Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
14 dicembre 2023

Esercizio 1

a) Consideriamo la direzione individuata dal filo che collega le varie masse e assumiamo come positivo il verso da m_1 ad m. Le masse m_1 ed m sono sospese in verticale e pertanto su di esse agisce la forza peso e la tensione dei fili. Sulle masse m_2 ed m_3, invece oltre alla forza peso e alla tensione dei fili agisce anche la forza di attrito statico che può essere positiva o negativa a seconda se il sistema di masse tende a muoversi in maniera concorde o opposta al verso di percorrenza scelto (in particolare, se le masse tendono a muoversi lungo il verso di percorrenza scelto allora le forze di attrito statico sono negative in coso contrario sono positive). Proiettando le varie forze descritte lungo la direzione individuata dai fili, le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} -m_1 g + \tau_1 = 0 \\ -\tau_1 + \tau_2 \pm \mu_s m_2 g = 0 \\ -\tau_2 + \tau_3 + m_3 g \sin\alpha \pm \mu_s m_3 g \cos\alpha = 0 \\ -\tau_3 + mg = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Risolvendo il sistema (1) nelle incognite τ_1, τ_2, τ_3 ed m si ottiene:

$$\begin{cases} \tau_1 = m_1 g \\ \tau_2 = (m_1 \mp \mu_s m_2) g \\ \tau_3 = [m_1 - m_3 \sin\alpha \mp (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_s] g \\ m = m_1 - m_3 \sin\alpha \mp (m_2 + m_3\cos\alpha)\mu_s \end{cases} \tag{2}$$

Dall'ultima delle (2) si ricava facilmente che affinché vi sia equilibrio deve essere $m_{min} \leq m \leq m_{max}$ dove:

$$\begin{cases} m_{min} = m_1 - m_3 \sin\alpha - (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_s \approx 2.1\text{kg} \\ m_{max} = m_1 - m_3 \sin\alpha + (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_s \approx 5.9\text{kg} \end{cases} \tag{3}$$

b) Per ricavare l'accelerazione a delle quattro masse occorre scrivere la seconda legge della dinamica per ognuna di esse tenendo conto che essendo i fili inestensibili l'accelerazione deve essere la stessa per tutte e quattro le masse. Poiché $m > m_{max}$ il sistema non è in equilibrio e le masse si muovono nel verso che va da m_1 ad m (ossia m scende verso il basso). Le equazioni del moto pertanto si scrivono come:

$$\begin{cases} -m_1 g + \tau_1 = m_1 a \\ -\tau_1 + \tau_2 - \mu_d m_2 g = m_2 a \\ -\tau_2 + \tau_3 + m_3 g \sin\alpha - \mu_d m_3 g \cos\alpha = m_3 a \\ -\tau_3 + mg = ma \end{cases} \tag{4}$$

Risolvendo nelle incognite τ_1, τ_2, τ_3 ed a si ottiene:

$$\begin{cases} \tau_1 = m_1(g + a) \\ \tau_2 = m_1(g + a) + m_2(a + \mu_d g) \\ \tau_3 = m_1(g + a) + m_2(a + \mu_d g) + m_3(a + \mu_d g \cos\alpha - g \sin\alpha) \\ a = \dfrac{m - m_1 + m_3 \sin\alpha - (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_d}{m + m_1 + m_2 + m_3} g \approx 1.66 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases} \tag{5}$$

c) Se indichiamo con L il lavoro effettuato dalle forze d'attrito e con E_i ed E_f rispettivamente l'energia totale meccanica iniziale (quando le 4 masse sono ferme e la massa m si trova ad un'altezza h dal suolo) e finale (quando le 4 masse sono in moto con la stessa velocità v e la massa m si trova al suolo) la conservazione dell'energia si scrive come:

$$E_i + L = E_f \qquad \rightarrow \qquad T_i + U_i + L = T_f + U_f \qquad \rightarrow \qquad T_f = U_i - U_f + L \tag{6}$$

dove con T ed U si è indicato rispettivamente l'energia cinetica a potenziale (gravitazionale) delle 4 masse e si è tenuto conto del fatto che inizialmente il sistema è in quite ($T_i = 0$). La variazione di energia potenziale $U_i - U_f$ è determinata dal moto delle masse m_1, m_3 e m in quanto m_2 si muove orizzontalmente. In particolare m_1 sale di una quantità h, m_3 scende della quantità $h \sin\alpha$ e m scende di h. Di conseguenza:

$$U_i - U_f = (m - m_2 + m_3 \sin\alpha)gh \tag{7}$$

Il lavoro L compiuto dalle forze di attrito è dovuto alle sole masse m_2 ed m_3 che si spostano lungo la superficie del supporto per un tratto pari ad h:

$$L = L_2 + L_3 = -(m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_d gh \tag{8}$$

Sostituendo la (7) e la (8) nella (6) si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{(m - m_2 + m_3 \sin\alpha) - \mu_d(m_2 + m_3 \cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3 + m} 2gh} \approx 2.3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{9}$$

Infine, l'energia E_a dissipata dalle forze d'attrito è pari al valore assoluto del lavoro da esse svolto ossia:

$$E_a = |L| = |L_2 + L_3| = (m_2 + m_3 \cos\alpha)\mu_d gh \approx 9.3\mathrm{J} \tag{10}$$

Esercizio 2

a) Le forze che agiscono sul rullo sono la forza peso $m\vec{g}$ verticale e applicata nel suo centro di massa, la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dal piano inclinato (ortogonale alla superficie del piano inclinato e da essa uscente) e la forza di attrito statico $\vec{F}_a$ applicata nel punto di contatto tra piano inclinato e rullo parallela al piano inclinato ed opposta alla direzione del moto del rullo. Possiamo quindi scrivere le equazioni cardinali della dinamica come:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a = m\vec{a}_c \\ \vec{M}_P = \dfrac{d\vec{L}_P}{dt} \end{cases} \tag{11}$$

dove $\vec{a}_c$ rappresenta l'accelerazione del centro di massa del rullo e i momenti sono calcolati rispetto al polo P punto di contatto tra piano inclinato e rullo (asse istantaneo di rotazione del rullo). Poichè il moto deve essere di puro rotolamento alle (11) va aggiunta la condizione $\vec{v}_c = -\vec{\omega} \times \vec{r}$ dove $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare che descrive le rotazioni del rullo intorno al suo asse di rotazione. Proiettiamo le (11) in un sistema di riferimento in cui l'asse x è diretto parallelamente alla superficie al piano inclinato (da A verso B), l'asse y è ortogonale alla direzione del piano inclinato e uscente e l'asse z è orgonale al piano xy e uscente:

$$\begin{cases} mg \sin\alpha - F_a = ma_c \\ N - mg \cos\alpha = 0 \\ -mgr \sin\alpha = -I_P \dfrac{d\omega}{dt} \end{cases} \tag{12}$$

dove I_P è il momento di inerzia del rullo rispetto ad una asse passante per il punto P. Si noti che nel sistema di riferimento scelto le rotazioni del rullo (viste dall'asse z) sono orarie e quindi la proiezione di $\vec{\omega}$ sull'asse z è negativa e l'accelerazione del centro di massa è diretta come l'asse x. La condizione di puro rotolamento nel sistema di riferimento scelto si scrive come $v_c = \omega r$ e quindi $a_c = \dot{\omega} r$. Sostituendo tale condizione nella terza delle (12) si ottiene:

$$a_c = \frac{mr^2}{I_P} g \sin\alpha \tag{13}$$

Sostituendo la (13) nella prima delle (12) possiamo calcolare F_a:

$$F_a = \left(\frac{I_P - mr^2}{I_P} \right) mg \sin\alpha \tag{14}$$

Tenendo conto che la massima forza di attrito statico sviluppabile è pari a $\mu_s N$ e che $N = mg\cos\alpha$ (seconda delle (12)) si ottiene la condizione richiesta sull'angolo α:

$$F_A \le \mu_s N \qquad \to \qquad \tan\alpha_{max} = \frac{I_P}{I_P - mr^2} \mu_s \tag{15}$$

Considerando che per un rullo cilindrico omogeneo pieno di massa m e raggio r il momento di inerzia I_P è pari a $3mr^2/2$ si ottiene:

$$\alpha_{max} = \arctan(3\mu_s) \approx 30.96^\circ \tag{16}$$

b) Poiché α è maggiore di α_{max} calcolata precedentemente è chiaro che affinché il rullo rotoli sul piano inclinato occorre applicare una forza $\vec{f}$ rallentante. Aggiungendo tale forza le (12) diventano:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_a - f = ma_c \\ N - mg\cos\alpha = 0 \\ -mgr\sin\alpha + rf = -I_P \dfrac{d\omega}{dt} \end{cases} \tag{17}$$

Da cui procededendo analogamente a quanto fatto precedentemente si ricava:

$$\begin{cases} a_c = \dfrac{mr^2}{I_P} g \sin\alpha - \dfrac{r^2}{I_P} f \\ F_a = \left(\dfrac{I_P - mr^2}{I_P} \right) (mg\sin\alpha - f) \end{cases} \tag{18}$$

Imponendo infine ancora la condizione $F_a \le \mu_s N$ dopo semplici calcoli si ottiene la seguente condizione su f_{min}:

$$f_{min} = mg\sin\alpha - \frac{I_P}{I_P - mr^2} \mu_s mg\cos\alpha = (\sin\alpha - 3\mu_s\cos\alpha)mg \approx 3.7\text{N} \tag{19}$$

Si noti come $f_{min} = 0$ se $\alpha = \alpha_{max}$ dato dalla (15).

c) Possiamo facilmente ricavare τ a partire dall'accelerazione trovata per il centro di massa del rullo data dalla prima delle (18). Integrando infatti due volte rispetto al tempo si ottiene la legge oraria del centro di massa del rullo (che compie un moto uniformemente accelerato lungo il piano inclinato): $x_c(t) = (1/2)a_c t^2$ (supponendo l'origine del sistema di riferimento nella posizione occupata dal centro di massa del rullo quando questo si trova nella posizione iniziale A). Imponendo che $x_c(\tau) = h/\sin\alpha$ si ottiene:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{a_c \sin\alpha}} \tag{20}$$

Per ottenere a_c sostituiamo la (19) nella prima delle (18):

$$a_c = \frac{mr^2}{I_P - mr^2} g\mu_s \cos\alpha \tag{21}$$

Sostituendo infine la (21) nella (20) otteniamo:

$$\tau = \sqrt{\frac{I_P - mr^2}{mr^2} \frac{2h}{g\mu_s \cos\alpha \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{h}{g\mu_s \cos\alpha \sin\alpha}} \approx 1.46\text{s} \tag{22}$$

Determiniamo infine v_B (velocità centro di massa del rullo in corrispondenza del punto B) considerando che $v_B = a_c\tau$:

$$v_B = \sqrt{\frac{2a_c h}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{mr^2}{I_P - mr^2} \frac{2gh\mu_s}{\tan\alpha}} = \sqrt{\frac{4hg\mu_s}{\tan\alpha}} \approx 4.55\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{23}$$

Si noti che alla stessa espressione si poteva giungere applicando la legge di conservazione dell'energia meccanica:

$$mg(h + r) + L_f = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + mgr \tag{24}$$

dove I_C rappresenta il momento di inerzia del rullo ripetto ad una asse passante per il suo centro di massa ed L_f rappresenta il lavoro effettuato dalla forza $\vec{f}$. Risolvendo per v_B (ricordando la condizione di puro rotolamento ($v_B = \omega r$) e tenendo conto che $L_f = -fh/\sin\alpha$ e $I_C = I_P - mr^2$) è facile verificare che si ottiene la stessa espressione data (23).

d) Le forze che agiscono sul piano inclinato sono la forza peso $M\vec{g}$ verticale rispetto alla superfice orizzontale e diretta verso il basso, la reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dalla superficie orizzontale (anch'essa verticale e diretta verso l'alto), la forza di attrito statico $\vec{F}_s$ orizzontale, le forze $-\vec{N}$ e $-\vec{F}_a$ che in base al terzo principio il rullo esercita sul piano inclinato durante il suo moto da A a B. Di conseguenza la condizione di equilibrio per il piano inclinato si scrive:

$$M\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_s - \vec{N} - \vec{F}_a = \vec{0} \tag{25}$$

Proiettando questa equazione vettoriale nella direzione orizzontale e verticale si ottiene:

$$\begin{cases} -Mg + R - N\cos\alpha_{max} - F_a \sin\alpha_{max} = 0 \\ -N\sin\alpha_{max} + F_a\cos\alpha_{max} + F_s = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Poiché deve essere $F_s \leq \mu R$ si ottiene facilmente:

$$\mu \geq \frac{|N\sin\alpha_{max} - F_a\cos\alpha_{max}|}{Mg + N\cos\alpha_{max} + F_a\sin\alpha_{max}} \tag{27}$$

Sostituendo nella (27) le espressione di N e F_a date dalla seconda delle (12) e dalla (14) rispettivamente, dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$\mu \geq \frac{m^2r^2 \sin\alpha_{max}\cos\alpha_{max}}{I_P(M + m) - m^2r^2\sin^2\alpha_{max}} \tag{28}$$

Tenendo infine conto della (15) il minimo coefficiente di attrito statico necessario affinché il piano inclinato resti fermo è:

$$\mu_{min} = \frac{m^2r^2\mu_s(I_P - mr^2)}{(M + m)\left[(I_P - mr^2)^2 + I_P^2\mu_s^2\right] - m^2r^2I_P\mu_s^2} = \frac{2m\mu_s}{M(1 + 9\mu_s^2) + m(1 + 3\mu_s^2)} \approx 0.12 \tag{29}$$

Esercizio 3

Per risolvere l'esercizio utilizziamo la costanza della portata dell'acqua nel tubo e l'equazione di Bernulli. In particolare, dalla costanza della portata risulta:

$$v_0 S_0 = v_1 S_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \left(\frac{d_0}{d_1}\right)^2 v_0 = 1.18 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{30}$$

Dall'equazione di Bernulli, invece si ricava:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h_0 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 \tag{31}$$

Tendo conto che $\Delta h = h_1 - h_0 = 5\mathrm{m}$ si ha:

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v_1^2) - \rho g \Delta h = P_0 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d_1^4 - d_0^4}{d_1^4}\right) v_0^2 - \rho g \Delta h \approx 2.51\mathrm{atm} \tag{32}$$

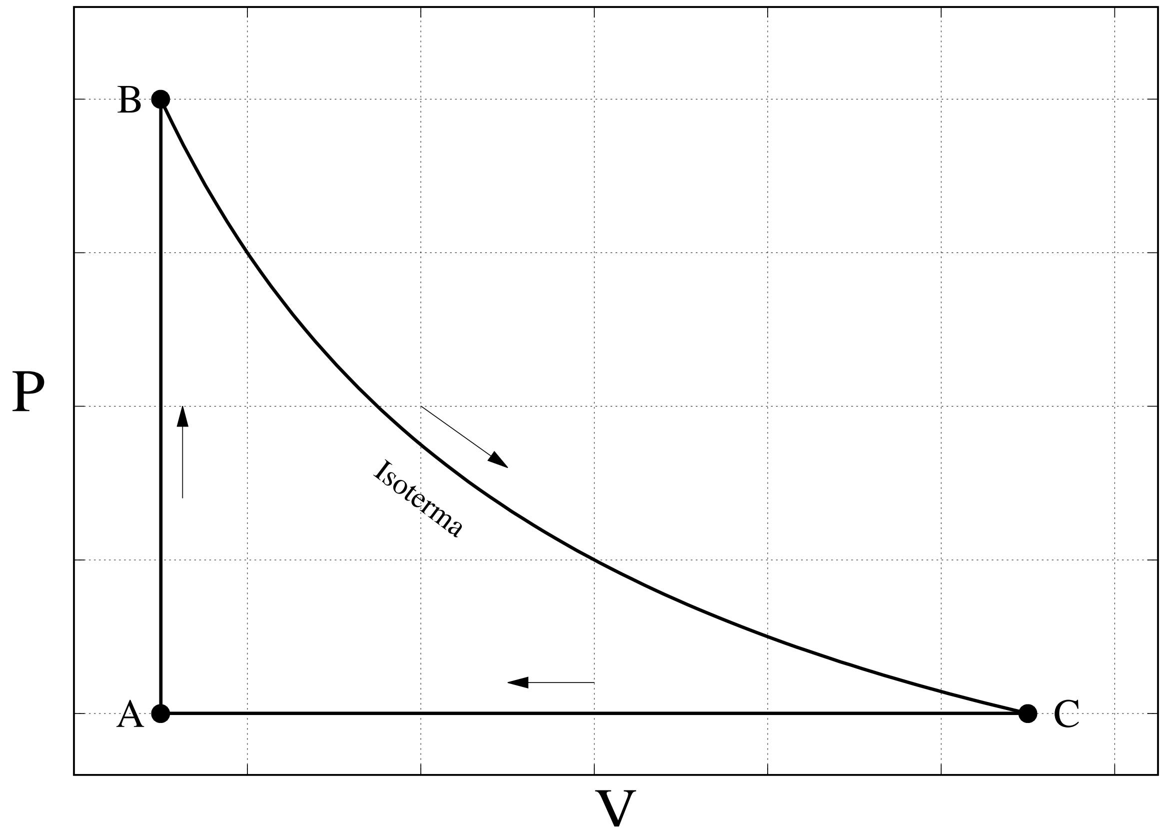

Figura 1: Trasformazioni subite dal gas

Esercizio 4

a) Calcoliamo innanzitutto le variabili P, V e T in corrispondenza degli stati A, B e C. Per quanto riguarda lo stato A, essendo già note V_A, P_A e T_A, utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti possiamo ricavare il numero di moli:

$$n = \frac{P_A V_A}{RT} \approx 0.20\text{moli} \tag{33}$$

La trasformazione $A \to B$ è isocora e quindi si ha $V_B = V_A = 5\text{l}$ e $P_A/T_A = P_B/T_B$ da cui possiamo ricavare T_B:

$$T_B = \frac{P_B}{P_A} T_A = 900\text{K} \tag{34}$$

La trasformazione $B \to C$ è isoterma e quindi $T_C = T_B = 900\text{K}$ e $P_B V_B = P_C V_C$ da cui possiamo ricavare V_C (essendo nota P_C):

$$V_C = \frac{P_B}{P_C} V_B = 15\text{l} \tag{35}$$

Il grafico nel piano PV delle trasformazioni subite dal gas è riportato in figura 1. Il tratto $A \to B$ è verticale, il tratto $B \to C$ è un ramo di iperbole equilatera ed infine il tratto $C \to A$ è orizzontale.

b) Essendo la trasformazione $A \to B$ isocora il lavoro è nullo ($L_{AB} = 0$) mentre la quantità di calore scambiata è data da:

$$Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = nc_V \left(\frac{P_B}{P_A} - 1 \right) T_A = \frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A \approx 1519.9\text{J} \tag{36}$$

dove si è tenuto conto della (33) e del fatto che per un gas monoatomico $c_V = 3R/2$. Infine, applicando il primo principio della termodinamica possiamo ricavare la variazione di energia interna $\Delta U_{AB} = Q_{AB} - L_{AB} = Q_{AB} = 1519.9\text{J}$.

Nella trasformazione isoterma $B \to C$ non c'è variazione di energia interna (non variando la temperatura) e quindi $\Delta U_{BC} = 0$. Il lavoro L_{BC} è dato da:

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} PdV = nRT_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_A} = P_B V_A \ln \frac{P_B}{P_A} \approx 1669.7\text{J} \tag{37}$$

Dal primo principio della termodinamica ricaviamo $Q_{BC} = L_{BC} = 1669.7\text{J}$.

Infine nella trasformazione isobara $C \to A$ il calore scambiato e il lavoro sono dati da:

$$\begin{cases} Q_{CA} = nc_P(T_A - T_C) = nc_P \left(1 - \dfrac{P_B}{P_A}\right) T_A = \dfrac{5}{2}(P_A - P_B)V_A \approx -2533.1\text{J} \\ L_{CA} = P_C(V_A - V_C) = V_A(P_A - P_B) \approx -1013.1\text{J} \end{cases} \tag{38}$$

Per l'intero ciclo $\Delta U = 0$ e quindi $Q_t = L_t$ ossia il lavoro totale effettuato è pari alla quantità totale di calore scambiato. Quindi tenendo conto della (37) e della seconda delle (38) si ottiene facilmente:

$$Q_t = L_t = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = V_A \left[P_A + P_B \left(\ln \frac{P_B}{P_A} - 1\right)\right] \approx 656.5\text{J} \tag{39}$$

Si noti come sommando i calori scambiati nelle varie trasformazioni si arriva alla stessa espressione:

$$\begin{aligned} Q_t = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} &= \frac{3}{2}(P_B - P_A)V_A + P_B V_A \ln \frac{P_B}{P_A} + \frac{5}{2}(P_A - P_B)V_A = \\ &= V_A \left[P_A + P_B \left(\ln \frac{P_B}{P_A} - 1\right)\right] \end{aligned} \tag{40}$$