Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
23 ottobre 2024

Esercizio 1

a) Il valore massimo di μ_s per cui la massa m_1 (insieme alla massa m_2) si mette in moto è quello per cui la forza di attritto statico non riesce più a bilanciare le altre forze agenti su m_1. Sulla massa m_1 agisce la forza peso $m_1\vec{g}$ (verticale e diretta verso il basso), la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dal blocco orizzontale (anch'essa verticale e diretta verso l'alto), la tensione $\vec{\tau}$ del filo (orizzontale da sinistra a destra) e la forza di attrito statico $\vec{F}_a$ che si oppone al moto (e quindi tende ad annullare $\vec{\tau}$). Sulla massa m_2 invece agiscono solo la forza peso $m_2\vec{g}$ e la reazione vincolare $\vec{\tau}$. Le condizioni di equilibrio per entrambe le masse si scrivono pertanto come:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{\tau} + \vec{F}_a = \vec{0} \\ m_2\vec{g} + \vec{\tau} = \vec{0} \end{cases} \tag{1}$$

Proiettando le (1) nella direzione orizzontale e verticale si ottiene:

$$\begin{cases} N - m_1 g = 0 \\ -F_a + \tau = 0 \\ -\tau + m_2 g = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Le (2) rappresentano 3 equazioni nelle tre incognite N, τ ed F_a. Risolvendole dopo semplici passaggi algebrici si ha:

$$\begin{cases} N = m_1 g \\ F_a = m_2 g \\ \tau = m_2 g \end{cases} \tag{3}$$

Nella seconda delle (3), F_a rappresenta il modulo della forza di attrito statico. È ben noto che tale modulo ha un valore massimo dato da $F_a^{Max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g$. Imponendo quindi che $F_a < F_a^{Max}$ si ottiene:

$$m_2 g < \mu_s m_1 g \qquad \rightarrow \qquad \mu_s > \frac{m_2}{m_1} \tag{4}$$

Deduciamo quindi che se la (4) è verificata il sistema di masse m_1 ed m_2 sono in equilibrio. Di conseguenza, il valore massimo di μ_s per cui le masse m_1 ed m_2 si mettono in movimento è dato da:

$$\mu_s^{max} = \frac{m_2}{m_1} = 0.5 \tag{5}$$

b) Poiché per ipotesi una volta lasciata libera la massa m_2 di muoversi essa si mette in movimento è chiaro che si suppone che il coefficiente di attrito statico μ_s sia minore o uguale del valore dato dalla (5). Per ottenere le equazioni del moto delle masse m_1 ed m_2 per $0 \le t \le t_s$ basta riscrivere le (1) tenendo conto che in questo caso $\vec{F}_a$ rappresenta la forza di attrito dinamico (data da $F_a = \mu_d N$) e che le masse m_1 ed m_2 si muovono con la stessa accelerazione $\vec{a}$ da determinare (l'accelerazione è la stessa in quanto il filo che collega le due masse è inestensibile). Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{\tau} + \vec{F}_a = m_1\vec{a} \\ m_2\vec{g} + \vec{\tau} = m_2\vec{a} \end{cases} \tag{6}$$

Proiettando le (6) nella direzione orizzontale e verticale si ottiene:

$$\begin{cases} N - m_1 g = 0 \\ -\mu_d N + \tau = m_1 a \\ -\tau + m_2 g = m_2 a \end{cases} \tag{7}$$

Le (7) rappresentano 3 equazioni nelle tre incognite N, τ ed a. Risolvendo tale sistema si ha:

$$\begin{cases} N = m_1 g \\ a = \dfrac{m_2 - m_1 \mu_d}{m_1 + m_2} g \approx 2.62 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ \tau = \dfrac{m_1 m_2 (1 + \mu_d)}{m_1 + m_2} g \approx 14.39\mathrm{N} \end{cases} \tag{8}$$

c) Evidentemente la massima velocità raggiunta dalle masse m_1 ed m_2 è quella che esse hanno nell'istante t_s in cui m_2 tocca il suolo. Essendo il moto di m_1 ed m_2 uniformemente accelerato con accelerazione a data dalla seconda delle (8), possiamo scrivere la legge oraria per la massa m_2 (o equivalentemente m_1) come:

$$y_2(t) = -\frac{1}{2} a t^2 + h \tag{9}$$

dove si è assunta la direzione dell'asse y verticale e diretta verso l'alto (con origine sul suolo orizzontale). Dalla (9) possiamo facilmente ottenere t_s imponendo $y_2(t_s) = 0$ da cui si ottiene $t_s = \sqrt{2h/a}$. La velocità posseduta da m_2 all'istante t_s (e quindi anche quella posseduta da m_1 nello stesso istante) è quindi data da:

$$v_2(t_s) = -a t_s \quad \rightarrow \quad v_{max} = v_2(t_s) = \sqrt{2ha} = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1 \mu_d)}{m_1 + m_2} hg} \approx 2.80 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{10}$$

d) Nel momento in cui m_2 tocca il suolo, la tensione del filo $\vec{\tau}$ si annulla e, di conseguenza, sulla massa m_1 agiscono solo forza di attrito dinamico, forza peso e razione vincolare. Si tratta quindi di un moto orizzontale uniformemente decelerato e, di conseguenza la velocità è data da:

$$v_1(t) = -\mu_d g t + v_{max} \tag{11}$$

dove v_{max} è data dalla (10). Evidentemente per determinare Δt, ossia l'intervallo di tempo che impiega m_1 a fermarsi da quando m_2 ha toccato terra (ossia a partire da t_s), basta imporre $v_1(\Delta t) = 0$. Otteniamo quindi:

$$\Delta t = \frac{v_{max}}{\mu_s g} = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1 \mu_d)}{\mu_s^2 (m_1 + m_2)} \frac{h}{g}} \approx 2.86\mathrm{s} \tag{12}$$

e) Nell'intero processo l'energia viene dissipata sia per effetto della forza di attrito sia durante l'urto della massa m_2 sul suolo. Se indichiamo con ΔE_d l'energia totale dissipata e con E_i ed E_f rispettivamente l'energia meccanica totale del sistema di masse m_1 ed m_2 iniziale e finale (ossia quando entrambe sono in quiete), la conservazione dell'energia impone che $E_i = \Delta E_d + E_f$ da cui ricaviamo che $\Delta E_d = E_i - E_f$. Poiché sia inizialmente che nello stato finale le masse m_1 ed m_2 sono ferme solo la loro energia potenziale va conteggiata per il calcolo di E_i ed E_f. Inoltre la massa m_1 muovendosi in orizzontale durante tutto il processo non contribuisce a nessuna variazione dell'energia potenziale. Di conseguenza la differenza $E_i - E_f$ coincide con la variazione di energia potenziale della sola massa m_2 quindi:

$$\Delta E_d = E_i - E_f = U_{1_i} - U_{1_f} = mgh = 29.43\mathrm{J} \tag{13}$$

Esercizio 2

a) Affinché la sbarra sia in equilibrio il risultante delle forze esterne e il momento delle forze esterne devono essere nulli. Le forze esterne che agiscono sulla sbarra sono la forza peso $m\vec{g}$ diretta verticalmente verso il basso che possiamo immaginare applicata nel suo centro di massa, la tensione del filo $\vec{\tau}$ verticale e diretta verso l'alto e la reazione vincolare $\vec{N}$ che si esercita nel punto O. Pertanto, calcolando i momenti rispetto al polo O, le condizioni di equilibrio si scrivono come:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{\tau} + \vec{N} = \vec{0} \\ \vec{r}_c \times m\vec{g} + \vec{d} \times \vec{\tau} = \vec{0} \end{cases} \tag{14}$$

dove $\vec{r}_c$ e $\vec{d}$ rappresentano rispettivamente il raggio vettore (rispetto ad O) del centro di massa della sbarra e del punto della sbarra in cui è applicato il filo. Si noti che la prima delle (14) esprime l'annullarsi del risultante delle forze esterne e ci permette di ricavare la reazione vincolare $\vec{N}$. La seconda, invece, che impone l'annullamento del momento delle forze esterne rispetto ad O, ci permette di calcolare $\vec{\tau}$. Nell'equazione dei momenti non compare $\vec{N}$ in quanto tale forza è applicata proprio nel polo rispetto al quale eseguiamo il calcolo. Consideriamo ora un sistema di referimento con origine in O, con assi x e y nel piano della figura rispettivamente orizzontale (da sinistra a destra) e verticale (verso l'alto) e asse z perpendicolare al piano della figura ed entrante. Proiettando le (14) in tale sistema di riferimento otteniamo:

$$\begin{cases} N_x = 0 \\ -mg + \tau + N_y = 0 \\ r_c mg - d\tau = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Tenendo conto che la sbarra è omegenea il suo centro di massa è posizionato nel suo centro geometrico e pertanto $r_c = \ell/2$. Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} N_x = 0 \\ N_y = mg - \tau = \dfrac{2d - \ell}{2d} mg \approx -32.7\text{N} \\ \tau = \dfrac{\ell}{2d} mg \approx 81.8\text{N} \end{cases} \tag{16}$$

Si noti che il segno negativo trovato per la componente N_y e il valore nullo trovato per N_x indicano che il vettore $\vec{N}$ è diretto verticalmente verso il basso.

b) Se il filo viene tagliato $\tau = 0$ e la sbarra è libera di ruotare intorno ad O in senso orario per effetto del momento generato dalla forza peso (non più bilanciato dalla tensione del filo). Possiamo determinare l'accelerazione angolare $\alpha = \dot{\omega}$ della sbarra subito dopo il taglio del filo utilizzando la seconda equazione cardinale della dinamica e imponendo quindi che il momento delle forze esterne è pari alla variazione del momento angolare della sbarra. Evidentemente $\vec{M}_O = \vec{r}_c \times m\vec{g} = r_c mg\hat{k}$ (dove $\hat{k}$ rappresenta il versore dell'asse z del sistema di riferimento scelto). Il momento angolare della sbarra è dato da $\vec{L}_O = I_O\vec{\omega}$ dove I_O rappresenta il momento di inerzia della sbarra rispetto a un asse passante per O. Di conseguenza:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \rightarrow \quad r_c mg\hat{k} = I_O\dot{\vec{\omega}} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}} = \frac{r_c mg}{I_O}\hat{k} \tag{17}$$

Si noti che il segno positivo presente nella (17) indica un'accelerazione angolare che tende a far ruotare la sbarra in senso antiorario per un osservatore direzionato lungo l'asse z del sistema di riferimento scelto (che ricordiamo è supposto essere entrante nel piano della figura). Tenendo conto in base al teorema di Huygens-Steiner $I_O = I_C + mr_c^2 = m\ell^2/12 + m\ell^2/4 = m\ell^2/3$, possiamo calcolare il modulo dell'accelerazione angolare come:

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{3g}{2\ell} \approx 14.72 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \tag{18}$$

c) Per determinare la velocità angolare ω_f della sbarra subito prima di urtare la parete verticale basta imporre la conservazione dell'energia (non ci sono attriti) in corrispondenza della sua posizione iniziale e quella subito prima dell'urto. Poiché inizialmente la sbarra è ferma la conservazione dell'energia energia si scrive come:

$$\frac{1}{2} I_O \omega_f^2 = m_1 g \Delta h \tag{19}$$

dove Δh rappresenta la variazione di quota del centro di massa. Da semplici considerazioni geometriche si ricava che $\Delta h = \ell/2$ e quindi:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_O}} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \approx 5.42 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \tag{20}$$

Esercizio 3

Assumendo che l'acqua sia un fluido incompressibile ideale le portate Q_1 e Q_2 nei punti 1 (di sezione S_1) e 2 (di sezione S_2) devono essere uguali:

$$Q_1 = Q_2 \qquad \rightarrow \qquad v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad \rightarrow \qquad v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2 \tag{21}$$

Ricaviamo quindi che:

$$v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1 = 450 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \tag{22}$$

Per determinare P_2 basta applicare l'equazione di Bernoulli ai punti 1 e 2 ottenendo:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{23}$$

dove ρ rappresenta la densità dell'acqua e h_1 ed h_2 le quote dei punti 1 e 2. Dalla traccia sappiamo che $h_1 = h_2$ (tubo orizzontale) quindi:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) \tag{24}$$

Tenendo conto della (22) troviamo:

$$P_2 = P_1 + \frac{d_2^4 - d_1^4}{2d_2^4}\rho v_1^2 \approx 1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \tag{25}$$

Si tenga conto che per esprimere P_2 in kg/cm^2 nella (25) occorre dividere il termine contenente le velocità (espresse in cm/s) per l'accelerazione di gravità g espressa in cm/s^2.

Esercizio 4

Il ciclo è costituito da un'espansione isoterma ($A \rightarrow B$) seguito da un'espansione adiabatica ($B \rightarrow$C), una compressione isoterma ($C \rightarrow D$) e da un riscaldamento isocoro ($D \rightarrow A$). Il grafico nel piano PV delle trasformazioni subite dal gas è riportato in figura 1. I tratti $A \rightarrow B$ e $C \rightarrow D$ sono rami di iperbole equilatera (PV =costante), il tratto $B \rightarrow C$ ha equazione PV^γ =costante

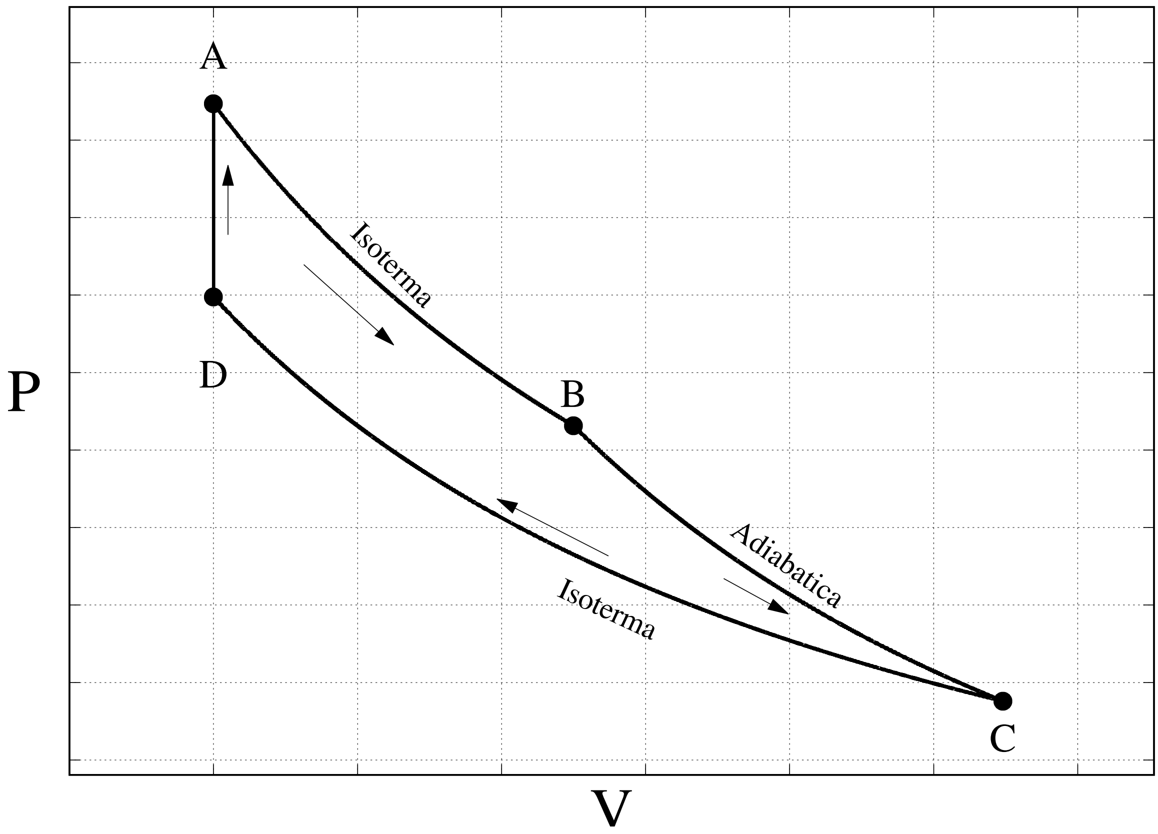

Figura 1: Trasformazioni subite dal gas

(dove γ è il coefficiente di dilatazione adiabatica che per un gas monoatomico vale 5/3) e, infine, il tratto $D \to A$ è verticale.

Il lavoro L effettuato dal gas durante il ciclo è pari alla somma dei lavori effettuati durante le quattro trasformazioni:

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} \tag{26}$$

Calcoliamo i vari contributi.

In generale, il lavoro effettuato durante una trasformazione isoterma a temperatura T che porta da un volume iniziale V_i ad un volume finale V_f si calcola come segue:

$$\int_{V_i}^{V_f} pdV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \tag{27}$$

Dalla (27) si ricava facilmente:

$$L_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} \qquad L_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} \tag{28}$$

Essendo la trasformazione $B \to C$ adiabatica non vi è calore scambiato pertanto, dal primo principio della termodinamica il lavoro effettuato dal gas è pari alla variazione (cambiata di segno) di energia interna. Di conseguenza:

$$L_{BC} = -U_{BC} = -\int_{T_1}^{T_2} nc_V dT = nc_V(T_1 - T_2) \tag{29}$$

Infine essendo la trasformazione $D \to A$ isocora il lavoro effettuato dal gas è nullo ($L_{DA} = 0$). Sostituendo le varie espressioni trovate nella (26) otteniamo:

$$L = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + nc_V(T_1 - T_2) + nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} \tag{30}$$

da cui tenendo conto che $V_D = V_A$, che $c_V = 3R/2$ (con R costante universale dei gas) e che nella trasformazione adibatica vale la relazione $TV^{\gamma-1}$ =costante si può esprimere facilmente V_C in termini delle quantità note e ottenere l'espressione del lavoro L richiesta:

$$L = nRT_2 \left[\left(\frac{3}{2} + \ln \frac{V_B}{V_A} \right) \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) - \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2} \right] \tag{31}$$