Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
25 luglio 2022

Esercizio 1

a) e b) Le forze che agiscono sulla sbarretta sono:

- la forza peso $\vec{F}_p = m\vec{g}$ (verticale e diretta verso il basso) e applicata nel centro di massa della sbaretta;
- le reazioni vincolari $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ esercitate dalle due superfici (dirette ortogonalmente alle superifici stesse);
- le forze di attrito statico $\vec{F}_{A_1}$ e $\vec{F}_{A_2}$ tra la sbarretta e le superfici su cui essa è poggiata (tangenziali alle superfici e opposte alla direzione del moto). Il valore massimo di tali forze sono dati da $\vec{F}_{A_1} = \mu_1\vec{N}_1$ e $\vec{F}_{A_2} = \mu_2\vec{N}_2$.

Di conseguenza, il risultante $\vec{F}$ delle forze applicate alla sbarretta è dato da:

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{A_1} + \vec{F}_{A_2} \tag{1}$$

Il momento totale delle forze applicate alla sbarretta rispetto al polo O situato nel punto in cui la sbarretta è poggiata sulla superficie verticale è dato da:

$$\vec{M}_O = \vec{l} \times \vec{N}_2 + \vec{l} \times \vec{F}_{A_2} + \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_p \tag{2}$$

dove $\vec{l}$ è un vettore diretto come la sbarretta (applicato nel punto O) e di lunghezza pari alla lunghezza della sbarretta. Si noti che le uniche forze che contribusono al momento $\vec{M}_O$ sono la reazione vincolare $\vec{N}_2$ e la forza d'attrito $\vec{F}_{A_2}$ (entrambe applicate nel punto in cui la sbarretta poggia sulla supeficie orizzontale) e la forza peso applicata nel centro di massa della sbarretta che coincide con il suo centro geometrico visto che si suppone la sbarretta omogenea. Tutte le altre forze in gioco, essendo applicate nel punto O, non contribuiscono a $\vec{M}_O$. Le condizioni di equilibrio per la sbarretta sono:

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \tag{3}$$

Proiettando le (3) in un riferimento S con asse x e y rispettivamente orizzontale e verticale e asse z perpendicolare al piano del foglio e uscente otteniamo le seguenti relazioni scalari:

$$\begin{cases} N_1 - F_{A_2} = 0 \\ N_2 + F_{A_1} - mg = 0 \\ -\dfrac{l}{2}mg\cos\theta - lF_{A_2}\sin\theta + lN_2\cos\theta = 0 \end{cases} \tag{4}$$

La condizione in cui la sbarretta è in equilibrio con un angolo minimo possible θ_{min} è quella per cui le forze d'attrito statico sono le massime possibili (per angoli minori di θ_{min} per realizzare l'equilibrio occorrerebbero delle forze di attrito statico di intensità superiore alla massima possibile). Pertanto, sostituendo $F_{A_1} = \mu_1 N_1$ e $F_{A_2} = \mu_2 N_2$ nelle (4) e risolvendo per le 3 incognite θ_{min}, N_1 e N_2, si ottiene:

$$\begin{cases} \tan\theta_{min} = \dfrac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2} \quad \rightarrow \quad \theta_{min} = \arctan\left(\dfrac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2}\right) \approx 78.5^{\text{o}} \\ N_1 = \dfrac{\mu_2}{1+\mu_1\mu_2}mg \approx 0.48\text{N} \\ N_2 = \dfrac{1}{1+\mu_1\mu_2}mg \approx 4.81\text{N} \end{cases} \tag{5}$$

c) Se la sbarretta non è omogena, l'unica cosa che differisce rispetto a quanto calcolato in precedenza è la posizione del suo centro di massa e, quindi, la posizione in cui occorre pensare applicata la forza peso. Variare il punto di applicazione della forza peso non ha nessun effetto sul calcolo del risultante delle forze applicate alla sbarretta. Il momento totale, invece, varia e, in particolare, varia il momento collegato alla sola forza peso (per tutte le altre forze, infatti, i punti di applicazione non cambiano). Se indichiamo con ξ_c la posizione del centro di massa della sbarretta (distanza a partire dal punto in cui la sbarretta poggia sulla parete verticale) la condizione di annullamento del momento M_O in corrispondenza di un valore specifico θ_0 dell'angolo θ è:

$$-\xi_c mg\cos\theta_0 - lF_{A_2}\sin\theta_0 + lN_2\cos\theta_0 = 0 \tag{6}$$

Se, in tale equazione, sostituiamo $F_{A_2} = \mu_2 N_2$ e l'espressione di N_2 data dalle (5) (che continua a essere valida in quanto, come già detto, il risultante delle forze applicate alla sbarretta non cambia se si considera la sbarretta non omogenea) otteniamo il minimo valore di ξ_c che assicura l'equilibrio. Di conseguenza, i valori di ξ_c che assicurano l'equilibrio della sbarretta in corrispondenza dell'angolo θ_0 sono quelli che verificano la seguente relazione:

$$\xi_c \geq \frac{1-\mu_2\tan\theta_0}{1+\mu_1\mu_2}l \approx 55.4\mathrm{cm} \tag{7}$$

Tale condizione, insieme a quella che impone che la massa totale della sbarretta di densità $\lambda(\xi)$ sia pari a m, ci permette di trovare i valori delle costanti a e b che garantiscono l'equilibrio. Affinché la massa della sbarretta sia pari ad m deve essere:

$$\int_0^l \lambda(\xi)d\xi = \int_0^l (a\xi + b)d\xi = m \tag{8}$$

da cui si ricava:

$$b = \frac{m}{l} - \frac{al}{2} \tag{9}$$

Per definizione, la posizione del centro di massa della sbarretta è dato da:

$$\xi_c = \frac{1}{m}\int_0^l \xi\lambda(\xi)d\xi = \frac{1}{m}\int_0^l (a\xi^2 + b\xi)d\xi = \frac{a}{m}\frac{l^3}{12} + \frac{l}{2} \tag{10}$$

Ricordando la (7) otteniamo:

$$a \geq \frac{1-\mu_2(\mu_1 - 2\tan\theta_0)}{6(1+\mu_1\mu_2)}\frac{m}{l^2} \tag{11}$$

Ponendo $\theta_0 = \pi/6$ si ottiene in definitiva:

$$\begin{cases} a \geq \dfrac{1-\mu_2(\mu_1 + 2\tan\theta_0)}{6(1+\mu_1\mu_2)}\dfrac{m}{l^2} \approx 0.20\dfrac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^2} \\ b = \dfrac{m}{l} - \dfrac{al}{2} \end{cases} \tag{12}$$

Esercizio 2

a) Quando il cilindro omogeneo rotola senza strisciare lungo la guida circolare di raggio R, il suo centro di massa (che coincide con il suo centro geometrico) si muove su una circonferenza il cui centro concide con il centro della guida circolare e il cui raggio è pari a $R - r$. L'angolo che descrive questa rotazione è ϕ. Il cilindro, inoltre, ruota anche intorno a un asse passante per il suo centro di massa e perpendicolare al piano del foglio. Indichiamo con α l'angolo che describe tale rotazione. A questo punto possiamo scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica assumendo come polo per il calcolo dei momenti l'asse istantaneo di rotazione del cilindro che, ad ogni istante, è perpendicolare al piano del foglio e passante per il punto P di contatto tra cilindro e guida circolare:

$$\vec{M}_p = \frac{d\vec{L}_p}{dt} \tag{13}$$

Sul cilindro agiscono le seguenti forze:

- forza peso verticale e diretta verso il basso. Tale forza può essere immaginata applicata nel centro di massa del cilindro;
- reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dalla guida circolare. Essa è radiale e sempre rivolta verso il centro della guida. Il punto di applicazione di tale forza è il punto P;
- la forza di attrito statico che rende possibile il moto di puro rotolamento del cilindro. Essa è diretta tangenzialmente alla guida circolare e, istante per istante, risulta applicata nel punto P.

Scegliendo P come polo, pertanto, l'unica forza che contribuisce al momento è la foza peso:

$$\vec{M}_P = \vec{r} \times m\vec{g} = rmg \sin\phi \hat{k} \tag{14}$$

dove il versore $\hat{k}$ indica la direzione ortogonale al piano del foglio e uscente dal foglio stesso. Il momento angolare del cilindro è dato $\vec{L}_P = I_P \dot{\alpha} \hat{k}$ dove I_P rappresenta il momento di inerzia del cilindro rispetto a un asse passante per P (pari a $3mr^2/2$). Sostituindo la (14) nella (13) e tenendo conto dell'espressione considerata per $\vec{L}_P$ otteniamo l'equazione:

$$rmg \sin\phi = I_P \ddot{\alpha} \tag{15}$$

Tale equazione coinvolge i due angoli di rotazione ϕ e α. Per risolverla dobbiamo trovare la relazione che lega tali angoli. Come già detto, l'angolo ϕ descrive la rotazione del centro di massa del cilindro sulla circonferenza di raggio $R-r$. Possiamo quindi scrivere il modulo della velocità del centro di massa del cilindro come $v_c = |\dot{\phi}|(R - r)$. L'utilizzo del valore assoluto della derivata rispetto al tempo di ϕ si rende necessario in quanto a primo membro compare una quantità definita positiva o nulla mentre il segno del secondo membro può essere positivo o negativo a seconda se l'angolo ϕ aumenta o diminuisce al crescere del tempo. D'altra parte, la condizione di puro rotalmento del cilindro lega il modulo v_c all'angolo α attraverso la relazione $v_c = r|\dot{\alpha}|$. Anche in questo caso la presenza del valore assoluto a secondo membro garantisce l'uguaglianza tra due quantità sempre positive. Se, infatti, il cilindro ruota in senso antiorario allora $\dot{\alpha} > 0$ mentre se ruota in senso orario $\dot{\alpha} < 0$. Uguagliando le due espressioni trovate per v_c troviamo la relazione cercata tra gli angoli α e ϕ:

$$|\dot{\alpha}|r = (R - r)|\dot{\phi}| \tag{16}$$

Per eliminare i valori assoluti è necessario capire come il verso delle rotazioni dell'angolo α è legato a quello dell'angolo ϕ. Se lasciamo libero di muoversi il cilindro da fermo a partire da un qualsiasi punto della guida posto alla destra della verticale passante per il centro della guida stessa (ossia se $\phi_i > 0$) esso rotolerà in senso antiorario (quindi $\dot{\alpha} > 0$) mentre l'angolo ϕ descresce (quindi $\dot{\phi} < 0$). Se invece lasciamo libero il cilindro di muoversi a partire da un qualsiasi punto della guida posto a sinistra della verticale passante per il centro della guida (ossia se $\phi_i < 0$) esso rotolerà in senso orario quindi $\dot{\alpha} < 0$ e l'angolo ϕ aumenterà (e quindi $\dot{\phi} > 0$). Come si vede in entrambi i casi (e quindi qualsiasi sia la posizione iniziale del cilindro) il verso di rotazione dei due angoli è opposto e, quindi, la (16) diventa:

$$\dot{\alpha} r = -(R - r)\dot{\phi} \tag{17}$$

Sostituendo tale espressione nella (15) otteniamo l'equazione del moto del cilindro in termini dell'angolo ϕ:

$$\ddot{\phi} + \frac{mr2}{I_P}\frac{1}{R-r} g \sin\phi = 0 \tag{18}$$

Per piccole oscillazioni intorno a $\phi = 0$ possiamo effettuare l'approssimazione $\sin\phi \approx \phi$ e quindi scrivere:

$$\ddot{\phi} + \frac{mr^2}{I_P}\frac{1}{R-r} g\phi = 0 \tag{19}$$

Tale equazione rappresenta un oscillatore armonico con pulsazione e periodo dati da:

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{mr^2}{I_P}\dfrac{1}{R-r} g} \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases} \tag{20}$$

Sostituendo l'espressione di I_P si ottiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}} \approx 1.53\mathrm{s} \tag{21}$$

b) Nel caso in cui la guida circolare si muove con accelerazione $\vec{A}$, il sistema di riferimento solidale alla guida non è inerziale. Di conseguenza, alle forze agenti sul cilindro precedentemente elencate si aggiunge anche la forza apparente data da $\vec{F}_{app} = -m\vec{A}$ che è costante, diretta orizzontalmente da sinistra verso destra. Poiché la forza apparente è costante possiamo immaginarla applicata nel centro di massa del cilindro. Affinchè il cilidro si trovi in equilibrio nella posizione $\phi_0 = \pi/6$, sia il risultante delle forze esterne (inclusa la forza apparente) che il momento totale $\vec{M}_P$ devono essere nulli. È facile vedere che l'annullarsi del momento totale rispetto al polo P ci permette di calcolare il modulo dell'accelerazione $\vec{A}$ necessario affinché vi sia equilibrio mentre l'annullarsi del risultante delle forze esterne ci permette di calcolare le restanti due incognite del moto di rotolamento puro del cilindro (ossia reazione vincolare e la forza d'attrito statica). Rispetto al polo P, infatti, le uniche due forze che contribuiscono al momento totale sono proprio la forza perso e la forza apparente:

$$M_p = rmg\sin\phi_0 - rmA\cos\phi_0 = 0 \tag{22}$$

da cui ricaviamo:

$$A = g\tan\phi_0 \approx 5.66\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{23}$$

c) Per ricavare il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio precedentemente trovata occorre semplicemente ripetere i passaggi fatti per arrivare all'equazione (18) ma aggiuggendo al momento totale anche il contributo della forza apparente (dato da $rmA\cos\phi$). Procedendo il tal modo si arriva all'equazione:

$$\ddot{\phi} + \frac{mr^2}{I_P}\frac{1}{R-r} g\left(\sin\phi - \tan\phi_0\cos\phi\right) = 0 \tag{24}$$

dove si è utilizzata anche la (23). Poiché siamo interessati alle piccole oscillazioni intorno a ϕ_0 è bene riscrivere l'equazione (24) in termini dell'angolo di spostamento rispetto alla posizione di equilibrio (ossia $\Phi = \phi - \phi_0$). Applicando le formule di addizione del seno e tenendo conto che $\ddot{\Phi} = \ddot{\phi}$, dopo semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$\ddot{\Phi} + \frac{mr^2}{I_P}\frac{1}{R-r}\frac{g}{\cos\phi_0}\sin\Phi = 0 \tag{25}$$

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni, possiamo assumere $\sin\Phi \approx \Phi$ e ottenere ancora una volta l'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione e periodo dati da:

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{mr^2}{I_P}\dfrac{1}{R-r}\dfrac{g}{\cos\phi_0}} \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases} \tag{26}$$

Sostituendo l'espressione di I_P si ottiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)\cos\phi_0}{2g}} \approx 1.43\mathrm{s} \tag{27}$$

Si noti come la (27) si possa ottenere dalla (21) semplicemente effettuando la sostituzione $g \to g/\cos\phi_0$. Questo è una conseguenza del fatto che se la guida si muove con accelerazione costante è come se sul cilindro agisse un'accelerazione di gravità data da $\vec{g}+\vec{A}$. Effettuando la somma vettoriale fra i vettori $\vec{g}$ e $\vec{A}$, infatti, è facile rendersi conto che la loro risultante (ossia $\sqrt{g^2+A^2}$) è proprio data da $g/\cos\phi_0$.

d) Essendo l'attrito volvente trascurabile nel moto di rotolamento del cilindro, l'energia totale meccanica si conserva. Abbiamo già visto che quando la guida circolare si muove con accelerazione constante, sul cilindro è come se agisse un'accelerazione di gravità data da $\vec{g}+\vec{A}$. Tale accelerazione è ovviamente legata alla forza $m\vec{g}+m\vec{A}$ che, essendo $\vec{A}$ costante, è conservativa. Se fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro della guida circolare e con asse y verticale e diretto verso l'alto e asse x orizzontale e diretto da sinistra a destra è facile verificare che l'energia potenziale associata a tale forza è data da $U(x,y) = mgy - mAx$ (essendo la forza peso verticale e diretta in verso opposto rispetto a y e la forza apparente orizzontale e diretta come l'asse x). Poichè, inoltre, il cilindro si suppone fermo sia nella posizione iniziale $\phi_i = 0$ che in quella finale $\phi_f = \pi/2$ è chiaro che in corrispondenza di entrambe tali posizioni l'energia cinetica è nulla. Di conseguenza, la conservazione dell'energia meccanica impone che l'energia potenziale iniziale e finale siano uguali:

$$U_f \equiv U(x_f, y_f) = U(x_i, y_i) \equiv U_i \tag{28}$$

Tenendo conto che $x_i = 0$, $y_i = -(R-r)$, $x_f = R-r$ e $y_f = 0$ si ottiene:

$$mA(R-r) = mg(R-r) \quad \to \quad A = g \approx 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{29}$$

Esercizio 3

Calcoliamo le variabili termodinamiche (P, T, V) in corrispondenza dei 4 stati A, B, C e D.

Per quanto riguarda lo stato A, vengono forniti i valori di pressione P_A e temperatura T_A, di conseguenza è possibile calcolare V_A utilizzando la legge di stato dei gas perfetti:

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} \tag{30}$$

Dello stato B conosciamo il volume $V_B = 2V_A$ e la temperatura $T_B = T_A$ in quanto la trasformazione $A \to B$ è isoterma. Possiamo quindi calcolare la pressione utilizzando ancora la legge di stato dei gas perfetti:

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_A}{2V_A} = \frac{P_A}{2} \tag{31}$$

Per quanto riguarda lo stato C, vengono forniti il volume $V_C = 3V_B = 6V_A$ e temperatura $T_C = T_A/2$, di conseguenza possiamo calcolare la pressione P_C come:

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{nRT_A}{12V_A} = \frac{P_A}{12} \tag{32}$$

Infine, per quanto riguarda lo stato D conosciamo la temperatura $T_D = T_C = T_A/2$ (trasformazione $C \to D$ isoterma) e pressione $P_D = P_A$ (trasformazione $D \to A$ isobara). Il corrispondente volume è dato da:

$$V_D = \frac{P_C}{P_D}V_C = 6\frac{P_C}{P_A}V_A = \frac{V_A}{2} \tag{33}$$

a) e **b)** La trasformazione $A \to B$ consiste in una espansione isoterma. Pertanto, per il primo principio avremo che $Q_{AB} = L_{AB}$:

$$Q_{AB} = L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} PdV = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln 2 = 2881.6\text{J} \tag{34}$$

La trasformazione $B \to C$ è un'adiabatica irreversibile e quindi $Q_{BC} = 0$. Applicando il primo principio della termodinamica possiamo calcolare il lavoro come $L_{BC} = -\Delta U_{BC}$. Tenendo conto che per un gas perfetto l'energia interna dipende solo dalla sua temperatura e che i punti B e C, estremi della trasformazione irreversibile, sono comunque dei punti di equilibrio, possiamo scrivere:

$$L_{BC} = -nc_V(T_C - T_A) = nc_V\frac{T_A}{2} = \frac{3}{4}nRT_A = 3118.0\text{J} \tag{35}$$

La trasformazione $C \to D$ è una compressione isoterma:

$$Q_{CD} = L_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} PdV = nRT_C \ln\frac{V_D}{V_C} = -nR\frac{T_A}{2}\ln 12 = -5165.2\text{J} \tag{36}$$

Infine la trasformazione $D \to A$ è costituita da una espansione isobara. Di conseguenza Q_{DA} e L_{DA} si calcolano come:

$$\begin{cases} Q_{DA} = nc_P(T_A - T_D) = \dfrac{5}{4}nRT_A = 5196.6\text{J} \\ L_{DA} = P_A(V_A - V_D) = \dfrac{P_AV_A}{2} = 2078.6\text{J} \end{cases} \tag{37}$$

c) Il rendimento del ciclo si calcola effettuando il rapporto tra il lavoro totale prodotto $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$ e il calore totale assorbito dal gas $Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA}$ (si noti che essendo la transizione $B \to C$ adiabiatica non sussiste scambio di calore tra gas e ambiente esterno e che nella compressione isoterma $C \to D$ è il gas a cedere calore all'esterno essendo $Q_{CD} < 0$):

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 0.36 \tag{38}$$

Si noti come il rendimento ottenuto sia minore del rendimento ideale di una macchina di Carnot operante tra le temperature T_C e T_A pari a $1 - T_C/T_A = 0.5$ come deve essere visto che siamo in presenza di un ciclo che contiene una trasformazione irreversibile.

d) Essendo l'entropia una funzione di stato possiamo calcolare la sua variazione nella trasformazione $B \to C$ indipendentemente dal tipo di trasformazione che unisce gli stati di equilibrio B e C:

$$\Delta S_{CB} = \int_C^B dS = \int_C^B \frac{\delta Q}{T} = \int_C^B \frac{dL + dU}{T} = \int_C^B \frac{PdV + nc_V dT}{T} \tag{39}$$

Di conseguenza applicando la legge di stato dei gas perfetti ottenamo:

$$S_B - S_C = nR \int_{V_C}^{V_B} \frac{dV}{V} + nc_V \int_{T_C}^{T_B} \frac{dT}{T} =$$

$$= nR \ln \frac{V_B}{V_C} + nc_V \ln \frac{T_B}{T_C} = nR \left(\ln \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \ln 2 \right) = -0.49 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \tag{40}$$

Si noti come nell'intero ciclo l'entropia totale del sistema gas+universo non varia in quanto il ciclo è formato da tre trasformazioni reversibili (in cui l'entropia del sistema non varia) e da una trasformazione irreversibile ma adiabatica che quindi non scambiando calore non genera variazione di entropia. Di conseguenza:

$$\Delta S_{gas+univ} = 0 = \Delta S_{univ} + \Delta S_{gas} \tag{41}$$

Da cui:

$$\Delta S_{univ} = -\Delta S_{gas} = -(S_B - S_A) > 0 \tag{42}$$

Poiché il ciclo è irreversibile esso porta all'aumento dell'entropia dell'universo in accordo con il secondo principio della termodinamica.

Esercizio 4

Affinché l'iceberg conico galleggi sulla superficie del mare, la sua forza peso deve essere uguale e opposta alla spinta di Archimede. Se si indica con V_{ice} e ρ_{ice} il volume totale e la densità dell'iceberg, con V_{ice}^{i} il volume della parte immersa dell'iceberg e con ρ_{mare} la densità dell'acqua marina si ha:

$$\rho_{ice}V_{ice} = \rho_{mare}V_{ice}^{i} \tag{43}$$

Di conseguenza, il volume della parte emersa dell'iceberg V_{ice}^{e} è dato da:

$$V_{ice}^{e} = V_{ice} - V_{ice}^{i} = \frac{\rho_{mare} - \rho_{ice}}{\rho_{mare}}V_{ice} = 603.2\mathrm{m}^3 \tag{44}$$

dove si è assunto $\rho_{mare} = 1000\mathrm{Kg/m}^3$.