Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
16 settembre 2024

Esercizio 1

a) Non essendoci attriti possiamo determinare il modulo della velocità v_P del punto materiale in P imponendo la conservazione dell'energia. Inizialmente il punto materiale si trova in quiete ad una quota h rispetto alla superficie orizzontale e quindi la sua energia vale $E_i = mgh$. Quando il punto materiale si trova in P la sua energia è data da $E_P = mv_P^2/2 + mgh_p$ essendo h_p la quota del punto P. Imponendo $E_i = E_P$ si ottiene:

$$v_P = \sqrt{2g(h - h_P)} = 3\sqrt{gr} \approx 8.40\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{1}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $h = 5r$ e $h_p = r - r\cos\alpha = r/2$.

b) Per determinare la lunghezza L occorre studiare il moto parabolico che il punto materiale compie una volta lasciata la guida nel punto P. Fissiamo un sistema di riferimento la cui origine si trova nella proiezione del punto P sulla superficie orizzontale, con asse x orizzontale (con verso da sinistra a destra) e asse y verticale (con verso dal basso verso l'alto). In tale sistema di riferimento la posizione iniziale del punto materiale ha coordinate $(0, h_P) = (0, r/2)$. La velocità iniziale ha modulo v_P dato dalla (1) e direzione tagenziale alla guida nel punto P (ossia tangenziale all'arco di circonferenza in P). Di conseguenza, le coordinate di $\vec{v}_P$ nel sistema scelto sono $(v_p\cos\alpha; v_p\sin\alpha) = (v_P/2; \sqrt{3}v_P/2)$. Le equazioni del moto del punto materiale pertanto si scrivono come:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_P}{2}t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_P t + \dfrac{r}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Per trovare la distanza L basta trovare l'istante t_O per cui $y(t_O) = 0$ e poi calcolare $L = x(t_O)$. Dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$\begin{cases} t_O = \dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt{31}}{2}\sqrt{\dfrac{r}{g}} \\ L = x(t_O) = 3\dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt{31}}{4}r \approx 6.46\text{m} \end{cases} \tag{3}$$

c) La quota massima raggiunta dal punto materiale è quella per cui la componente orizzontale (ossia lungo y) della sua velocità si annulla. Annullando quindi la derivata prima della seconda delle (2) (ossia della componente della velocità lungo y) possiamo ottenere l'istante t_{max} in cui il punto materiale raggiunge la quota massima:

$$t_{max} = \frac{\sqrt{3}v_P}{2g} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \tag{4}$$

Sostituendo la (4) nella seconda delle (2) otteniamo:

$$h_{max} = y(t_{max}) = \frac{31}{8}r = 3.1\text{m} \tag{5}$$

d) Affinché vi sia fase di volo del punto materiale occorre che la sua velocità nel punto P sia maggiore di zero. Dalla (1) ricaviamo che questa condizione è verificata se $h > h_P$. Di conseguenza $h_{min} = h_P = r/2 = 40$cm.

Esercizio 2

a) Affinché la sbarra sia in equilibrio il risultante delle forze esterne e il momento delle forze esterne devono essere nulli. Le forze esterne che agiscono sulla sbarra sono la forza peso $m_1\vec{g}$ diretta verticalmente verso il basso che possiamo immaginare applicata nel suo centro di massa, la forza $\vec{F}$ orizzontale e applicata ad un estremo della sbarra e la reazione vincolare $\vec{N}$ che si esercita nel punto O. Pertanto, calcolando i momenti rispetto al polo O, le condizioni di equilibrio si scrivono come:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} = \vec{0} \\ \vec{r_c} \times m_1\vec{g} + \vec{x} \times \vec{F} = \vec{0} \end{cases} \tag{6}$$

dove $\vec{r_c}$ e $\vec{x}$ rappresentano rispettivamente il raggio vettore (rispetto ad O) del centro di massa della sbarra e del suo estremo in cui è applicata la forza $\vec{F}$. Si noti che la prima delle (6) esprime l'annullarsi del risultante delle forze esterne e ci permette di ricavare la reazione vincolare $\vec{N}$ una volta nota m_1. La seconda, invece, che impone l'annullamento del momento delle forze esterne rispetto ad O, ci permette di calcolare m_1 che nel nostro caso costituisce l'unica incognita. Si noti che in tale equazione non compare $\vec{N}$ in quanto tale forza è applicata proprio nel punto rispetto al quale calcoliamo i momenti. Sviluppando il calcolo dei momenti si ottiene:

$$m_1 g r_c \cos\alpha_0 - xF\sin\alpha_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad m_1 = \frac{x}{r_c}\tan\alpha_0\frac{F}{g} \tag{7}$$

dove si è tenuto del fatto che entrambi i momenti presenti nella seconda delle (6) hanno direzione ortogonale al piano della figura e il primo è uscente (verso considerato positivo) mentre il secondo è entrante (negativo). Tenendo conto che la sbarra è omegenea il suo centro di massa è posizionato nel suo centro geometrico e pertanto $r_c = L/2 - x = L/2 - L/3 = L/6$. Inoltre essendo per ipotesi $x = L/3$ si ottiene:

$$m_1 = 2\tan\alpha_0\frac{F}{g} \approx 4.71\text{kg} \tag{8}$$

b) Per determinare la velocità angolare ω_i della sbarra subito prima dell'urto basta imporre la conservazione dell'energia (non ci sono attriti) in corrispondenza della sua posizione iniziale e quella subito prima dell'urto (che si suppone essere verticale visto che la massa m_2 è di dimensioni trascurabili rispetto alla sbarra). Poiché inizialmente la sbarra è ferma la conservazione dell'energia energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}I_O\omega_i^2 = m_1 g\Delta h \tag{9}$$

Dove Δh rappresenta la variazione di quota del centro di massa. Da semplici considerazioni geometriche si ottiene:

$$\Delta h = (L-x) + \left(\frac{L}{2} - x\right)\sin\alpha_0 - \frac{L}{2} = \left(\frac{L}{2} - x\right)(1+\sin\alpha_0) \tag{10}$$

Sostituendo la (10) nella (9) si ottiene:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{m_1 L}{3I_O}(1+\sin\alpha_0)g} \tag{11}$$

Tenendo conto in base al teorema di Huygens-Steiner $I_O = I_c + m_1 r_c^2 = m_1L^2/12 + m_1L^2/36 = m_1L^2/9$ si ottiene:

$$\omega_i = \sqrt{3(1+\sin\alpha_0)\frac{g}{L}} \approx 7.00\frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{12}$$

c) Per determinare velocità angolare della sbarra e la velocità della massa m_2 subito dopo l'urto possiamo innanzitutto sfruttare l'ipotesi di urto completamente elastico e quindi imporre la conservazione dell'energia cinetica prima e dopo l'urto. Inoltre, durante l'urto il momento angolare totale del sistema formato dalla sbarra e dalla massa m_2 si conserva. Questo perché durante l'urto il momento delle forze esterne calcolato rispetto al polo O è nullo. Infatti possiamo supporre che durante l'urto la sbarra sia in posizione verticale e, di conseguenza, la forza peso che agisce su sbarra e sulla massa m_2 non genera momento rispetto al polo O (essendo anch'esse verticali). Inoltre poiché si suppone trascurabile l'attrito tra massa m_2 e piano orizzontale anche la reazione vincolare esercitata dal piano orizzontale è verticale e quindi non contribuisce al momento rispetto ad O. Le forze, infine, che si scambiano la sbarra e la massa m_2 durante l'urto sono interne al sistema considerato. Imponendo la conservazione dell'energia cinetica e del momento angolare si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}I_O\omega_i^2 = \frac{1}{2}I_O\omega_f^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \\ I_O\omega_i = I_O\omega_f + (L-x)m_2v^2 \end{cases} \tag{13}$$

Nelle (13) la prima equazione descrive la conservazione dell'energia cinetica prima e dopo l'urto, la seconda la conservazione del momento angolare totale del sistema formato da sbarra e massa m_2. Risolvendo per le due incognite ω_f e v si ottiene:

$$\begin{cases} \omega_f = \dfrac{I_O - m_2(L-x)^2}{I_O + m_2(L-x)^2}\omega_i \\ v = \dfrac{2I_O(L-x)}{I_O + m_2(L-x)^2}\omega_i \end{cases} \tag{14}$$

Da cui ricordando le espressione ottenute per I_O e ω_i si ricava:

$$\begin{cases} \omega_f = \dfrac{m_1 - 4m_2}{m_1 + 4m_2}\omega_i \approx 5.91\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \\ v = \dfrac{4m_1L}{3(m_1 + 4m_2)}\omega_i \approx 7.75\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \tag{15}$$

d) Affinché nell'urto la sbarra trasferisca interamente la sua energia cinetica alla massa m_2 occorre che la sua velocità angolare dopo l'urto sia nulla ($\omega_f = 0$). Di conseguenza il valore di m_2 per cui questo si verifica è quello per cui si annulla la ω_f data dalla prima delle (15). Ricaviamo quindi che questo accade per $m_2 = m_1/4 = 1.18\text{kg}$. Si noti che se $m_2 < m_1/4$, $\omega_f > 0$ e quindi la sbarra continua a ruotare in senso antiorario anche dopo l'urto. Se invece $m_2 > m_1/4$ allora $\omega_f < 0$ e quindi dopo l'urto la sbarra ruota in senso orario (tornando indietro verso la posizione iniziale).

Esercizio 3

a) Applicando l'equazione di Bernoulli ai punti 1 e 2 otteniamo:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{16}$$

dove P_1 e P_2 rappresentano le pressioni dell'acqua nei punti 1 e 2, ρ la densità dell'acqua, v_1 e v_2 i moduli della velocità dell'acqua nei punti 1 e 2 del condotto e h_1 ed h_2 le quote dei punti 1 e 2. Dalla traccia sappiamo che $h_1 = h_2$ (condotto orizzontale) e che $P_1 - P_2 = \rho g h$. Sostituendo tali espressioni nella (16) otteniamo:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh \tag{17}$$

Inoltre se trattiamo l'acqua come un fluido incompressibile ideale le portate Q_1 e Q_2 nei punti 1 e 2 devono essere uguali:

$$Q_1 = Q_2 \qquad \rightarrow \qquad v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad \rightarrow \qquad v_1 R_1^2 = v_2 R_2^2 \tag{18}$$

Sostituendo la (18) nella (17) dopo semplici calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} v_2 = \sqrt{\dfrac{2ghR_1^4}{R_1^4 - R_2^4}} \approx 1.01 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v_1 = v_2 \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2 = \sqrt{\dfrac{2ghR_2^4}{R_1^4 - R_2^4}} \approx 0.17 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{19}$$

Infine dalla (18) si ricava:

$$Q_1 = Q_2 = \sqrt{\frac{2gh\pi^2 R_1^4 R_2^4}{R_1^4 - R_2^4}} \approx 7.9 \times 10^{-5} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \tag{20}$$

Esercizio 4

Calcoliamo innanzitutto la massa di acqua applicando la legge di stato dei gas perfetti allo stato iniziale 1:

$$m = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{P_1 V_1}{(c_P - c_V)T_1} \tag{21}$$

dove si è tenuto conto che per un gas perfetto $R = c_P - c_V$.

Nel caso in cui la trasformazione $1 \rightarrow 2$ è isobara si ha $P_2 = P_1$. Poiché il volume finale V_2 è noto possiamo calcolare T_2 tenendo conto che il rapporto T/V deve mantenersi costante durante la trasformazione (dove però T deve essere espressa in K). Di conseguenza, $T_2 = (V_2/V_1)T_1$. Riassumendo:

$$\begin{cases} P_2 = P_1 = 58\mathrm{atm} \\ T_2 = \dfrac{V_2}{V_1} T_1 = 879.45\mathrm{K} \end{cases} \tag{22}$$

Affinché il sistema si espanda a pressione costante è necessario riscaldarlo fornendogli calore dall'esterno. La quantità di calore scambiata è data da:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} mc_P dT = mc_P(T_2 - T_1) = P_1(V_2 - V_1)\frac{c_P}{c_P - c_V} \approx 4101.55\mathrm{kJ} \tag{23}$$

La variazione di energia interna ΔU è data da:

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} mc_V dT = mc_V(T_2 - T_1) = P_1(V_2 - V_1)\frac{c_V}{c_P - c_V} \approx 2926.18\mathrm{kJ} \tag{24}$$

Infine applicando il primo principio della termodinamica il lavoro scambiato è dato da:

$$L = Q - \Delta U = P_1(V_2 - V_1) = 1175.37\mathrm{kJ} \tag{25}$$

La variazione di entropia si calcola facilmente come:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} mc_P \frac{dT}{T} = mc_P \ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_1 V_1}{T_1}\frac{c_P}{c_P - c_V}\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_1 V_1}{T_1}\frac{c_P}{c_P - c_V}\ln\frac{V_2}{V_1} \approx 7.686\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}} \tag{26}$$

Consideriamo ora il caso in cui la trasformazione $1 \to 2$ è isoterma. In questo caso sappiamo che $T_2 = T_1$. Poiché il volume finale V_2 è noto possiamo calcolare P_2 tenendo conto che il prodotto PV deve mantenersi costante durante la trasformazione. Di conseguenza, $P_2 = (V_1/V_2)P_1$. Riassumendo:

$$\begin{cases} T_2 = T_1 = 293.15\mathrm{K} \\ P_2 = \dfrac{V_1}{V_2} P_1 \approx 19.33\mathrm{atm} \end{cases} \tag{27}$$

Trattandosi di una isoterma la variazione di energia interna è nulla ($\Delta U = 0$) e il lavoro scambiato è pari alla quantità di calore scambiato per cui:

$$Q = L = \int_{V_1}^{V_2} PdV = mRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \approx 645.62\mathrm{kJ} \tag{28}$$

Infine la variazione di entropia è data da:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta L}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{PdV}{T} = mR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} \approx 2.202 \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}} \tag{29}$$