Prima Prova Intercorso Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
14 dicembre 2023

Esercizio 1

a) Il modulo della velocità $\vec{v}_B$ con cui il corpo lascia la guida semicircolare può essere calcolato applicando la legge di conservazione dell'energia. In particolare, poiché è presente attrito tra il corpo e il piano orizzontale, nello scrivere il bilancio energetico bisogna tener conto del lavoro L effettuato dalla forza d'attrito (non conservativa). Se pertanto, indichiamo con E_A ed E_B rispettivamente l'energia meccanica del corpo quando esso si trova in A e B avremo:

$$E_A + L = E_B \qquad \rightarrow \qquad T_A + U_A + L = T_B + U_B \tag{1}$$

dove T_A, T_B, U_A e U_B indicano le energie cinetiche e potenziali del corpo di massa m nei punti A e B. Poiché inizialmente il corpo è fermo si ha $T_A = 0$. Se, inoltre, supponiamo che il punto A si trovi a quota nulla anche l'energia potenziale gravitazione del corpo in A è nulla. U_A quindi si riduce alla sola energia potenziale elastica ($U_A = (1/2)k\delta^2$). Il lavoro L può essere facilmente calcolato considerado che la forza di attrito dinamico è sempre orizzontale e di modulo pari a $\mu_d mg$. Di conseguenza, assumendo come origine la posizione A:

$$L = -\int_{-\delta}^{l} \mu_d mg dx = -\mu_d mg(l + \delta) \tag{2}$$

Infine, nel punto B il corpo possiede un'energia cinetica $T_B = (1/2)mv_B^2$ e un'energia potenziale unicamente gravitazionale ($U_B = 2mgr$). Sostituendo le espressioni trovate nella (1), dopo semplici calcoli si ottiene:

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}\delta^2 - 2g\left[2r + \mu_d(l + \delta)\right]} \tag{3}$$

Una volta che il corpo ha lasciato la guida semicircolare in B è soggetto unicamente alla forza peso. Il suo moto è, pertanto, descritto dal moto del proiettile in cui la velocità iniziale è orizzontale con modulo dato dalla (3). In un sistema di riferimento con origine nel punto A e con asse y verticale e diretto verso l'alto e asse x orizzontale e diretto verso destra la legge oraria del corpo è:

$$x(t) = -v_B t + l \tag{4}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2r \tag{5}$$

Detto τ il tempo che impiega il corpo per raggiungere il suolo (a partire da quando occupa la posizione B), le condizioni che assicurano che il punto di impatto sia in A (ossia nell'origine del sistema di riferimento scelto) sono $x(\tau) = y(\tau) = 0$ da cui tenendo conto della (4) e della (3) si ricava facilmente la condizione richiesta su δ:

$$v_B^2 = \frac{gl^2}{4r} \qquad 4rk\delta^2 - 8rmg\mu_D\delta - mg(16r^2 + 8\mu_D rl + l^2) = 0 \tag{6}$$

la cui soluzione positiva è:

$$\delta = \frac{mg}{k}\mu_D\left[1 + \sqrt{1 + \frac{k}{mg}\left(\frac{4r}{\mu_D^2} + \frac{2l}{\mu_D} + \frac{l^2}{4r\mu_D^2}\right)}\right] \approx 27.5\text{cm} \tag{7}$$

b) La velocità minima che il corpo deve avere in B affinché non perda contatto con la guida semicircolare è quella che consente l'equilibrio tra forza peso (mg) e forza centrifuga (mv_B^2/r). Si ricava quindi facilmente che $v_B^2 = rg$. Sostituendo tale valore nella (3) si ottiene la condizione richiesta per δ_{min}:

$$\delta_{min} = \frac{mg}{k}\mu_D\left[1+\sqrt{1+\frac{k}{mg\mu_D}\left(\frac{5r}{\mu_D}+2l\right)}\right] \approx 20.8\text{cm} \tag{8}$$

c) Per calcolare la distanza d richiesta consideriamo di nuovo il sistema di riferimento scelto in precedenza per descrivere il moto del corpo una volta lasciata la guida semicircolare. Dalle equazioni del moto (4) in cui $v_B^2 = rg$ si ricava facilmente:

$$d = l - 2r = 3\text{m} \tag{9}$$

d) Il modulo della velocità richiesta si può calcolare equivalentemente dalle equazioni del moto del proiettile oppure applicando la legge di conservazione dell'energia. Utilizzando le equazioni del moto basta considerare che mentre il corpo ricade al suolo la componente orizzontale della sua velocità non varia e quindi resta pari a v_B. La componente verticale invece è data da $-gt$. In corrispondenza del tempo $\tau = (4r/g)^{0.5}$ che il corpo impiega per arrivare al suolo avremo:

$$v = \sqrt{v_B^2 + g^2\tau^2} = \sqrt{5gr} \approx 7.0\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{10}$$

Equivalentemente, applicando la conservazione dell'energia tra posizione iniziale (A) e posizione finale si ha:

$$\frac{1}{2}k\delta_{min}^2 + L = \frac{1}{2}mv^2 \tag{11}$$

da cui tenendo conto della (2) e della (8) si ottiene lo stesso valore di v espresso dalla (10).

Esercizio 2

a) Consideriamo la direzione individuata dal filo che collega le varie masse e assumiamo come positivo il verso da m_1 ad m. Le masse m_1 ed m sono sospese in verticale e pertanto su di esse agisce la forza peso e la tensione dei fili. Sulle masse m_2 ed m_3, invece oltre alla forza peso e alla tensione dei fili agisce anche la forza di attrito statico che può essere positiva o negativa a seconda se il sistema di masse tende a muoversi in maniera concorde o opposta al verso di percorrenza scelto (in particolare, se le masse tendono a muoversi lungo il verso di percorrenza scelto allora le forze di attrito statico sono negative in coso contrario sono positive). Proiettando le varie forze descritte lungo la direzione individuata dai fili, le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} -m_1 g + \tau_1 = 0 \\ -\tau_1 + \tau_2 \pm \mu_s m_2 g = 0 \\ -\tau_2 + \tau_3 + m_3 g\sin\alpha \pm \mu_s m_3 g\cos\alpha = 0 \\ -\tau_3 + mg = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Risolvendo il sistema (12) nelle incognite τ_1, τ_2, τ_3 ed m si ottiene:

$$\begin{cases} \tau_1 = m_1 g \\ \tau_2 = (m_1 \mp \mu_s m_2)g \\ \tau_3 = [m_1 - m_3\sin\alpha \mp (m_2 + m_3\cos\alpha)\mu_s]g \\ m = m_1 - m_3\sin\alpha \mp (m_2 + m_3\cos\alpha)\mu_s \end{cases} \tag{13}$$

Dall'ultima delle (13) si ricava facilmente che affinché vi sia equilibrio deve essere $m_{min} \leq m \leq m_{max}$ dove:

$$\begin{cases} m_{min} = m_1 - m_3 \sin\alpha - (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_s \approx 2.1\text{kg} \\ m_{max} = m_1 - m_3 \sin\alpha + (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_s \approx 5.9\text{kg} \end{cases} \tag{14}$$

b) Per ricavare l'accelerazione a delle quattro masse occorre scrivere la seconda legge della dinamica per ognuna di esse tenendo conto che essendo i fili inestensibili l'accelerazione deve essere la stessa per tutte e quattro le masse. Poiché $m > m_{max}$ il sistema non è in equilibrio e le masse si muovono nel verso che va da m_1 ad m (ossia m scende verso il basso). Le equazioni del moto pertanto si scrivono come:

$$\begin{cases} - m_1 g + \tau_1 = m_1 a \\ - \tau_1 + \tau_2 - \mu_d m_2 g = m_2 a \\ - \tau_2 + \tau_3 + m_3 g \sin\alpha - \mu_d m_3 g \cos\alpha = m_3 a \\ - \tau_3 + mg = ma \end{cases} \tag{15}$$

Risolvendo nelle incognite τ_1, τ_2, τ_3 ed a si ottiene:

$$\begin{cases} \tau_1 = m_1(g + a) \\ \tau_2 = m_1(g + a) + m_2(a + \mu_d g) \\ \tau_3 = m_1(g + a) + m_2(a + \mu_d g) + m_3(a + \mu_d g \cos\alpha - g \sin\alpha) \\ a = \dfrac{m - m_1 + m_3 \sin\alpha - (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_d}{m + m_1 + m_2 + m_3} g \approx 1.66 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases} \tag{16}$$

c) Se indichiamo con L il lavoro effettuato dalle forze d'attrito e con E_i ed E_f rispettivamente l'energia totale meccanica iniziale (quando le 4 masse sono ferme e la massa m si trova ad un'altezza h dal suolo) e finale (quando le 4 masse sono in moto con la stessa velocità v e la massa m si trova al suolo) la conservazione dell'energia si scrive come:

$$E_i + L = E_f \qquad \rightarrow \qquad T_i + U_i + L = T_f + U_f \qquad \rightarrow \qquad T_f = U_i - U_f + L \tag{17}$$

dove con T ed U si è indicato rispettivamente l'energia cinetica a potenziale (gravitazionale) delle 4 masse e si è tenuto conto del fatto che inizialmente il sistema è in quite ($T_i = 0$). La variazione di energia potenziale $U_i - U_f$ è determinata dal moto delle masse m_1, m_3 e m in quanto m_2 si muove orizzontalmente. In particolare m_1 sale di una quantità h, m_3 scende della quantità $h \sin\alpha$ e m scende di h. Di conseguenza:

$$U_i - U_f = (m - m_2 + m_3 \sin\alpha)gh \tag{18}$$

Il lavoro L compiuto dalle forze di attrito è dovuto alle sole masse m_2 ed m_3 che si spostano lungo la superficie del supporto per un tratto pari ad h:

$$L = L_2 + L_3 = -(m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_d gh \tag{19}$$

Sostituendo la (18) e la (19) nella (17) si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{(m - m_2 + m_3 \sin\alpha) - \mu_d(m_2 + m_3 \cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3 + m} 2gh} \approx 2.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{20}$$

Infine, l'energia E_a dissipata dalle forze d'attrito è pari al valore assoluto del lavoro da esse svolto ossia:

$$E_a = |L| = |L_2 + L_3| = (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_d gh \approx 9.3\text{J} \tag{21}$$

Esercizio 3

a) Le forze che agiscono sul rullo sono la forza peso $m\vec{g}$ verticale e applicata nel suo centro di massa, la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dal piano inclinato (ortogonale alla superficie del piano inclinato e da essa uscente) e la forza di attrito statico $\vec{F}_a$ applicata nel punto di contatto tra piano inclinato e rullo parallela al piano inclinato ed opposta alla direzione del moto del rullo. Possiamo quindi scrivere le equazioni cardinali della dinamica come:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a = m\vec{a}_c \\ \vec{M}_P = \dfrac{d\vec{L}_P}{dt} \end{cases} \tag{22}$$

dove $\vec{a}_c$ rappresenta l'accelerazione del centro di massa del rullo e i momenti sono calcolati rispetto al polo P punto di contatto tra piano inclinato e rullo (asse istantaneo di rotazione del rullo). Poichè il moto deve essere di puro rotolamento alle (22) va aggiunta la condizione $\vec{v}_c = -\vec{\omega} \times \vec{r}$ dove $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare che descrive le rotazioni del rullo intorno al suo asse di rotazione. Proiettiamo le (22) in un sistema di riferimento in cui l'asse x è diretto parallelamente alla superficie al piano inclinato (da A verso B), l'asse y è ortogonale alla direzione del piano inclinato e uscente e l'asse z è orgonale al piano xy e uscente:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_a = ma_c \\ N - mg\cos\alpha = 0 \\ -mgr\sin\alpha = -I_P\dfrac{d\omega}{dt} \end{cases} \tag{23}$$

dove I_P è il momento di inerzia del rullo rispetto ad una asse passante per il punto P. Si noti che nel sistema di riferimento scelto le rotazioni del rullo (viste dall'asse z) sono orarie e quindi la proiezione di $\vec{\omega}$ sull'asse z è negativa e l'accelerazione del centro di massa è diretta come l'asse x. La condizione di puro rotolamento nel sistema di riferimento scelto si scrive come $v_c = \omega r$ e quindi $a_c = \dot{\omega} r$. Sostituendo tale condizione nella terza delle (23) si ottiene:

$$a_c = \frac{mr^2}{I_P} g\sin\alpha \tag{24}$$

Sostituendo la (24) nella prima delle (23) possiamo calcolare F_a:

$$F_a = \left(\frac{I_P - mr^2}{I_P}\right) mg\sin\alpha \tag{25}$$

Tenendo conto che la massima forza di attrito statico sviluppabile è pari a $\mu_s N$ e che $N = mg\cos\alpha$ (seconda delle (23)) si ottiene la condizione richiesta sull'angolo α:

$$F_A \leq \mu_s N \qquad \rightarrow \qquad \tan\alpha_{max} = \frac{I_P}{I_P - mr^2}\mu_s \tag{26}$$

Considerando che per un rullo cilindrico omogeneo pieno di massa m e raggio r il momento di inerzia I_P è pari a $3mr^2/2$ si ottiene:

$$\alpha_{max} = \arctan(3\mu_s) \approx 30.96° \tag{27}$$

b) Poiché α è maggiore di α_{max} calcolata precedentemente è chiaro che affinché il rullo rotoli sul piano inclinato occorre applicare una forza $\vec{f}$ rallentante. Aggiungendo tale forza le (23) diventano:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_a - f = ma_c \\ N - mg\cos\alpha = 0 \\ -mgr\sin\alpha + rf = -I_P\dfrac{d\omega}{dt} \end{cases} \tag{28}$$

Da cui procededendo analogamente a quanto fatto precedentemente si ricava:

$$\begin{cases} a_c = \dfrac{mr^2}{I_P} g \sin\alpha - \dfrac{r^2}{I_P} f \\ F_a = \left(\dfrac{I_P - mr^2}{I_P}\right)(mg\sin\alpha - f) \end{cases} \tag{29}$$

Imponendo infine ancora la condizione $F_a \leq \mu_s N$ dopo semplici calcoli si ottiene la seguente condizione su f_{min}:

$$f_{min} = mg\sin\alpha - \frac{I_P}{I_P - mr^2}\mu_s mg\cos\alpha = (\sin\alpha - 3\mu_s\cos\alpha)mg \approx 3.7\text{N} \tag{30}$$

Si noti come $f_{min} = 0$ se $\alpha = \alpha_{max}$ dato dalla (26).

c) Possiamo facilmente ricavare τ a partire dall'accelerazione trovata per il centro di massa del rullo data dalla prima delle (29). Integrando infatti due volte rispetto al tempo si ottiene la legge oraria del centro di massa del rullo (che compie un moto uniformemente accelerato lungo il piano inclinato): $x_c(t) = (1/2)a_c t^2$ (supponendo l'origine del sistema di riferimento nella posizione occupata dal centro di massa del rullo quando questo si trova nella posizione iniziale A). Imponendo che $x_c(\tau) = h/\sin\alpha$ si ottiene:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{a_c\sin\alpha}} \tag{31}$$

Per ottenere a_c sostituiamo la (30) nella prima delle (29):

$$a_c = \frac{mr^2}{I_P - mr^2} g\mu_s\cos\alpha \tag{32}$$

Sostituendo infine la (32) nella (31) otteniamo:

$$\tau = \sqrt{\frac{I_P - mr^2}{mr^2}\frac{2h}{g\mu_s\cos\alpha\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{h}{g\mu_s\cos\alpha\sin\alpha}} \approx 1.46\text{s} \tag{33}$$

Determiniamo infine v_B (velocità centro di massa del rullo in corrispondenza del punto B) considerando che $v_B = a_c\tau$:

$$v_B = \sqrt{\frac{2a_ch}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{mr^2}{I_P - mr^2}\frac{2gh\mu_s}{\tan\alpha}} = \sqrt{\frac{4hg\mu_s}{\tan\alpha}} \approx 4.55\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{34}$$

Si noti che alla stessa espressione si poteva giungere applicando la legge di conservazione dell'energia meccanica:

$$mg(h + r) + L_f = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + mgr \tag{35}$$

dove I_C rappresenta il momento di inerzia del rullo ripetto ad una asse passante per il suo centro di massa ed L_f rappresenta il lavoro effettuato dalla forza $\vec{f}$. Risolvendo per v_B (ricordando la condizione di puro rotolamento ($v_B = \omega r$) e tenendo conto che $L_f = -fh/\sin\alpha$ e $I_C = I_P - mr^2$) è facile verificare che si ottiene la stessa espressione data (34).

d) Le forze che agiscono sul piano inclinato sono la forza peso $M\vec{g}$ verticale rispetto alla superfice orizzontale e diretta verso il basso, la reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dalla superficie orizzontale (anch'essa verticale e diretta verso l'alto), la forza di attrito statico $\vec{F}_s$ orizzontale, le forze $-\vec{N}$ e $-\vec{F}_a$ che in base al terzo principio il rullo esercita sul piano inclinato durante il suo moto da A a B. Di conseguenza la condizione di equilibrio per il piano inclinato si scrive:

$$M\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_s - \vec{N} - \vec{F}_a = \vec{0} \tag{36}$$

Proiettando questa equazione vettoriale nella direzione orizzontale e verticale si ottiene:

$$\begin{cases} -Mg + R - N\cos\alpha_{max} - F_a \sin\alpha_{max} = 0 \\ -N\sin\alpha_{max} + F_a\cos\alpha_{max} + F_s = 0 \end{cases} \tag{37}$$

Poiché deve essere $F_s \leq \mu R$ si ottiene facilmente:

$$\mu \geq \frac{|N\sin\alpha_{max} - F_a\cos\alpha_{max}|}{Mg + N\cos\alpha_{max} + F_a\sin\alpha_{max}} \tag{38}$$

Sostituendo nella (38) le espressione di N e F_a date dalla seconda delle (23) e dalla (25) rispettivamente, dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$\mu \geq \frac{m^2r^2\sin\alpha_{max}\cos\alpha_{max}}{I_P(M+m) - m^2r^2\sin^2\alpha_{max}} \tag{39}$$

Tenendo infine conto della (26) il minimo coefficiente di attrito statico necessario affinché il piano inclinato resti fermo è:

$$\mu_{min} = \frac{m^2r^2\mu_s(I_P - mr^2)}{(M+m)\left[(I_P - mr^2)^2 + I_P^2\mu_s^2\right] - m^2r^2I_P\mu_s^2} = \frac{2m\mu_s}{M(1+9\mu_s^2) + m(1+3\mu_s^2)} \approx 0.12 \tag{40}$$