Prima Prova Intercorso Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
9 marzo 2023

Esercizio 1

a) Poiché il piano inclinato è mantenuto fisso rispetto alla superficie piana, le condizioni di equilibrio vanno applicate solo alle masse m_A e m_B.

Sulla massa m_A agiscono quattro forze: la forza peso pari a $m_A\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso, la reazione vincolare $\vec{N}_A$ esercitata dal piano inclinato perpendicolare alla superficie del piano inclinato e uscente da quest'ultima, la tensione $\vec{\tau}$ del filo diretta lungo il filo nella direzione che va dalla massa m_A verso la massa m_B e la forza d'attrito statico $\vec{F}_a$ che si oppone al moto di m_A. Di conseguenza, se le altre forze che agiscono su m_A tendono a far muovere m_A nella direzione del filo da m_A verso m_B allora $\vec{F}_a$ è diretta anch'essa nella direzione individuata dal filo (cioè parallela alla superficie del piano inclinato) ma ha verso che va da m_B a m_A. Analogamente se le forze applicate su m_A tendono a farla muovere nel verso che va da m_B a m_A allora $\vec{F}_a$ avrà il verso opposto (ossia da m_A verso m_B). In ogni caso il modulo massimo di $\vec{F}_a$ è dato da $\mu_s N_A$ dove N_A rappresenta il modulo della reazione vincolare $\vec{N}_A$ precedentemente descritta e μ_s è il coefficiente di attrito statico.

Poiché la massa m_B non è a contatto con il piano inclinato su di essa agiscono solo due forze: la forza peso $m_B\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso e la tensione $\vec{\tau}$ anch'essa verticale ma diretta verso l'alto.

Le masse m_A ed m_B sono in equilibrio se il risultante delle forze che agiscono su di esse è nullo. Pertanto possiamo scrivere:

$$\begin{cases} m_A\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{\tau} + \vec{F}_a = \vec{0} \\ m_B\vec{g} + \vec{\tau} = \vec{0} \end{cases} \tag{1}$$

Proiettiamo ora le (1) nella direzione parallela (x) e ortogonale (y) alla superficie del piano inclinato (ossia alla direzione indivituata dal filo). In particolare scegliamo di prendere come positivo il verso di x che va dalla massa m_A alla massa m_B. Per quanto riguarda la direzione y assumiamo come positivo il verso uscente dalla superficie del piano inclinato. Si noti che nel proiettare le (1) nelle direzioni x e y appena indicate occorre considerare separatamente il caso in cui $\vec{F}_a$ è positiva rispetto a x (ossia le masse si muovono lungo x in verso negativo) o negativa (le masse si muovono lungo x in direzione positiva).

Assumendo $\vec{F}_a$ positiva si ottiene:

$$\begin{cases} -m_A g\sin\alpha + \tau + F_a = 0 \\ -m_A g\cos\alpha + N_A = 0 \\ m_B g - \tau = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Da cui risolvendo per F_a si ottiene:

$$F_a = m_A g\sin\alpha - m_B g \tag{3}$$

Assumendo ora $\vec{F}_a$ negativa si ottiene:

$$\begin{cases} -m_A g\sin\alpha + \tau - F_a = 0 \\ -m_A g\cos\alpha + N_A = 0 \\ m_B g - \tau = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Da cui risolvendo per F_a si ottiene:

$$F_a = m_B g - m_A g \sin\alpha \tag{5}$$

Come già osservato indipendentemente dal verso di $\vec{F_a}$ deve valere sempre la condizione $F_a \leq \mu_s N_A$. Tenendo conto che dalle (2) e (4) si ottiene $N_A = m_A g \cos\alpha$, applicando tale condizione alla (3) e alla (5) si ottengono le seguenti condizioni per m_B:

$$\begin{cases} m_B \geq (\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha) m_A \approx 0.65\text{kg} \\ m_B \leq (\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha) m_A \approx 1.35\text{kg} \end{cases} \tag{6}$$

b) Essendo $m_B = 0.5$kg non compreso nell'intervallo definito dalle (6) che consente l'equilibrio, le masse m_A e m_B si muoveranno entrambe con la stessa accelerazione a lungo la direzione x. In particolare, essendo m_B minore del valore minimo che consente l'equilibrio (0.65kg) le masse si muoveranno lungo la direzione negativa di x (ossia nel verso che va da m_B verso m_A). Le equazioni del moto si ottenono facilmente a partire dalle (2) tenendo conto che questa volta F_a rappresenta la forza di attrito dinamico data da $\mu_d N_A$ e che, non essendo verificate le condizioni di equilibrio lungo la direzione x, a secondo membro troveremo il prodotto delle masse per l'accelerazione a (diretta in verso opposto rispetto a x). Applicando tali modifiche alle (2) si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} -m_A g \sin\alpha + \tau + \mu_d N_A = -m_A a \\ -m_A g \cos\alpha + N_A = 0 \\ m_B g - \tau = -m_B a \end{cases} \tag{7}$$

Da cui risolvendo per a e τ si ottiene:

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_A(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha) - m_B}{m_A + m_B} g \approx 1.28 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \tau = \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}(1 + \sin\alpha - \mu_d \cos\alpha) g \approx 5.55\text{N} \end{cases} \tag{8}$$

c) Al fine di ricavare μ_{min} occorre individuare tutte le forze che agiscono sul piano inclinato. Poiché il piano inclinato si suppone dotato di massa m_c esso è soggetto alla sua forza peso pari a $m_c \vec{g}$ verticale e diretta verso il basso. Avremo poi la reazione vincolare $\vec{N_S}$ generata dalla superficie orizzontale anch'essa verticale e diretta verso l'alto. Essendo la superficie orizzontale scabra avremo la forza di attrito statico $\vec{F_S}$ che è orizzontale e si oppone allo scorrimento orizzontale del piano inclinato sulla superficie piana. Se indichiamo con μ il coefficiente di attrito statico tra piano inclinato e superficie piana sappiamo che deve risultare $F_S \leq \mu N_S$. Infine il piano inclinato esercita una reazione vincolare sulla massa m_A (indicata precedentemente con $\vec{N_A}$) e una reazione vincolare sulla carrucola che indichiamo con $\vec{N}$. Si noti che $\vec{N}$ è diretta nella direzione individuata dalla carrucola (ossia forma un angolo pari a β rispetto alla direzione orizzontale) e ha modulo pari a $N = 2\tau\cos\beta$ in quanto la tensione del filo $\vec{\tau}$ è presente su entrambi i lati della carrucola. Ognuna di queste due tensioni possiede una componente nella direzione della carrucola (entrante nel piano inclinato) pari a $\tau\cos\beta$ che quindi si sommano. Di conseguenza, affinché il punto del piano inclinato in cui la carrucola è fissata sia fermo è necessario che il piano inclinato eserciti una reazione vincolare uguale e opposta. Possiamo quindi scrivere la condizione di equilibrio per il piano inclinato come:

$$m_c \vec{g} + \vec{N_S} + \vec{F_S} - \vec{N_A} - \vec{N} = \vec{0} \tag{9}$$

Proiettando ora la (9) nella direzione parallela e perpendicolare alla superficie piana otteniamo:

$$\begin{cases} -m_c g + N_S - N_A \cos\alpha - N \sin\beta = 0 \\ -N_A \sin\alpha + N \cos\beta + F_S = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} N_S = m_c g + N_A \cos\alpha + N \sin\beta \\ F_S = N_A \sin\alpha - N \cos\beta \end{cases} \tag{11}$$

Da cui tenendo conto che deve essere $F_S \leq \mu N_S$ si ha:

$$\mu_{min} = \frac{F_S}{N_S} = \frac{N_A \sin\alpha - N \cos\beta}{m_c g + N_A \cos\alpha + N \sin\beta} = \frac{m_A g \cos\alpha \sin\alpha - 2\tau \cos^2\beta}{m_c g + m_A g \cos^2\alpha + 2\tau \cos\beta \sin\beta} \tag{12}$$

Sostitendo infine il valore di τ ottenuto nelle (8) si ottiene $\mu_{min} \approx 0.03$.

Esercizio 2

a) Per determinare il moto del cilindro utilizziamo le due equazioni cardinali delle dinamica. Iniziamo, quindi, ad individuare le varie forze che agiscono sul cilindro: la forza peso di modulo pari a $m\vec{g}$ diretta verso il basso e che possiamo immaginare applicata nel centro di massa del cilindro; la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dalla superficie piana sul cilindro verticale e diretta verso l'alto e che si sviluppa nel punto di contatto del cilindro con la superficie piana; la forza di attrito dinamico $\vec{F}_a$ diretta parallelamente alla superficie piana che si oppone all'avanzare del cilindro (quindi opposta alla direzione di $\vec{v}_0$). Anche tale forza si sviluppa nel punto di contatto del cilindro con la superficie piana e il suo modulo è pari a $F_a = \mu_d N$. Se scegliamo come polo per il calcolo dei momenti il centro di massa del cilindro le due equazione cardinali della dinamica si scrivono come:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a = m\vec{a}_c \\ \vec{r}_c \times \vec{F}_a = I_c \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \end{cases} \tag{13}$$

Dove $\vec{a}_c$ rappresenta l'accelerazione del centro di massa del cilindro, $\vec{r}_c$ è il raggio vettore che individua il punto di contatto tra cilindro e superficie piana a partire dalla posizione del centro di massa del cilindro, $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare del cilindro che descrive le rotazioni del cilindro intorno ad una asse passante per il suo centro di massa e infine I_c è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo centro di massa. Fissiamo ora un sistema di riferimento in cui proiettare le (13). Sia l'asse x diretto orizzontalmente da sinistra a destra, l'asse y verticale diretto dal basso verso l'alto e l'asse z perpendicolare al piano del foglio e uscente. Proiettando le (13) in tale sistema di riferimento otteniamo:

$$\begin{cases} -mg + N = 0 \\ -F_a = ma_c \\ -rF_a = I_c \dfrac{d\omega}{dt} \end{cases} \tag{14}$$

in cui si è considerato che, per effetto della reazione vincolare esercitata dalla superficie piana, il centro di massa del cilindro non può avere componenti verticali di accelerazione. Utilizzando la prima delle (14) si ottiene $F_a = \mu_d N = \mu_d mg$ e quindi le altre due equazioni si possono scrivere come:

$$\begin{cases} a_c = -\mu_d g \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{mr}{I_c}\mu_d g \end{cases} \tag{15}$$

Dalle (15) risulta evidente che la presenza della forza d'attrito dinamico $\vec{F}_a$ ha una duplice funzione: quella di rallentare il moto traslatorio del centro di massa del cilindro e quella di imprimere una rotazione oraria (questo sta a significare il segno meno nella seconda equazione) intorno ad una asse passante per il centro di massa del cilindro e diretto come l'asse z. Integrando rispetto al tempo le (15) si possono ottenere come variano nel tempo la velocità del centro di massa $v_c(t)$ del cilindro e la sua velocità angolare $\omega(t)$:

$$\begin{cases} v_c(t) = -\mu_d g t + v_0 \\ \omega(t) = -\dfrac{mr}{I_c}\mu_d g t \end{cases} \tag{16}$$

Ricordiamo ora che un moto di puro rotolamento avviene quando il punto di contatto del cilindro con la superficie piana ha una velocità nulla. Questo porta alla nota condizione di puro rotolamento $\vec{v}_c = -\vec{\omega} \times \vec{r}_c$ che in questo caso diventa:

$$v_c(t_1) = \omega(t_1) r \qquad \rightarrow \qquad -\mu_d g t_1 + v_0 = \frac{mr^2}{I_c}\mu_d g t_1 \tag{17}$$

Da cui risolvendo per t_1 e ricordando che $I_c = mr^2/2$ si ha:

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu_d g(1 + mr^2/I_c)} = \frac{v_0}{3\mu_d g} \approx 1.02\text{s} \tag{18}$$

b) Per $t > t_1$ il moto del cilindro diviene di puro rotolamento. Di conseguenza la forza di attrito dinamico non può più agire in quanto il punto in cui essa è applicata è fermo (definizione di puro rotolamento). Essendo, poi, trascurabile l'attrito volvente sia la velocità del centro di massa del cilindro sia la sua velocità angolare restano costanti e pari ai rispettivi valori assunti all'istante $t = t_1$. Per $t > t_1$ possiamo pertanto scrivere:

$$\begin{cases} v_c(t) = v_c(t_1) = -\mu_d g t_1 + v_0 = \dfrac{2}{3}v_0 \\ \omega(t) = \omega(t_1) = -\dfrac{mr}{I_c}\mu_d g t_1 = -\dfrac{mr}{3I_c}v_0 = -\dfrac{2}{3}\dfrac{v_0}{r} \end{cases} \tag{19}$$

A questo punto siamo in grado di calcolare la velocità $\vec{v}_A$ del punto A del cilindro tenendo conto che $\vec{v}_A = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_A$ essendo $\vec{r}_A$ il raggio vettore che identifica il punto A a partire dal centro di massa del cilindro. Si noti che poiché A si trova sulla verticale passante per il centro di massa del cilindro la sua velocità è orizzontale (ossia diretta come $\vec{v}_c$). Inoltre, essendo la rotazione del cilindro oraria, il verso di $\vec{v}_c$ è lo stesso di $\vec{\omega} \times \vec{r}_A$ da cui ricaviamo:

$$v_A(t \geq t_1) = v_c(t_1) + |\omega(t_1)|\frac{r}{2} = v_0 = 9.0\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{20}$$

c) Essendo trascurabile l'attrito volvente l'unica forza di attrito in grado di dissipare energia è la forza di attrito dinamico che è presente solo per $0 \leq t < t_1$. Di conseguenza, applicando la conservazione dell'energia possiamo ricavare l'energia dissipata dalla forza di attrito dinamico come differenza dell'energia totale iniziale del cilindro e l'energia totale a $t = t_1$ (o equivalentemente l'energia totale del cilindro a qualsiasi instante $t > t_1$ visto che non essendoci attrito volvente l'energia totale del cilindro resta costante per $t > t_1$). Tenendo conto, inoltre, che il cilindro si muove su una superficie orizzontale l'energia potenziale della forza peso non varia e quindi possiamo limitarci a considerare la sola energia cinetica. Se pertanto indichiamo con ΔE_a l'energia dissipata dalla forza di attrito dinamico tra $t = 0$ e $t = t_1$ e con T_0 e T_1 rispettivamente l'energia cinetica del cilindro a $t = 0$ e a $t = t_1$ possiamo scrivere: $\Delta E_a = T_0 - T_1$. Applicando il teorema di König possiamo scrivere l'energia cinetica del cilindro come:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \tag{21}$$

Da cui si ricava:

$$\Delta E_a = T_0 - T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_c^2(t_1) - \frac{1}{2}I_C\omega^2(t_1) = \frac{1}{6}mv_0^2 = 40.5\mathrm{J} \tag{22}$$

Esercizio 3

a) Indichiamo con m_{Cu}, C_{Cu} e T_{Cu} rispettivamente la massa, il calore specifico e la temperatura iniziale del blocco di rame e con m_{Pb}, C_{Pb} e T_{Pb} le corrispondenti quantità relative al blocco di piombo. Poiché $T_{Cu} > T_{Pb}$, una volta che i due blocchi sono messi nella condizione di scambiare calore vicendevolmente, ci sarà un passaggio di calore dal blocco di rame (che quindi si raffredderà) al blocco di piombo (che quindi si riscalderà). La temperatura di equilibrio T_e raggiunta dal sistema formato dai due blocchi è quella per cui il calore ceduto dal blocco di rame (Q_{Cu}) risulta pari al calore assorbito dal blocco di piombo (Q_{Pb}) ossia $Q_{Cu} = Q_{Pb}$. Scrivendo esplicitamente l'espressione di Q_{Cu} e Q_{Pb} otteniamo la condizione di equilibrio:

$$m_{Cu}C_{Cu}(T_{Cu} - T_e) = m_{Pb}C_{Pb}(T_e - T_{Pb}) \tag{23}$$

da cui si ricava:

$$T_e = \frac{m_{Cu}C_{Cu}T_{Cu} + m_{Pb}C_{Pb}T_{Pb}}{m_{Cu}C_{Cu} + m_{Pb}C_{Pb}} \approx 320.1\mathrm{K} \tag{24}$$

b) Il sistema formato dai due blocchi non può scambiare calore con l'esterno in quanto i due blocchi sono contenuti in un recipiente isolante. Non sussiste, inoltre, lavoro compiuto dall'esterno sui blocchi nè lavoro compiuto dai blocchi sull'ambiente esterno. Di conseguenza, per il primo principio della termodinamica la variazione di energia interna nella trasformazione che porta il sistema dalla condizione iniziale a quella di equilibrio è nulla ossia $\Delta U = 0$.

c) La variazione di entropia del sistema formato dai due blocchi (ΔS) è pari alla somma della variazione di entropia dei blocchi di rame (ΔS_{Cu}) e di piombo (ΔS_{Pb}). Per calcolare ΔS_{Cu} basta valutare l'integrale di Clausius su una qualsiasi trasformazione reversibile che porta il blocco di rame dalla temperatura T_{Cu} alla temperatura T_e. Analogamente per il blocco di piombo basta considerare una qualsiasi trasformazione reversibile dalla temperatura T_{Pb} alla temperatura T_e:

$$\begin{aligned}\Delta S = \Delta S_{Cu} + \Delta S_{Pb} &= \int_{T_{Cu}}^{T_e} \frac{\delta Q_{Cu}}{T} + \int_{T_{Pb}}^{T_e} \frac{\delta Q_{Pb}}{T} = \\ &= m_{Cu}C_{Cu}\int_{T_{Cu}}^{T_e}\frac{dT}{T} + m_{Pb}C_{Pb}\int_{T_{Pb}}^{T_e}\frac{dT}{T} = m_{Cu}C_{Cu}\ln\frac{T_e}{T_{Cu}} + m_{Pb}C_{Pb}\ln\frac{T_e}{T_{Pb}} \approx 1.73\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\end{aligned} \tag{25}$$

Esercizio 4

Il ciclo è formato da una trasformazione isocora ($A \rightarrow B$) seguito da una espansione adiabatica ($B \rightarrow C$) e da una compressione isobara ($C \rightarrow A$). Calcoliamo innanzitutto le variabili P, V e T in corrispondenza degli stati A, B e C.

Per quanto riguarda lo stato B sono noti volume e pressione. Possiamo quindi calcolare la temperatura applicando la legge di stato dei gas perfetti:

$$T_B = \frac{P_BV_B}{nR} \tag{26}$$

Per quanto riguarda lo stato C è noto il suo volume. Tenendo conto che la traformazione BC è adiabiatica possiamo ricavare la pressione P_C e poi applicando di nuovo la legge di stato dei gas perfetti calcolare T_C ottenendo:

$$\begin{cases} P_C = P_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma} = \frac{P_B}{8^{\gamma}} \\ T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 8^{1-\gamma}\frac{P_B V_B}{nR} = 8^{1-\gamma} T_B \end{cases} \tag{27}$$

Infine per quanto riguarda lo stato A avremo:

$$\begin{cases} V_A = V_B \\ P_A = P_C = \frac{P_B}{8^{\gamma}} \\ T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 8^{-\gamma}\frac{P_B V_B}{nR} = 8^{-\gamma} T_B \end{cases} \tag{28}$$

A questo punto siamo in grado di calcolare le quantità di calore scambiate e il lavoro in ognuna delle trasformazioni del ciclo.

Essendo la trasformazione $A \to B$ isocora il lavoro è nullo ($L_{AB} = 0$) mentre la quantità di calore scambiata è data da:

$$Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = nc_V T_B \left(\frac{8^{\gamma} - 1}{8^{\gamma}}\right) = \frac{3}{2}\frac{8^{\gamma} - 1}{8^{\gamma}} P_B V_B \tag{29}$$

dove si è tenuto conto del fatto che per un gas monoatomico $c_V = 3R/2$.

Nella trasformazione adiabatica $B \to C$ la quantità di calore scambiato è nulla ($Q_{BC} = 0$). Di conseguenza, il lavoro nella trasformazione coincide con l'inverso della variazione di energia interna (primo principio della termodinamica):

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = nc_V(T_B - T_C) = nc_V T_B \left(\frac{8^{\gamma} - 8}{8^{\gamma}}\right) = \frac{3}{2}\frac{8^{\gamma} - 8}{8^{\gamma}} P_B V_B \tag{30}$$

Infine nella trasformazione isobara $C \to A$ il calore scambiato e il lavoro sono dati da:

$$\begin{cases} Q_{CA} = nc_P(T_A - T_C) = -nc_P T_B \frac{7}{8^{\gamma}} = -\frac{35}{2}\frac{1}{8^{\gamma}} P_B V_B \\ L_{CA} = P_C(V_A - V_C) = -\frac{7}{8^{\gamma}} P_B V_B \end{cases} \tag{31}$$

a) Il calore ceduto dal gas all'ambiente esterno è quello scambiato durante la compressione isobara (trasformazione $C \to A$) in quanto nella trasformazione $B \to C$ non vi è scambio di calore mentre nella trasformazione $A \to B$ il gas si riscalda e quindi assorbe calore dall'esterno. Possiamo pertanto dire che il calore Q_{ced} ceduto dal gas all'ambiente esterno è:

$$Q_{ced} = |Q_{CA}| = \frac{35}{2}\frac{1}{8^{\gamma}} P_B V_B \approx 546.9\text{J} \tag{32}$$

b) Il calore assorbito dal gas Q_{ass} dall'ambiente esterno è quello scambiato durante la trasformazione isocora:

$$Q_{ass} = Q_{AB} = \frac{3}{2}\frac{8^{\gamma} - 1}{8^{\gamma}} P_B V_B \approx 1453.1\text{J} \tag{33}$$

c) Il lavoro L_t effettuato dal gas può essere calcolato in due modalità equivalenti. La prima è quella di sommare il lavoro relativo ad ogni trasformazione del ciclo:

$$L_t = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = \frac{3}{2}\frac{8^{\gamma} - 8}{8^{\gamma}} P_B V_B - \frac{7}{8^{\gamma}} P_B V_B = \left[\frac{3}{2}(8^{\gamma} - 8) - 7\right]\frac{P_B V_B}{8^{\gamma}} \tag{34}$$

La seconda è quella di applicare il primo principio della termodinamica all'intero ciclo. In tal caso la variazione di energia interna del gas è nulla e, quindi, il lavoro totale effettuato dal gas è pari al calore totale scambiato nel ciclo:

$$L_t = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = \frac{3}{2}\frac{8^\gamma - 1}{8^\gamma} P_B V_B - \frac{35}{2}\frac{1}{8^\gamma} P_B V_B = \left[\frac{3}{2}(8^\gamma - 8) - 7\right] \frac{P_B V_B}{8^\gamma} \tag{35}$$

Sostituendo i valori si ottiene $L_t \approx 906.3$J.

d) Il rendimento del ciclo è definito come il rapporto tra il lavoro totale compiuto dal gas (L_t) e il calore totale assorbito (Q_{AB}):

$$\eta = \frac{L_t}{Q_{AB}} = 1 - \frac{35}{3(8^\gamma - 1)} \approx 0.62 \tag{36}$$