

Prima Prova Intercorso Fisica 1
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
16 gennaio 2025

Esercizio 1

- a) Non essendoci attriti, l'energia meccanica si conserva. Dette, quindi E_i e E_f l'energia totale della massa m quando essa si trova rispettivamente alla sommità del piano inclinato A (inizialmente) e alla sommità del piano inclinato B , deve essere $E_i = E_f$. Essendo inizialmente la massa m ferma, l'energia totale iniziale è data dalla sola energia potenziale di m ossia:

$$E_i = mgh_1 \quad (1)$$

Quando, invece, m si trova in corrispondenza della sommità del piano inclinato B la sua energia totale avrà sia un termine cinetico che di energia potenziale:

$$E_f = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_2 \quad (2)$$

dove v_B è il modulo della velocità di m quando essa si trova sulla sommità di B . Imponendo la conservazione dell'energia si ottiene quindi:

$$v_B = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \approx 3.13 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3)$$

- b) e c) Nel momento in cui m perde contatto con il piano inclinato B il suo moto diventa quello di un proiettile sparato da un'altezza h_2 con velocità iniziale $\vec{v}_B$ il cui modulo è dato dalla (3) e la direzione è parallela alla superficie del piano inclinato B (ossia inclinata di un angolo α_2 rispetto alla direzione orizzontale). Di conseguenza, l'equazione del moto di m in un sistema di riferimento con asse y verticale e diretto verso l'alto, asse x orizzontale e diretto da sinistra a destra e con origine sulla superficie orizzontale in corrispondenza dell'estremità del piano inclinato B è:

$$\begin{cases} x(t) = v_B \cos \alpha_2 t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_B \sin \alpha_2 t + h_2 \end{cases} \quad (4)$$

Il tempo τ si ottiene imponendo $y(\tau) = 0$:

$$\tau = \frac{v_B}{g} \sin \alpha_2 + \sqrt{\frac{v_B^2}{g^2} \sin^2 \alpha_2 + 2\frac{h_2}{g}} \approx 0.74\text{s} \quad (5)$$

La distanza d si ottiene calcolando $x(\tau)$:

$$d = x(\tau) = v_B \cos \alpha_2 \left(\frac{v_B}{g} \sin \alpha_2 + \sqrt{\frac{v_B^2}{g^2} \sin^2 \alpha_2 + 2\frac{h_2}{g}} \right) \approx 1.99\text{m} \quad (6)$$

- d) Se sussiste attrito tra piani inclinati e massa m , l'energia totale non si conserva e in particolare avremo $E_i + L_A = E_f$ dove L_A rappresenta il lavoro effettuato dalle forze d'attrito mentre E_i e E_f sono ancora date rispettivamente dalle (1) e (2). Poiché la forza di attrito ha modulo costante ($-\mu_d mg \cos \alpha_1$ quando m scivola sul piano A e $-\mu_d mg \cos \alpha_2$ quando m scivola sul piano B) e si mantiene sempre parallela alle superfici dei piani inclinati è semplice calcolare L_A :

$$L_A = -\int_0^{l_1} \mu_d mg \cos \alpha_1 dl - \int_0^{l_2} \mu_d mg \cos \alpha_2 dl = -\mu_d mg (\cos \alpha_1 l_1 + \cos \alpha_2 l_2) \quad (7)$$

dove l_1 ed l_2 indicano rispettivamente le lunghezze dei piani inclinati A e B . Esprimendo l_1 e l_2 in termini delle altezze h_1 e h_2 si ottiene:

$$L_A = -\mu_d mg \cos \alpha_1 \frac{h_1}{\sin \alpha_1} - \mu_d mg \cos \alpha_2 \frac{h_2}{\sin \alpha_2} = -\mu_d mg (h_1 \cot \alpha_1 + h_2 \cot \alpha_2) \quad (8)$$

Sostituendo tale espressione di L_A nell'equazione di conservazione dell'energia dopo semplici calcoli si ha:

$$v_B = \sqrt{2g[h_1(1 - \mu_d \cot \alpha_1) - h_2(1 + \mu_d \cot \alpha_2)]} \approx 0.89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (9)$$

Esercizio 2

- a) Le forze che agiscono sul manicotto di massa m sono la forza peso (verticale e diretta verso il basso), la reazione vincolare esercitata dall'asta (perpendicolare alla direzione dell'asta) e la forza di attrito statico che, se il sistema non è in rotazione, è diretta lungo l'asta nella direzione che va dal suo centro verso l'esterno (in modo da contrastare la componente della forza peso che tende a far scendere il manicotto lungo l'asta). Le condizioni di equilibrio per il manicotto sono:

$$\begin{cases} F_A = mg \cos \alpha \\ N = mg \sin \alpha \end{cases} \quad (10)$$

Tenendo conto che $F_A \leq \mu_s N$ si ottiene:

$$\mu_s \geq \cot \alpha \quad \rightarrow \quad \mu_{min} = \cot \alpha \approx 0.27 \quad (11)$$

- b) Consideriamo il sistema di riferimento S solidale con l'asta. Se l'asta è in rotazione con velocità angolare ω , tale sistema di riferimento non è inerziale. Pertanto, nel determinare le condizioni di equilibrio in S occorre tener conto sia delle forze reali sia di quelle apparenti che agiscono sul manicotto. Per quanto riguarda le forze apparenti avremo la sola (essendo ω costante) forza centrifuga di modulo pari a $m\omega^2 l \sin \alpha / 2$ (il manicotto si muove su una circonferenza di raggio $l \sin \alpha / 2$ con velocità angolare ω). In corrispondenza del valore massimo ω_{max} la componente di tale forza lungo la direzione dell'asta (ossia $m\omega_{max}^2 l \sin^2 \alpha / 2$) è maggiore della componente della forza peso nella stessa direzione ($mg \cos \alpha$) pertanto il manicotto tenderebbe (se non ci fosse attrito) a muoversi dal centro verso l'esterno dell'asta. Pertanto, in questo caso, la forza di attrito statico (che contrasta tale moto) andrà assunta lungo la direzione dell'asta dal centro verso l'interno. Le condizioni di equilibrio per il manicotto diventano:

$$\begin{cases} F_A = -m \left(g \cos \alpha - \omega^2 \frac{l}{2} \sin^2 \alpha \right) \\ N = m \left(g \sin \alpha + \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \end{cases} \quad (12)$$

Dove si è tenuto conto che la forza centrifuga oltre ad avere una componente lungo la direzione dell'asta, possiede anche una componente ortogonale all'asta ($m\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha / 2$) che contribuisce a determinare il modulo N della reazione vincolare. Dalla condizione $F_A \leq \mu_s N$ si ottiene:

$$\omega \leq \sqrt{\frac{2g(\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha)}{l \sin \alpha (\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha)}} \quad (13)$$

Da cui si ricava:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2g(\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha)}{l \sin \alpha (\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha)}} 6.17 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (14)$$

Esercizio 3

- a) Poiché non ci sono attriti, l'energia meccanica si conserva. Inizialmente, la massa m è ferma poggiata sulla superficie orizzontale e la molla è allungata di un tratto δ . Di conseguenza, l'energia iniziale coincide con l'energia potenziale elastica $E_i = k\delta^2/2$. Quando la molla non è né compressa né allungata l'energia potenziale elastica è nulla e la massa m è salita di un tratto δ e possiede una velocità v . L'energia in corrispondenza di tale configurazione è $E_f = mv^2/2 + mg\delta$. Imponendo $E_i = E_f$ si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\delta^2 - 2g\delta} \approx 1.74 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (15)$$

- b) Se le carrucole C_1 e C_2 sono dotate di massa nel bilancio energetico occorre conteggiare anche l'energia cinetica legata al loro moto rotatorio. Detto I_C il momento di inerzia di C_1 e C_2 rispetto all'asse di rotazione passante per il loro centro di massa E_f è data da:

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + I_C\omega^2 + mg\delta = \frac{1}{2} \left(m + \frac{2I_C}{r_C^2} \right) v^2 + mg\delta \quad (16)$$

dove si è tenuto conto che $v = \omega r_C$ (ipotizzando, quindi, che non ci sia slittamento dei fili sulle carrucole). Imponendo di nuovo $E_i = E_f$ si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{k\delta^2 - 2mg\delta}{m + \frac{2I_C}{r_C^2}}} = \sqrt{\frac{k\delta^2 - 2mg\delta}{m + m_C}} \approx 1.42 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (17)$$

dove si è tenuto conto che $I_C = m_C r_C^2/2$.

- c) Una volta che la molla raggiunge la sua lunghezza a riposo la massa m continua la sua ascesa verso l'altro ma, ovviamente nel filo non ci sarà più tensione e quindi la molla non viene compressa. Di conseguenza, la massa m sale decelerata dalla sola sua forza peso. Il punto di massima altezza viene raggiunto quando tutta l'energia cinetica è trasformata in energia potenziale ossia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\delta = mgh_{max} \quad \rightarrow \quad h_{max} = \delta + \frac{v^2}{2g} \quad (18)$$

Se le carrucole C_1 e C_2 sono supposte di massa trascurabile sostituendo la (15) nella (18) si ha:

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{k\delta^2}{mg} \approx 0.25\text{m} \quad (19)$$

Se, invece la carrucole C_1 e C_2 hanno massa m_C sostituendo la (17) nella (18) si ottiene:

$$h_{max} = \frac{m_C}{m + m_C} \delta + \frac{1}{2} \frac{k\delta^2}{(m + m_C)g} \approx 0.20\text{m} \quad (20)$$