

Prova di Esame di Fisica Generale II
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
4 febbraio 2025

Esercizio 1

Considerata la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ generato dai due conduttori coassiali deve essere dotato anch'esso di simmetria cilindrica. Descriviamo il problema in un sistema di riferimento con asse z diretto lungo l'asse di simmetria del sistema di conduttori coassiali utilizzando le coordinate cilindriche r (distanza dall'asse di simmetria nel piano xy) ϕ (angolo nel piano xy) e z (coordinata lungo l'asse z). Se il campo elettrico deve essere dotato di simmetria cilindrica esso non può dipendere da ϕ . Se, inoltre, $L \gg R_e$ possiamo assumere che non c'è dipendenza neanche dalla coordinata z (trascurando gli effetti di bordo). Di conseguenza, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$.

Poiché siamo in presenza di conduttori in condizioni statiche, il campo elettrico all'interno dei conduttori 1 e 2 è nullo in qualsiasi circostanza. Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & 0 \leq r < R \\ \vec{0} & R_i < r < R_e \end{cases} \quad (1)$$

Occorre, quindi, calcolare il campo elettrico solo nella regione tra i due conduttori ($R \leq r \leq R_i$) e nella regione esterna ($r \geq R_e$). Si noti che affinché il campo elettrico all'interno del conduttore 1 sia nullo, la carica q conferita a tale conduttore deve necessariamente disporsi sulla sua superficie (teorema di Gauss).

- a) Per calcolare il campo elettrico nella regione compresa tra i conduttori 1 e 2 basta applicare il teorema di Gauss ad una superficie S cilindrica di raggio r compreso tra R e R_i e di altezza L . La carica interna ad S è ovviamente q , mentre, tenendo conto che il campo elettrico è radiale, il suo flusso attraverso S è pari a $E(r)2\pi rL$. Il teorema di Gauss quindi ci permette di ricavare:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{\hat{r}}{r} \quad R \leq r \leq R_i \quad (2)$$

Per calcolare il campo elettrico all'esterno del conduttore 2 basta applicare di nuovo il teorema di Gauss alla superficie cilindrica S definita precedentemente ma con raggio $r > R_e$. Poiché il conduttore 2 per ipotesi è isolato e inizialmente scarico è chiaro che la sua carica netta è nulla. In particolare, la presenza della carica q sul conduttore 1 modifica la distribuzione di carica del conduttore 2 facendo in modo che sulla sua superficie interna venga indotta una carica totale pari a $-q$ mentre sulla superficie esterna una carica q . La carica totale interna ad S , quindi continua ad essere q . Di conseguenza il campo esternamente al conduttore 2 è dato comunque dalla (2). Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & 0 \leq r < R \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{\hat{r}}{r} & R \leq r \leq R_i \\ \vec{0} & R_i < r < R_e \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{\hat{r}}{r} & r \geq R_e \end{cases} \quad (3)$$

- b) Se il conduttore 2 è collegato a terra la carica q depositata sul conduttore interno induce una carica $-q$ sul conduttore esterno (induzione completa). Di conseguenza, applicando il teorema di Gauss come fatto nel caso precedente si vede subito che la (2) continua ad essere valida, mentre esternamente al conduttore 2 il campo elettrico questa volta è nullo in quanto la carica

interna alla superficie cilindrica che contiene entrambi i conduttori è nulla. Di conseguenza,

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & 0 \leq r < R \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{\hat{r}}{r} & R \leq r \leq R_i \\ \vec{0} & r > R_i \end{cases} \quad (4)$$

- c) Se fra i due conduttori è presente un dielettrico con costante dielettrica relativa ϵ_r il campo è dato dalle (4) effettuando la sostituzione $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0\epsilon_r$:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & 0 \leq r < R \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \frac{\hat{r}}{r} & R \leq r \leq R_i \\ \vec{0} & r > R_i \end{cases} \quad (5)$$

Per determinare la polarizzazione totale indotta nel dielettrico basta integrare il vettore $\vec{P}$ (polarizzazione per unità di volume) sul volume occupato dal dielettrico. Poiché assumiamo che il dielettrico sia perfetto avremo $\vec{P} = \epsilon_0\chi_E\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$. Si ottiene quindi:

$$\vec{p}_{tot} = \int_V \vec{P} d\tau = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \int_V \vec{E} d\tau \quad (6)$$

Dove V rappresenta il volume occupato dal dielettrico. Tenendo conto delle (5) e che l'elemento di volume in coordinate cilindriche vale $d\tau = r dr d\phi dz$ si ottiene:

$$\vec{p}_{tot} = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{2\pi\epsilon_r L} \hat{r} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \int_R^{R_i} dr = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q(R_i - R) \hat{r} \quad (7)$$

Esercizio 2

- a) Per risolvere il circuito applichiamo il metodo delle maglie. Il circuito è composto da 2 nodi e da 3 rami e, pertanto, il numero di maglie indipendenti è $m = r - n + 1 = 2$. Consideriamo, quindi, le seguenti due maglie:

- (a) maglia a composta dalle resistenze R_1 e R_2
- (b) maglia b composta dalle resistenze R_2 , R_4 e R_3 e dai generatori f_1 e f_2

Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff ad ognuna di queste maglie assumendo delle correnti di maglia fittizie I_a e I_b tutte circolanti in senso orario.

$$\begin{cases} I_a R_1 + (I_a - I_b) R_2 = 0 \\ (I_b - I_a) R_2 + I_b R_4 + I_b R_3 = f_1 - f_2 \end{cases} \quad (8)$$

Risolvendo per le due incognite I_a e I_b si ottiene:

$$\begin{cases} I_a = \frac{R_2(f_1 - f_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2} \approx 2.7 \text{mA} \\ I_b = \frac{(R_1 + R_2)(f_1 - f_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2} \approx 16.3 \text{mA} \end{cases} \quad (9)$$

La corrente che circola nella resistenza R_1 è pari a I_a .

- b) Poiché il valore ottenuto per l'intensità I_b è positivo tale corrente scorre nella maglia b nel verso supposto (ossia orario). Questo implica che solo il generatore f_1 eroga potenza in quanto in f_2 la corrente scorre dal polo positivo a quello negativo e, pertanto, il generatore f_2 assorbe la potenza $I_b f_2$. Possiamo quindi dire che la potenza totale erogata dai due generatori coincide con la potenza erogata da f_1 ossia:

$$W = I_b f_1 = \frac{(R_1 + R_2)(f_1 - f_2)f_1}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2} \approx 0.391 \text{W} \quad (10)$$

- c) Quando il voltmetro con resistenza interna r_V è collegato in parallelo ai capi della resistenza R_1 tutto va come se al posto della resistenza R_1 avessimo il parallelo delle resistenze R_1 e r_V (ossia $R_p = R_1 r_V / (R_1 + r_V)$). Effettuando, quindi, nella (9) la sostituzione $R_1 \rightarrow R_p$ si ottiene:

$$\Delta V = I_a R_p = \frac{R_1 R_2 r_V}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2] r_V + R_1 R_2 (R_3 + R_4)} (f_1 - f_2) \approx 2.6V \quad (11)$$

Si noti che se il voltmetro fosse stato ideale (ossia $r_V \rightarrow +\infty$) la differenza di potenziale misurata ai capi di R_1 sarebbe stata $\Delta V = I_a R_1 \approx 2.7V$ con I_a data dalla (9).

Esercizio 3

- a) In un condensatore piano (carico) il campo elettrico $\vec{E}$ presente tra sue armature è costante diretto perpendicolarmente alle armature con verso che va dall'armatura carica positivamente a quella carica negativamente. Di conseguenza, tra le armature, il potenziale elettrico associato a tale campo ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$) varia linearmente con la posizione. Se indichiamo con x la distanza di un generico punto interno al condensatore a partire dall'armatura collegata al polo positivo del generatore (quella che nella figura si trova in basso ossia quella caricata positivamente), in generale, possiamo scrivere $V(x) = -Ax$ con A costante. Se conosciamo la differenza di potenziale a cui si trovano le armature del condensatore possiamo facilmente calcolare A . Quando l'interruttore T viene chiuso, a regime, la differenza di potenziale tra le armature del condensatore è pari a $f = V_+ - V_-$. Se indichiamo con d la distanza tra le armature di C , nel nostro caso avremo $V_+ = V(0)$ e $V_- = V(d)$ e, quindi, $V_+ - V_- = -Ad = f$. Ricaviamo quindi $A = -f/d$ ossia $V(x) = fx/d$. Nel momento in cui l'interruttore T viene chiuso il condensatore C si carica e si instaura un capo elettrico costante fra le sue armature. Per effetto di tale campo la particella carica positivamente in quiete al centro del condensatore accelera perpendicolarmente alla superficie delle armature dall'armatura positiva alla negativa (facendo riferimento alla figura si muove verso l'alto). Si noti che tale campo elettrico è presente solo internamente al condensatore, quindi, la particella viene accelerata solo fino a quando si trova all'interno del condensatore. Possiamo facilmente calcolare la velocità v_a che la particella possiede quando essa si trova in corrispondenza del foro a imponendo la conservazione dell'energia. La particella muovendosi dalla sua posizione iniziale ($x = d/2$) al foro a ($x = d$) è sottoposta alla differenza di potenziale $\Delta V = V(d) - V(d/2) = f/2$. Poiché la particella è inizialmente ferma si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = q\Delta V = q\frac{f}{2} \quad v_a = \sqrt{\frac{qf}{m}} \quad (12)$$

Una volta che la particella fuoriesce dal condensatore C su di essa non agisce nessuna forza elettrica (all'esterno del condensatore il campo elettrico è nullo) e nessuna forza magnetica (per ipotesi al di sotto dello schermo S non vi è campo magnetico).

Di conseguenza, se si trascurano gli effetti gravitazionali, la particella, una volta emersa dal condensatore C , si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}_a$ di modulo dato dalla (12) e direzione perpendicolare alle superfici delle armature di C fino a che non giunge nel semispazio superiore allo schermo S dopo aver attraversato il foro b .

Attraversato il foro b , infatti, la particella è soggetta alla forza di Lorentz $\vec{F}_M = q\vec{v}_a \times \vec{B}_0$. Essendo $\vec{v}_a$ e $\vec{B}_0$ ortogonali, $\vec{F}_M$ è centripeta e, quindi, la particella si muove di moto circolare uniforme. Il modulo dell'accelerazione centripeta è dato da $a_c = v_a^2/R$ dove R rappresenta il raggio del moto circolare compiuto dalla particella. Possiamo, pertanto, scrivere l'equazione del moto della particella come:

$$a_c = \frac{F_M}{m} \quad \frac{v_a}{R} = \frac{qB_0}{m} \quad (13)$$

Affinché la particella fuoriesca dal foro c occorre imporre nella (13) $R = L/2$. Tale condizione ci permette di ricavare L che tenendo conto della (12) risulta essere:

$$L = 2 \frac{mv_a}{qB_0} = 2 \sqrt{\frac{mf}{qB_0^2}} \approx 5.1 \text{ cm} \quad (14)$$

- b) Poiché la forza $\vec{F}_M = q\vec{v}_a \times \vec{B}_0$ non compie lavoro (essendo perpendicolare alla velocità), il modulo della velocità della particella non può cambiare. Di conseguenza $v_c = v_a$ dato dalla (12):

$$v_c = v_a = \sqrt{\frac{qf}{m}} \approx 310.5 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (15)$$

- c) Il tempo τ è pari a metà del periodo T del moto circolare della particella:

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi R}{v_a} = \frac{\pi}{2} \frac{L}{v_a} = \frac{m\pi}{qB_0} \approx 0.261 \mu\text{s} \quad (16)$$

Esercizio 4

- a) Siano x_C e y_C le coordinate del centro della spira. Se v è la velocità con cui la spira si muove parallelamente all'asse x avremo che $dx_C/dt = v$ mentre y_C è costante. Quando la spira è entrata di un tratto ξ nella regione in cui è presente il campo magnetico, la coordinata x_C del suo centro è pari a $x_C = -l/2 + \xi$. In corrispondenza di tale posizione della spira il flusso del campo B attraverso una superficie S concatenata alla spira è dato da:

$$\Phi_S = \int_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = B_0 \int_0^l dy \int_0^\xi dx = B_0 l \xi = B_0 l \left(x_C + \frac{l}{2} \right) \quad (17)$$

Dove si è tenuto conto che $\vec{B}_0$ è sempre ortogonale alla superficie della spira. Quando la spira è in movimento, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz in essa si induce una forza elettromotrice f_i data da:

$$f_i = -\frac{d\Phi_S}{dt} = -B_0 l \frac{dx_C}{dt} = -B_0 l v \quad (18)$$

Tenendo conto che la spira ha una resistenza R , la corrente I in essa indotta è pari a:

$$I = \frac{f_i}{R} = -\frac{B_0 l v}{R} \quad (19)$$

Si noti che il segno meno nella (19) ci dice che la corrente nella spira circola in senso orario. Per effetto dalla circolazione della corrente I , sui lati della spira immersi nel campo magnetico agisce una forza data dalla seconda legge di Laplace. Se indichiamo con $d\vec{l}$ il generico elemento infinitesimo di lunghezza della spira, la forza $d\vec{F}$ che agisce su $d\vec{l}$ è pari a $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}_0$.

Sui lati della spira paralleli all'asse x tale forza è diretta lungo y (in particolare sul lato inferiore è diretta come l'asse y mentre sul lato superiore è opposta all'asse y). Poiché tali forze hanno lo stesso modulo esse non giocano alcun ruolo sul moto della spira (esse al più tendono a deformare la spira che tuttavia supponiamo essere rigida).

Sul lato della spira parallelo all'asse delle y di destra (l'unico immerso nel campo magnetico) la forza $d\vec{F}$ è diretta in senso opposto all'asse x e quindi è frenante per la spira. Integrando $d\vec{F}$ su tale lato otterremo la forza $\vec{F}$ totale agente su tale lato:

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = -\hat{i} \int_0^l I B_0 dy = -\frac{B_0^2 l^2 v}{R} \hat{i} \quad (20)$$

Siamo ora in grado di scrivere l'equazione del moto della spira:

$$m \frac{dv}{dt} = F = -\frac{B_0^2 l^2}{R} v \quad (21)$$

A partire dalla (21) possiamo ricavare come varia la velocità v della spira rispetto al tempo t (ossia $v(t)$) o rispetto alla coordinata x_c (ossia $v(x_c)$).

Per determinare $v(t)$ riscriviamo la (21) come:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B_0^2 l^2}{mR} dt \quad \rightarrow \quad v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{B_0^2 l^2}{mR} t\right) \quad (22)$$

Per determinare $v(x_c)$ invece basta sostituire $v = dx_c/dt$ nella (21):

$$dv = -\frac{B_0^2 l^2}{mR} dx_c \quad \rightarrow \quad v(x_c) = v_0 - \frac{B_0^2 l^2}{mR} \left(x_c + \frac{l}{2}\right) \quad (23)$$

Si noti che nella (22) la costante di integrazione è stata determinata imponendo la condizione iniziale $v(t=0) = v_0$. Allo stesso modo nella (23) la costante di integrazione è stata determinata imponendo la condizione iniziale $v(x_c = -l/2) = v_0$.

La spira è completamente immersa nel campo magnetico quando $x_c \geq l/2$. Di conseguenza, il valore minimo v_{min} di v_0 è quello per cui la spira si trova nella posizione $x_c = l/2$ con velocità nulla ossia ($v(x_c = l/2) = 0$):

$$v_{min} = \frac{B_0^2 l^3}{mR} = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (24)$$

- b) Per determinare τ basta integrare la (22) rispetto al tempo e imporre la condizione iniziale $x_c(t=0) = -l/2$:

$$x_c(t) = \int_0^t v(t') dt' = -\frac{l}{2} + \frac{mRv_0}{B_0^2 l^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{B_0^2 l^2}{mR} t\right)\right] \quad (25)$$

Tenendo conto che $v_0 = 2v_{min}$ dato dalla (24) si ha:

$$x_c(t) = l \left[\frac{3}{2} - 2 \exp\left(-\frac{B_0^2 l^2}{mR} t\right) \right] \quad (26)$$

Imponendo che $x_c(\tau) = l/2$ si ricava:

$$\tau = \frac{mR}{B_0^2 l^2} \ln 2 \approx 0.69 \text{s} \quad (27)$$

Si noti che se, come in questo caso, $v_0 > v_{min}$ la spira quando è completamente immersa nel capo magnetico (ossia quando $x_c = l/2$) essa possiede una velocità $v_1 = v_c(l/2) > 0$ data dalla (23). Da questo momento in poi, sebbene la spira continui a muoversi nella regione in cui si trova il campo magnetico, il flusso Φ_S non cambia nel tempo (poiché $\vec{B}$ è costante). Di conseguenza, non vi è nessuna corrente indotta nella spira e quindi su di essa non agisce nessuna forza. La spira, quindi, continuerà a muoversi con velocità costante v_1 . Se, in particolare, $v_0 = v_{min}$ allora $v_1 = 0$ e quindi la spira resta ferma nella posizione $x_c = l/2$. Se, infine, $v_0 < v_{min}$ la spira si ferma prima di essere completamente entrata nella regione in cui è presente il campo magnetico.

Dal punto di vista energetico il tutto può essere interpretato come una dissipazione dell'energia cinetica iniziale della spira. Quando infatti circola corrente indotta nella spira essendo quest'ultima dotata di resistenza elettrica viene dissipata energia per effetto Joule ($W = I^2 R$) alle spese dell'energia cinetica iniziale della spira. Se $v_0 \leq v_{min}$ tutta l'energia cinetica iniziale viene dissipata per effetto Joule. Se invece $v_0 > v_{min}$ solo una parte dell'energia cinetica iniziale viene dissipata il resto lo ritroviamo come energia cinetica residua.