Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
30 novembre 2022

Esercizio 1

a) Lungo la direzione individuata dai fili fissiamo come positivo il verso di percorrenza che va da m_1 a m_3. Le condizioni di equilibrio delle tre masse sono:

$$\begin{cases} -k\delta + \tau_1 = 0 \\ -\tau_1 + \tau_2 + m_2 g \sin\alpha = 0 \\ m_3 g - \tau_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove τ_1 e τ_2 sono rispettivamente le tensioni dei fili che uniscono le coppie di masse m_1, m_2 e m_2, m_3. Risolvendo nelle tre incognite δ, τ_1 e τ_2 otteniamo:

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{m_3 + m_2 \sin\alpha}{k} g \approx 27.0\text{cm} \\ \tau_1 = (m_3 + m_2 \sin\alpha) g \\ \tau_2 = m_3 g \end{cases} \tag{2}$$

b) Per trovare i valori di δ per cui si ha equilibrio se sussite attrito statico tra le masse e le superfici su cui esse scorrono occorre tener presente che la forza di attrito statico si oppone sempre al verso del moto (come ogni forza d'attrito). Se, quindi, le masse m_1 e m_2 (su m_3 non può agire alcuna forza di attrito statico in quanto essa è staccata dalla superficie e, in ogni caso, anche se fosse attaccata non genererebbe alcuna reazione vincolare sul blocco su cui scorre) scorrono nel verso che va da m_1 ad m_2, le corrispondenti forze d'attrito statico sono parallele alla superficie del blocco su cui esse scorrono e entrambe dirette nel verso che va da m_2 a m_1 (e, quindi sono negative rispetto al verso di percorrenza scelto). Analogamente se le masse m_1 e m_2 scorrono nel verso che va da m_2 a m_1, le forze d'attrito sono sempre parellele alla direzione di percorrenza ma hanno verso che va da m_1 a m_2 (ossia sono positive rispetto al verso di percorrenza scelto). Di conseguenza, i valori di δ per cui si ha equilibrio sono tutti quelli contenuti nell'intervallo $\delta_{min} \le \delta \le \delta_{max}$. Il valore δ_{min} è quello per cui il modulo delle forze d'attrito è il massimo possibile e il loro verso è negativo, mentre δ_{max} si ottiene nella condizione in cui il modulo delle forze d'attrito statico è massimo ma il loro verso è positivo. Per ricavare δ_{min} possiamo quindi scivere:

$$\begin{cases} -k\delta_{min} + \tau_1 - \mu_s m_1 g = 0 \\ -\tau_1 + \tau_2 + m_2 g \sin\alpha - \mu_s m_2 g \cos\alpha = 0 \\ m_3 g - \tau_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Risolvendo nelle tre incognite δ_{min}, τ_1 e τ_2 otteniamo:

$$\begin{cases} \delta_{min} = \dfrac{m_3 + m_2 \sin\alpha - \mu_s(m_1 + m_2\cos\alpha)}{k} g \approx 21.3\text{cm} \\ \tau_1 = (m_3 + m_2 \sin\alpha - \mu_s m_2 \cos\alpha) g \\ \tau_2 = m_3 g \end{cases} \tag{4}$$

Analogamente, le equazioni che ci permettono di ricavare δ_{max} sono:

$$\begin{cases} -k\delta_{max} + \tau_1 + \mu_s m_1 g = 0 \\ -\tau_1 + \tau_2 + m_2 g \sin\alpha + \mu_s m_2 g \cos\alpha = 0 \\ m_3 g - \tau_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Risolvendo nelle tre incognite δ_{max}, τ_1 e τ_2 otteniamo:

$$\begin{cases} \delta_{max} = \dfrac{m_3 + m_2 \sin\alpha + \mu_s(m_1 + m_2\cos\alpha)}{k} g \approx 32.6\text{cm} \\ \tau_1 = (m_3 + m_2\sin\alpha + \mu_s m_2 \cos\alpha) g \\ \tau_2 = m_3 g \end{cases} \tag{6}$$

Si noti come il valore di δ trovato al punto a) che qui indichiamo con δ_{na} si trova al centro dell'intervallo compreso tra δ_{min} e δ_{max} ossia $\delta_{na} = (\delta_{max} - \delta_{min})/2$. Quando infatti, $\delta = \delta_{na}$, come visto nel punto a), non c'è bisogno di nessuna forza d'attrito affinché il sistema stia in equilibrio. In altri termini, per $\delta = \delta_{na}$, sussiste equilibrio con le forze d'attrito statico che in modulo solo le minime possibili (ossia nulle). Per $\delta = \delta_{min}$ sussiste equilibrio con le forze d'attrito statico che sono in modulo le massime possibili ma hanno verso negativo (ossia contrastano il moto delle masse che va da m_1 verso m_2), mentre per $\delta = \delta_{max}$ sussiste equilibrio con le forze d'attrito statico che sono in modulo le massime possibili e hanno verso positivo (ossia contrastano il moto delle masse che va da m_2 a m_1).

c) Le equazioni del moto per le tre masse sono:

$$\begin{cases} -kx_1 + \tau_1 = m_1\ddot{x}_1 \\ -\tau_1 + \tau_2 + m_2 g\sin\alpha = m_2\ddot{x}_2 \\ m_3 g - \tau_2 = m_3\ddot{x}_3 \end{cases} \tag{7}$$

dove x_1, x_2 e x_3 indicano gli spostamenti delle masse m_1, m_2 ed m_3 rispetto alle loro posizioni quando la molla non è né allungata né compressa (ossa quando la sua lunghezza è pari alla sua lunghezza a riposo). Poiché i fili sono inestensibili deve essere $x_1 = x_2 = x_3$ e $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3$ (l'accelerazione delle tre massa deve essere la stessa). Ricavando τ_1 e τ_2 dalle ultime due equazioni e sostituendo nella prima otteniamo la seguente equazione del moto per x_1:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_1 + kx_1 = (m_3 + m_2\sin\alpha) g \tag{8}$$

Tale equazione è quella di un oscillatore armonico con pulsazione:

$$\omega^2 = \frac{k}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{9}$$

Da cui ricaviamo che il periodo delle oscillazioni del sistema è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{k}} \approx 1.33\text{s} \tag{10}$$

Esercizio 2

a) Per calcolare la velocità angolare ω della sbarretta quando essa si trova in posizione orizzontale basta applicare la legge di conservazione dell'energia (visto che si suppongono trascurabili tutti gli attriti). Inizialmente la sbarretta è in quiete nella posizione individuata dall'angolo $\alpha = \pi/3$. Di conseguenza, l'energia iniziale della sbarratta coincide con la sua energia potenziale dovuta alla forza peso. Visto che la sbarretta è omogenea possiamo immaginare la forza peso applicata nel suo centro che si trova ad un'altezza $h + (l/2)\sin\alpha$. A partire da questa posizione la sbarretta ruota intorno al punto P e quando arriva nella posizione orizzontale ($\alpha = 0$) la sua energia totale è data dalla somma della sua energia cinetica rotazionale e della sua energia potenziale. L'energia cinetica rotazione è facilmente calcolabile utilizzando il teorema di Köning:

$$T_f = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \tag{11}$$

dove con v_c è stata indicata la velocità del centro di massa della sbarretta e con I_c il suo momento di inerzia rispetto a un asse passante per il suo centro di massa. Tenendo conto che v_c è legata a ω dalla relazione $v_c = \omega l/2$ e che quando la sbarretta è orizzontale il suo centro di massa si trova ad un'altezza h dal suolo, la conservazione dell'energia si scrive come:

$$mg\left(h + \frac{l}{2}\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{2} + I_c\right)\omega^2 + mgh \tag{12}$$

da cui si ricava:

$$\omega = \sqrt{\frac{4mgl\sin\alpha}{ml^2 + 4I_c}} = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{l}} \approx 7.14\frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{13}$$

dove si è tenuto conto del fatto che per una sbarretta omogena $I_c = ml^2/12$.

b) Nel momento in cui viene rimosso il vincolo in P, la sbarretta è in caduta libera sotto l'azione della forza perso. Poiché essa inizialmente si trova in rotazione con velocità angolare ω, il suo moto può essere pensato come la sovrappozione di un moto translatorio verticale del suo centro di massa e di un moto rotatorio intorno ad un'asse passante per il suo centro di massa (che costituisce un asse libero di rotazione). Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi ci permettono di ricavare entrambi tali moti. In particolare, la prima ci dice che $\vec{F} = m\vec{a}_c$ dove $\vec{F}$ è il risultante delle forze esterne e $\vec{a}_c$ l'accelerazione del centro di massa della sbarretta. Poiché nel nostro caso $\vec{F} = m\vec{g}$ avremo che $\vec{a}_c = \vec{g}$. Di conseguenza, il centro di massa della sbarretta si muove con moto uniformemente accelerato verso il basso in direzione verticale. La sua velocità e la sua posizione ad ogni istante t (a partire dall'istante in cui la sbarretta è in posizione orizzontale) in un sistema di riferimento con origine nel punto in cui la perpendicolare per P interseca il suolo e con asse x orizzontale e diretto da destra verso sinistra e l'asse y verticale diretto verso l'alto sono date da:

$$\begin{cases} v_c(t) = -gt - \dfrac{\omega l}{2} \\ y_c(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 - \dfrac{\omega l}{2}t + h \end{cases} \tag{14}$$

La seconda equazione della dinamica dei sistemi invece, ci permette di definire il moto rotatorio della sbarretta intorno ad un asse passante per il suo centro di massa. Poiché il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa della sbarretta è nullo (l'unica forza esterna è la forza peso che tuttavia non genera momento in quanto appicata proprio nel polo utilizzato per il calcolo del momento) deve conservarsi il momento angolare rispetto al centro di massa della sbarretta. Di conseguenza, la velocità angolare della sbarretta deve mantenersi costante e pari a quella posseduta inizialmente ossia pari al valore di ω dato dalla (13). Se quindi indichiamo con $\theta(t)$ l'angolo formato dalla sbarretta rispetto alla direzione orizzontale all'istante t deve essere $\theta(t) = \omega t$. L'altezza minima h_{min} è quella per cui la sbarretta occupando per la prima volta la posizione verticale ($\theta = \pi/2$) si trova con il suo estremo più in basso in contatto con il suolo. L'istante τ in cui la sbarretta si trova per la prima volta in verticale è dato da $\tau = \pi/(2\omega)$. Per trovare h_{min} occorre, pertanto, imporre $y_c(\tau) = l/2$:

$$h_{min} = \frac{l}{2} + \frac{\pi l}{4} + \frac{g\pi^2}{8\omega^2} = \frac{l}{2} + \frac{\pi l}{4} + \frac{\pi^2}{32}\frac{ml^2 + 4I_c}{mgl\sin\alpha} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{24\sin\alpha}\right) l \approx 88.0\text{cm} \tag{15}$$

c) La velocità $\vec{v}$ dell'estremo della sbarretta che tocca il suolo al tempo τ è data dalla somma della velocità del centro di massa $\vec{v}_c(\tau)$ e la velocità rotazionale di tale punto data da $\vec{v}_R(\tau)$ pertanto:

$$\vec{v} = \vec{v}_c(\tau) + \vec{v}_R(\tau) = -\left(g\tau + \frac{\omega l}{2}\right)\hat{j} - \frac{\omega l}{2}\hat{i} \tag{16}$$

Di conseguenza, il suo modulo vale:

$$v = \sqrt{\left(g\tau + \frac{\omega l}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{12}\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{3}{2}\sin\alpha\right) gl} \approx 4.33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{17}$$

mentre la direzione (in termini di angolo rispetto alla direzione orizzontale) è:

$$\tan\beta = \frac{g\tau + \frac{\omega l}{2}}{\frac{\omega l}{2}} = \frac{g\pi + \omega^2 l}{\omega^2 l} = \frac{\pi + 3\sin\alpha}{3\sin\alpha} \tag{18}$$

da cui si ricava $\beta = 65.6°$.

Esercizio 3

Durante la trasformazione AB isoterma, il lavoro (e la quantità di calore scambiato) è dato da:

$$L_{AB} = Q_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} \tag{19}$$

Durante la trasformazione isobara BC il lavoro e la quantità di calore scambiato sono dati da:

$$L_{BC} = P_B(V_C - V_B) \qquad Q_{BC} = nc_P(T_C - T_B) = nc_p(T_C - T_A) \tag{20}$$

Infine per quanto riguarda la trasformazione adiabatica il calore scambiato è nullo mentre il lavoro è dato da:

$$L_{CA} = -\Delta U_{CA} = -nc_V(T_A - T_C) \tag{21}$$

Tenendo conto inoltre che nella trasformazione adiabiatica vale la relazione:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \qquad T_C = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} T_A \tag{22}$$

Per calcolare V_B basta tenere conto che la trasformazione BC è isobara e quindi vale la relazione:

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \qquad V_B = \frac{T_B}{T_C}V_C = \frac{T_A}{T_C}V_C = \frac{V_C^\gamma}{V_A^{\gamma-1}} \tag{23}$$

Infine la pressione P_B si ottiene utilizzando la legge di stato dei gas perfetti:

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_C}{V_C} \tag{24}$$

Sostituendo le espressioni trovate nelle relazione che forniscono il lavoro e la quantità di calore scambiato si ottiene:

$$\begin{cases} L_{AB} = Q_{AB} = nRT_A\gamma \ln\dfrac{V_C}{V_A} \approx 4802.6\mathrm{J} \\ L_{BC} = nR(T_C - T_A) = nRT_A\left[\left(\dfrac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \approx -1538.3\mathrm{J} \\ Q_{BC} = nc_P\left[\left(\dfrac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \\ L_{CA} = -nc_V(T_A - T_C) = nc_V T_A\left[\left(\dfrac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \approx -2307.5\mathrm{J} \end{cases} \tag{25}$$

Si noti che essendo $L_{AB} > 0$, la prima trasformazione è un'espansione isoterma dove viene effettuato lavoro dal gas sull'ambiente esterno e viene assorbito calore (Q_{AB}) dall'esterno. La trasformazione

BC è invece una compressione isobara. In tal caso viene compiuto del lavoro sul gas dall'esterno (L_{BC}) e il gas cede all'esterno la quantità di calore Q_{BC}. Infine, il ciclo si chiude con una compressione adiabatica in cui è sempre l'esterno a compiere lavoro sul gas senza scambio di calore. Il rendimento del ciclo è quindi dato da:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}}{Q_{AB}} = \frac{L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}}{L_{AB}} \approx 0.199 \tag{26}$$

Esercizio 4
Per determinare la differenza di pressione ΔP fra esterno e interno dell'abitazione basta applicare la legge di Bernoulli:

$$P_i + \frac{1}{2}\rho v_i^2 + \rho g h_i = P_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g h_e \tag{27}$$

dove h_i e h_e rappresentano rispettivamente l'altezza della parte interna e esterna del tetto, P_i e P_e i valori della pressione dell'aria internamente all'abitazione (immediatamente al di sotto del tetto) e esternamente (immediatamente al di sopra del tetto), v_i e v_f la velocità dell'aria internamente e esternamente all'abitazione e ρ la densità dell'aria. Supponendo di trascurare lo spessore del tetto (e di considerare quindi $h_i = h_e$) e che l'aria internamente all'abitazione sia in quiete (o comunque dotata di velocità trascurabile rispetto alla velocità del vento dell'uragano possiamo scrivere:

$$\Delta P = P_i - P_e = \frac{1}{2}\rho v_e^2 \tag{28}$$

Determiniamo, infine, il modulo della forza verticale e diretta verso l'alto che agisce sul tetto moltiplicando ΔP per la superficie del tetto S:

$$F = S\Delta P = \frac{1}{2}S\rho v_e^2 \approx 3.58 \times 10^4 \mathrm{N} \tag{29}$$