguenza, la massa m_1 si muove con accelerazione a_1 diversa dall'accelerazione a_{23} delle masse m_2 e m_3 che invece continua ad essere la stessa visto che sono collegate attraverso un filo inestensibile. In tali circostanze le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} F_d = m_1 a_1 \\ \tau - F_d = m_2 a_{23} \\ -\tau + m_3 g = m_3 a_{23} \end{cases} \tag{9}$$

Si noti come questa volta poiché la massa m_2 striscia su m_1 occorre considerare la forza di attrito dinamico e non statico come fatto in precedenza. Tenendo conto che $F_d = \mu_d N_1 =$

$\mu_d m_2 g$, risolvendo le (9) nelle incognite a_1, a_{23} e τ si ottiene:

$$\begin{cases} a_1 = \mu_d \dfrac{m_2}{m_1} g \approx 1.05 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ a_{23} = \dfrac{m_3 - \mu_d m_2}{m_2 + m_3} g \approx 5.89 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ \tau = \dfrac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} (1 + \mu_d) g \approx 39.24\mathrm{N} \end{cases} \tag{10}$$

Esercizio 2

a) Scriviamo le equazioni del moto per la massa m_1 e per il cilindro. Considerata la geometria del problema la massa m_1 può solo traslare verticalmente. Su di essa agiscono la forza peso $m_1\vec{g}$ e la tensione $\vec{\tau}$ del filo. Se quindi indichiamo con a l'accelerazione di m_1 e proiettiamo le equazioni del moto nella direzione verticale troviamo facilmente:

$$m_1 g - \tau = m_1 a \tag{11}$$

Le equazioni del moto del cilindro sono date delle equazioni cardinali della dinamica. Sul cilindro agiscono:

- la forza peso $m\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso che possiamo immaginarci applicata nel su centro di massa;
- la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dal piano orizzontale verticale e diretta verso l'alto applicata nel punto O di contatto tra cilindro e piano orizzontale;
- la tensione $\vec{\tau}$ della corda orizzontale e diretta da sinistra a destra applicata all'estremità superiore del cilidro (ossia a distanza $2r$ dal punto O);
- la forza di attrito statico $\vec{F_a}$ orizzontale e applicata nel punto O. Ipotizziamo per il momento che tale forza sia diretta da sinistra a destra.

Pertanto, le equazioni cardinali delle dinamica applicate al cilindro sono:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\tau} + \vec{F_a} = m\vec{a}_c \\ \vec{M}_O = I_O \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \end{cases} \tag{12}$$

dove $\vec{a}_c$ è l'accelerazione del centro di massa del cilindro, $\vec{M}_O$ il momento delle forze esterne rispetto al polo O, I_O il momento di inerzia del cilindro rispetto ad un assa pessante per O e $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare del cilindro. Poiché le forze $\vec{N}$ e $\vec{F_a}$ sono applicate in O esse non contribuiscono a $\vec{M}_O$. Inoltre, neanche $m\vec{g}$ contribuisce a $\vec{M}_O$ essendo verticale e applicata nel centro del cilindro. Di conseguenza $\vec{M}_O = 2\vec{r} \times \vec{\tau}$ dove $\vec{r}$ è il vettore verticale di lunghezza pari al raggio del cilindro. Proiettando le (12) in un sistema di riferimento con asse x orizzontale da sinistra a destra, asse y verticale dal basso verso l'altro e asse z uscente dal piano del disegno si ottiene:

$$\begin{cases} \tau + F_a = m a_c \\ N - mg = 0 \\ -2r\tau\hat{k} = I_O \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \end{cases} \tag{13}$$

dove $\hat{k}$ rappresenta il versore dell'asse z. Si noti come nel sistema scelto l'accelerazione angolare sia negativa ad indicare il fatto che rispetto all'asse z il cilindro ruota in senso orario. Tenendo conto della condizione di puro rotolamento ($a_c = r|d\omega/dt|$) e mettendo insieme la (11) con le (13) otteniamo:

$$\begin{cases} m_1 g - \tau = m_1 a \\ \tau + F_a = m a_c \\ N - mg = 0 \\ 2r^2\tau = I_O a_c \end{cases} \tag{14}$$

Poiché la corda è inestensibile l'accelerazione a della massa m_1 concide con l'accelerazione del punto più alto del cilindro (assumendo che la corda non slitti sulla superficie del cilindro). Ma d'altra parte l'accelerazione di tale punto (che dista $2r$ dal punto O) è il doppio dell'accelerazione a_c del centro di massa del cilindro (che invece dista r da O). Ponendo quinti $a = 2a_c$ e risolvendo le (14) nelle incognite τ, F_a, a_c e N si ottiene:

$$\begin{cases} a_c = \dfrac{2m_1 r^2}{I_O + 4m_1 r^2} g \\ F_a = \dfrac{2mr^2 - I_O}{I_O + 4m_1 r^2} m_1 g \\ \tau = \dfrac{I_O}{I_O + 4m_1 r^2} m_1 g \\ N = mg \end{cases} \tag{15}$$

Si noti come le quantità a_c, τ e N sono sempre positive mentre F_a può essere sia positiva che negativa. In particolare, se $2mr^2 - I_O > 0$ allora F_a è positiva (ossia è diretta come ipotizzato) se invece $2mr^2 - I_O < 0$ allora F_a è negativa e quindi è diretta in verso opposto a quanto ipotizzato. Tenendo conto che $I_O = 3mr^2/2$ nel nostro caso avremo $F_a > 0$. Dalla condizione $F_a \leq \mu_s N = \mu_s mg$ si ricava la condizione cercata per m:

$$m \geq \frac{1 - 8\mu_s}{\mu_s} m_1 \qquad \rightarrow \qquad m_{min} = \frac{1 - 8\mu_s}{\mu_s} m_1 = 200\text{g} \tag{16}$$

b) Essendo il valore di $m = 600$g maggiore di m_{min} dato dalla (16), il cilindro rotola senza strisciare e quindi le (15) sono valide. Sostituendo in esse il valore di I_O si ottiene:

$$\begin{cases} a_c = \dfrac{2m_1}{3m + 8m_1} g \approx 1.51 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a = 2a_c = \dfrac{4m_1}{3m + 8m_1} g \approx 3.02 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases} \tag{17}$$

c) Essendo nota l'accelerazione del centro di massa e conoscendo le condizioni iniziali (il cilindro inizialmente è in quiete) per calcolare il tempo Δt che occorre al cilindro per spostarsi di un tratto L occorre semplicemente imporre che nel tempo Δt l'ascissa del centro di massa x_c si sposti di un tratto L. La legge del moto del centro di massa del cilindro è:

$$x_c(t) = \frac{1}{2} a_c t^2 \tag{18}$$

Da cui imponendo $x_c(\Delta t) = L$ si ottiene:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{a_c}} = \sqrt{\frac{3m + 8m_1}{2m_1} \frac{L}{g}} \approx 1.63\text{s} \tag{19}$$

Esercizio 3

Applicando la legge di Bernoulli tra i punti 1 al di sotto dell'ala dell'aereo ($v_1 = 60\text{m/s}$) e il punto 2 al disopra dall'ala ($v_2 = 70\text{m/s}$) si ottiene:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{20}$$

Essendo lo spessore dell'ala trascurabile possiamo assumere $h_1 = h_2$ e quindi:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{21}$$

Poiché $v_2 > v_1$ allora $P_1 > P_2$ ossia la pressione al disotto dell'ala (P_1) è maggiore delle pressione al di sopra dell'ala (P_2). Per effetto di tale differenza di pressione, quindi, su ognuna delle due ali dell'aereo agisce una forza verticale e diretta verso l'alto di modulo pari a $F = (P_1 - P_2)S$ dove S rappresenta la superficie alare. Di conseguenza, se trascuriamo la spinta di Archimede (per calcolarla avremmo bisogno di conoscere il volume dell'aereo), le forze che agiscono sull'aereo sono la forza peso mg (verticale e diretta verso il basso) dove m rappresenta la massa dell'aereo e la forza F che agisce su ognuna delle due ali dell'aereo. Possiamo, pertanto supporre che sulla singola ala agisce la forza F e metà della forza peso dell'aereo (che si distribuisce in maniera uguale sulle due ali). Il risultate delle forze che agiscono sulla sigola ala dell'aereo è pertanto:

$$F_t = F - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}\left[\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)S - mg\right] \approx 6063\text{N} \tag{22}$$

Esercizio 4

a) Indichiamo rispettivamente con 1, 2 e 3 i tre stati che compongono il ciclo. Le temperature T_1, T_2 e T_3 sono date (si ricordi che $T_3 = T_2/2$).

Consideriamo la trasformazione adiabatica $1 \to 2$. Per definizione $Q_{12} = 0$ e inoltre per il primo principio della termodinamica $L_{12} = -\Delta U_{12} = -nc_V(T_2 - T_1)$. Essendo il gas monoatomico otteniamo:

$$L_{12} = -\Delta U_{12} = -\frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) \approx -1808.4\text{J} \tag{23}$$

Poiché $L_{12} < 0$ la trasformazione $1 \to 2$ è una compressione adiabatica in cui il gas si riscalda a spese del lavoro effettuato dall'esterno sul gas.

Durante la trasformazione isocora $2 \to 3$ ovviamente $L_{23} = 0$ e quindi $Q_{23} = \Delta U_{23} = nc_V(T_3 - T_2)$ ossia:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2}nR(T_3 - T_2) = -\frac{3}{4}nRT_2 \approx -3741.5\text{J} \tag{24}$$

Attraverso la trasformazione $2 \to 3$, quindi, il gas si raffredda cedendo calore dall'esterno a spese della sua energia interna.

Consideriamo infine la trasformazione isobara $3 \to 1$. Il calore scambiato Q_{31} e la variazione di energia interna ΔU_{31} sono ovviamente dati da:

$$\begin{cases} Q_{31} = nc_p(T_1 - T_3) = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_3) = \frac{5}{4}nR(2T_1 - T_2) \approx 3221.9\text{J} \\ \Delta U_{31} = nc_v(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_3) = \frac{3}{4}nR(2T_1 - T_2) \approx 1933.1\text{J} \end{cases} \tag{25}$$

Per ottenere il lavoro scambiato basta applicare il primo principio della termodinamica:

$$L_{31} = Q_{31} - \Delta U_{31} = \frac{1}{2}nR(2T_1 - T_2) \approx 1288.7\text{J} \tag{26}$$

Poiché $L_{31} > 0$ durante la trasformazione $3 \to 1$ il gas si espande a pressione costante compiendo lavoro sull'ambiente esterno. Allo stesso tempo assorbe calore dall'ambiente esterno e, di conseguenza, aumenta la sua energia interna.

Per ottenere le corrispondenti quantità scambiate durante l'intero ciclo basta semplicemente sommare i contributi derivanti dalla tre trasformazioni:

$$\begin{cases} Q_t = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = \frac{1}{2} nR(5T_1 - 4T_2) \approx -519.7\text{J} \\ \Delta U_t = 0 \\ L_t = Q_t - \Delta U_t = \frac{1}{2} nR(5T_1 - 4T_2) \approx -519.7\text{J} \end{cases} \tag{27}$$

b) Nel ciclo considerato la sorgente fredda è quella a temperatura T_3 (minore tra le tre temperature date) mentre la sorgente calda è quella a temperatura T_2 (maggiore tra le tre). Durante il ciclo viene sottratto il calore Q_{31} dalla sorgente a temperatura fredda (in particolare nella trasformazione $3 \to 1$), ceduto il calore Q_{23} (trasformazione $2 \to 3$) alla sorgente a temperatura calda a spese del lavoro esterno L_{12} compiuto sul gas durante la trasformazione $1 \to 2$. Questo significa che stiamo in presenza di un ciclo frigorifero il cui rendimento si definisce in termini di COP_f come il rapporto fra il calore sottratto alla sorgente fredda (Q_{31}) e il valore assoluto del lavoro totale compiuto sul gas ($|L_{12}|$):

$$COP_f = \frac{Q_{31}}{|L_{12}|} = \frac{5}{6} \frac{2T_1 - T_2}{T_2 - T_1} \approx 1.78 \tag{28}$$