Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
27 giugno 2022

Esercizio 1

a) e b) Poiché i due corpi sono uniti da un filo inestendibile (che assumiamo sempre in tensione durante il moto) è chiaro che essi saranno caratterizzati dalla stessa accelerazione $\vec{a}$. Supponiamo di considerare positiva la direzione in cui i corpi traslano verso destra. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\alpha - \mu_1^d m_1 g \cos\alpha + \tau = m_1 a \\ m_2 g \sin\beta - \mu_2^d m_2 g \cos\beta - \tau = m_2 a \end{cases} \tag{1}$$

Risolvendo tale sistema nelle due incognite a e τ otteniamo:

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_2(\sin\beta - \mu_2^d \cos\beta) - m_1(\sin\alpha + \mu_1^d \cos\alpha)}{m_1 + m_1} g \approx 0.75 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ \tau = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \left(\sin\alpha + \sin\beta + \mu_1^d \cos\alpha - \mu_2^d \cos\beta\right) \approx 1.15\mathrm{N} \end{cases} \tag{2}$$

Il valore positivo trovato per a indica che i corpi si muovono nella direzione che è stata assunta come positiva (ossia verso destra).

c) Per determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico che assicura l'equilibrio basta considerare l'espressione trovata per l'accelerazione, sostituire in essa essa $\mu^s = \mu_1^d = \mu_2^d$ e imporre $a = 0$ (condizione di equilibrio). Procedendo in tal modo e risolvendo per μ^s si ottiene:

$$\mu^s = \frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha}{m_2 \cos\beta + m_1 \cos\alpha} \approx 0.12 \tag{3}$$

Esercizio 2

a) Fissiamo un sistema di riferimento con asse x lungo la direzione del piano inclinato e diretto verso il basso, asse y perpendicolare alla direzione del piano inclinato e rivolto verso l'alto e asse z perpendicolare al piano del foglio ed entrante. Sul cilindo agiscono la forza peso ($m\vec{g}$) verticale e diretta verso il basso, la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dal piano inclinato (ortogonale alla superficie dello stesso) e la forza di attrito statico $\vec{F}_A$ che si sviluppa nel punto di contatto tra piano inclinato e cilindro. La prima equazione cardinale della dinamica è pertanto:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N} = m\vec{a}_c \tag{4}$$

dove $\vec{a}_c$ rappresenta l'accelerazione del centro di massa del cilindro. Proiettando tale equazione nel sistema di riferimento indicato e tenendo conto che in esso il centro di massa si muove unicamente lungo la direzione individuata dall'asse x si ottiene:

$$\begin{cases} F_A = mg\sin\alpha - ma_c \\ N = mg\cos\alpha \end{cases} \tag{5}$$

La seconda equazione cardinale della dinamica considerando come polo per il calcolo dei momenti il punto P di contatto tra cilindro e piano inclinato (asse istantaneo di rotazione) è:

$$\vec{M}_P = \frac{d\vec{L}_P}{dt} \tag{6}$$

Al momento $\vec{M}_P$ contribuisce la sola forza peso: $\vec{M}_P = \vec{r} \times m\vec{g} = mgr\sin\alpha\hat{k}$. Dove con r si è indicato il raggio del cilindro e con $\hat{k}$ il versore dell'asse z. Il momento angolare si scrive come $\vec{L}_P = I_p\vec{\omega}$ dove $I_p = 3mr^2/2$ è il momento di inerzia rispetto ad una asse passante per il punto P e $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare. Poiché il cilindro, scendendo dal piano inclinato ruota in senso orario si ha $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$. Pertanto, nel sistema di riferimento scelto, la (6) diventa:

$$rmg\sin\alpha = -I_p\dot{\omega} \tag{7}$$

Ricordando la condizione di rotolamento $\dot{\omega} = -a_c/r$ si ottiene (il segno meno è dovuto al fatto che il cilindro ruota in senso orario):

$$a_c = \frac{r^2 g\sin\alpha}{I_p} \tag{8}$$

Sostituendo tale relazione nella prima delle (5) otteniamo la seguente espressione per F_A:

$$F_A = mg\sin\alpha\left(1 - \frac{mr^2}{I_p}\right) \tag{9}$$

Poiché per la forza di attrito statico deve essere valida la condizione $F_A \leq \mu_S N = \mu_S mg\cos\alpha$ otteniamo la condizione affinché il cilindro rotoli senza strisciare:

$$\tan\alpha \leq 3\mu_s \tag{10}$$

Sostituendo i valori forniti per α e μ_S si vede facilmente che tale condizione non è verificata e, pertanto, il cilindro nel muoversi lungo il piano inclinato deve necessariamente strisciare.

b) In presenza della forza $\vec{F}$ la prima e seconda equazione cardinale della dinamica si modificano come segue:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_A - F = ma_c \\ N = mg\cos\alpha \\ rmg\sin\alpha - rF = -I_p\dot{\omega} = I_p\dfrac{a_c}{r} \end{cases} \tag{11}$$

Sostituendo l'espressione per a_c data dalla terza nella prima equazione si ottiene la seguente espressione per F_A:

$$F_A = \left(1 - \frac{mr^2}{I_p}\right)(mg \sin\alpha - F) \tag{12}$$

Imponendo la condizione $F_A \leq \mu_S N = \mu_S mg \cos\alpha$ si ottiene la seguente condizione sulla forza F:

$$F \geq mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_s \cos\alpha}{1 - mr^2/I_p}\right) = mg \sin\alpha - 3\mu_s \cos\alpha \approx 2.77\text{N} \tag{13}$$

Poiché si richiede che il cilindro debba scendere lungo il piano inclinato deve anche risultare $a_c > 0$ da cui si ricava:

$$F < mg \sin\alpha \approx 6.94\text{N} \tag{14}$$

Pertanto, i valori di F per cui il cilindro scende lungo piano inclinato rotolando senza strisciare sono $2.77\text{N} \leq F < 6.94\text{N}$.

c) Indicando con E_A ed E_B l'energia meccanica totale del cilindro nelle posizioni A e B rispettivamente e con L_F il lavoro eseguito dalla forza $\vec{F}$ durante il moto del cilindro da A a B, dal teorema delle forze vive ricaviamo:

$$L_F = E_B - E_A = (T_B - T_A) + (U_B - U_A) \tag{15}$$

Poiché il cilidro inizialmente è fermo $T_A = 0$. Per calcolare l'energia cinetica del cilindro in corrispondenza della posizione B basta applicare il teorema di König:

$$T_B = \frac{1}{2}mu_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_c}{r^2}\right)u_c^2 \tag{16}$$

Dove si è utilizzata la condizione di rotolamento e $I_c = mr^2/2$ rappresenta il momento di inerzia del cilindro rispetto ad una asse passante per il suo centro di massa. La differenza di enegia potenziale è data da $U_B - U_A = mgh$ dove h rappresenta la differenza in quota tra le posizioni occupate dal centro di massa del cilindro in corrispondenza delle posizioni A e B (data da $h = d \sin\alpha$). Infine, il lavoro L_F è dato da $L_F = -Fd$ essendo la forza $\vec{F}$ parallela allo spostamento e opposta alla direzione del moto. Sostituendo le varie quantità nella (15) e risolvendo per u_c otteniamo:

$$u_c = \sqrt{\frac{2d(mg \sin\alpha - F)}{m + I_c/r^2}} = \sqrt{\frac{4d(mg \sin\alpha - F)}{3m}} \approx 1.61\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{17}$$

Esercizio 3

a) Indicando con A l'estremità inferiore del tubo e B quella superiore, applicando l'equazione di Bernoulli possiamo scrivere:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B \tag{18}$$

da cui si ricava:

$$\Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) + \rho g(h_B - h_A) \tag{19}$$

Poiché si assume l'acqua incompressibile, la portata è costante e quindi possiamo ricavare v_B dalla relazione $v_B S_B = v_A S_A$ dove S_A ed S_B rappresentano le sezioni del tubo nei punti A e B. Da cui:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\frac{r_A^4 - r_B^4}{r_B^4}\rho v_A^2 + \rho g \Delta h \approx 19050\mathrm{Pa} \tag{20}$$

b) La potenza esercitata dalla pompa si calcola applicando la definizione di potenza:

$$W = \frac{dL}{dt} = g\Delta h\frac{dm}{dt} = \rho g \Delta h \frac{dV}{dt} = \rho g \Delta h v_A S_A = \rho g \Delta h v_A \pi r_A^2 \approx 123\mathrm{W} \tag{21}$$

Esercizio 4 Poiché sono noti P_A e T_A è possibile calcolare V_A utilizzando la legge dei gas perfetti:

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} \tag{22}$$

Per quanto riguarda la stato B è nota P_B, ma essendo la trasformazione $A \to B$ isoterma, abbiamo $T_B = T_A$. Possiamo quindi calcolare V_B applicando di nuovo la legge dei gas perfetti:

$$V_B = \frac{nRT_B}{P_B} = \frac{nRT_A}{P_B} \tag{23}$$

Dello stato C conosciamo il volume $V_C = V_A$ (in quanto $C \to A$ è isocora) e la pressione $P_C = P_B$ (in quanto $B \to C$ è isobara). Di conseguenza, possiamo calcolare T_C:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_B V_A}{nR} = \frac{P_B}{P_A} T_A \tag{24}$$

A questo punto siamo in grado di calcolare il calore scambiato nelle varie fasi del ciclo.

Essendo la trasformazione $A \to B$ isoterma, dal primo principio della termodinamica si ricava che $L_{AB} = Q_{AB}$:

$$Q_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} PdV = \int_{V_A}^{V_B} nRT_A \frac{dV}{V} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln \frac{P_A}{P_B} \approx 4.132\text{Kcal} \tag{25}$$

Poiché $Q_{AB} > 0$ esso viene ceduto dall'ambiente esterno al gas (come deve essere in una espansione isoterma).

La trasformazione $B \to C$ è isobara e quindi il calore scambiato si ricava direttamente dalla formula:

$$Q_{BC} = nC_P(T_C - T_B) = nC_P \frac{P_B - P_A}{P_A} T_A \approx -7.453\text{Kcal} \tag{26}$$

In questo caso $Q_{BC} < 0$ (calore ceduto dal gas all'ambiente esterno) in quanto il gas si raffredda ($T_C < T_B$) mentre viene compresso a pressione costante.

Infine, la trasformazione $C \to A$ è isocora e quindi il calore scambiato è dato da:

$$Q_{CA} = nC_V(T_A - T_C) = n(C_P - R) \frac{P_A - P_B}{P_A} T_A \approx 4.473\text{Kcal} \tag{27}$$

Il calore è ceduto dall'ambiente esterno al gas (il gas, infatti, viene riscaldato a volume costante). Il lavoro totale prodotto dal ciclo è pari al calore totale scambiato (essendo in ogni ciclo $\Delta U = 0$):

$$L = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} \approx 4.818\text{KJ} \tag{28}$$

Il lavoro è positivo e quindi viene effettuato dal gas.