Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
27 ottobre 2022

Esercizio 1

a) La posizione del centro di massa nel sistema formato dalle masse m_1 e m_2 nel sistema di riferimento indicato in figura si ottengono semplicemente applicando la definizione di centro massa:

$$\vec{r}_c(t) = \frac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

dove $\vec{r}_c(t)$, $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$ rappresentano rispettivamente il vettore posizione del centro di massa del sistema, della massa m_1 e della massa m_2 al tempo t. Proiettando la (1) e tenendo conto che a $t = 0$ le masse m_1 e m_2 sono disposte orizzontalmente ad una distanza l si ottiene:

$$\begin{cases} x_c(0) = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l = \dfrac{l}{4} = 5\text{cm} \\ y_c(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

b) e **c)** Sul sistema delle due masse non agisce nessuna forza esterna e, quindi, dalla prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi ricaviamo che l'accelerazione del centro di massa del sistema è nulla. Di conseguenza, il moto del centro di massa avviene a velocità costante che, pertanto, può essere determinata semplicemente valutando la velocità iniziale del centro di massa:

$$\vec{v}_c(t) = \vec{v}_c(0) = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = -2\vec{v}_2 \tag{3}$$

da cui possiamo facilmente ricavare la legge oraria del centro di massa:

$$\begin{cases} x_c(t) = \dfrac{l}{4} \\ y_c(t) = 2v_2 t \end{cases} \tag{4}$$

Il centro di massa del sistema, quindi, si muove verticalmente (a velocità costante) in direzione dell'asse y del sistema in figura.

La seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi ci permette di valutare il moto rotatorio del sistema delle due masse nel sistema di riferimento solidale al centro di massa delle stesse. In tale riferimento, infatti, il centro di massa è fermo e, essendo nullo il momento delle forze esterne (che si suppongono assenti), si conserva il momento angolare $\vec{L}_c$. Di conseguenza, il momento angolare del sistema in qualsiasi istante risulta pari al momento angolare all'istante iniziale (assumendo come polo la posizione del centro di massa):

$$\vec{L}_c(t) = \vec{L}_c(0) = \vec{r'}_1 \times m_1\vec{v'}_1 + \vec{r'}_2 \times m_2\vec{v'}_2 = \vec{r'}_1 \times m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_c) + \vec{r'}_2 \times m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_c) \tag{5}$$

dove $\vec{r'}$ e $\vec{v'}$ rappresentano rispettivamente il vettore posizione e velocità delle masse m_1 e m_2 nel sistema solidale al centro di massa del sistema e con origine nel centro di massa stesso. Tenendo conto della (3) si ottiene facilmente:

$$\vec{L}_c(t) = -3m_2(\vec{r'}_1 \times \vec{v}_2 - \vec{r'}_2 \times \vec{v}_2) \tag{6}$$

Tenendo infine conto che $\vec{r'}_1 = -(l/4)\hat{i}$ e che $\vec{r'}_2 = (3l/4)\hat{i}$ (dove $\hat{i}$ è il versore dell'asse x del sistema fisso) si ottiene:

$$\vec{L}_c(t) = 3m_2 l\hat{i} \times \vec{v}_2 = 3m_2 l v_2 \hat{k} \tag{7}$$

dove $\hat{k}$ indica il versore perpendicolare al piano di rotazione del sistema ed in esso entrante. D'altra parte lo stesso momento angolare è dato dal prodotto del momento di inerzia del sistema rispetto al centro di massa (I_c) per la velocità angolare $\vec{\omega}$. Si ricava quindi facilmente che:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}_c}{I_c} \tag{8}$$

Tenendo conto che:

$$I_c = \frac{3}{4} m_2 l^2 \tag{9}$$

si ottiene $\vec{\omega} = (4v_2/l)\hat{k}$. Integrando rispetto al tempo otteniamo $\theta(t)$, ossia l'angolo di rotazione del sistema delle due masse nel sistema del centro di massa al tempo t:

$$\theta(t) = \frac{4v_2}{l} t \tag{10}$$

Si noti che per come è stata scelta la direzione di $\hat{k}$, rotazioni positive dell'angolo θ corrispondono a rotazioni orarie. Le masse m_1 e m_2 si trovano disposte in verticale (per la prima volta) quando $\theta(t) = \pi/2$ e, quindi:

$$\tau = \frac{l\pi}{8v_2} \approx 0.039\text{s} \tag{11}$$

Nel sistema del centro di massa all'istante $t = \tau$ le masse m_1 e m_2 si trovano rispettivamente nei punti di coordinate $(0, l/4)$ e $(0, -3l/4)$ (essendo in tale sistema riferimento per $t = \tau$ verticali). Per ottenere le coordinate degli stessi punti nel sistema fisso basta semplicemente applicare le trasformazioni di Galileo (in quanto come già detto il centro di massa del sistema di muove di moto rettilineo uniforme). Tenendo quindi conto delle (4) si ottiene:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = x_c(\tau) = \dfrac{l}{4} = 5\text{cm} \\ y_1(\tau) = y_c(\tau) + \dfrac{l}{4} = \dfrac{\pi + 1}{4} l \approx 20.71\text{cm} \\ x_2(\tau) = x_c(\tau) == \dfrac{l}{4} = 5\text{cm} \\ y_2(\tau) = y_c(\tau) - \dfrac{3l}{4} = \dfrac{\pi - 3}{4} l \approx 0.71\text{cm} \end{cases} \tag{12}$$

Esercizio 2

a) Poiché durante il moto non ci sono attriti l'energia meccanica della massa m si conserva e pertanto possiamo scrivere:

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2} mv^2 \tag{13}$$

dove si è tenuto conto del fatto che la massa m parte da ferma (l'energia cinetica iniziale è nulla). La quantità v rappresenta il modulo della velocità della massa m quando essa si trova nel punto P (che si trova ad un'altezza rispetto al suolo pari a $2R$). Supponiamo di fissare un sistema di riferimento solidale alla massa m. Nel momento in cui la massa m percorre la guida semicircolare tale sistema di riferimento non è inerziale (in realtà è inerziale solo quando la massa m percorre il tratto orizzontale tra piano inclinato e guida semicircolare). In tale sistema di riferimento, quindi, oltre alla forza peso (di modulo pari a mg, verticale e diretta verso il basso) dobbiamo considerare anche la forza centrifuga (di modulo $m\omega^2 R$, radiale e uscente). Affinché la massa nel punto P resti in contatto con la guida, la forza centrifuga (che nel punto P è verticale e diretta verso l'alto) deve avere modulo maggiore o uguale del modulo della forza peso (verticale e diretta verso il basso). La condizione che deve essere soddisfatta è quindi:

$$\omega^2 R \geq g \quad \rightarrow \quad v^2 \geq gR \tag{14}$$

dove si è utilizzata la relazione $v = \omega R$. Sostituendo la (14) nella (13), dopo semplici passaggi si ottiene la condizione voluta sull'altezza h:

$$h \geq \frac{5}{2}R = 125\text{cm} \tag{15}$$

b) Nell'ipotesi che la massa m non sia puntiforme occorre prendere in considerazione l'energia di rotazione intorno a un suo asse di rotazione e la posizione del centro di massa. Poichè il rullo cilindrico si suppone omogeneo il suo centro di massa coincide con il suo centro geometrico. Se E_0 ed E_P sono le energie totali del rullo possedute rispettivamente nella sua posizione iniziale e nel punto P, per la conservazione dell'energia deve essere verificata la condizione $E_0 = E_P$.

In generale, possiamo scrivere l'energia totale del rullo come la somma della sua energia cinetica T e della sua energia potenziale U ($E = T + U$). Inoltre, applicando il teorema di König possiamo scrivere l'energia cinetica del rullo come:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\alpha}^2 \tag{16}$$

dove v_c rappresenta la velocità del centro di massa del rullo, I_c il suo momento di inerzia rispetto a un asse coincindente con l'asse longitudinale del cilindro (asse passante per il suo centro di massa) e $\dot{\alpha}$ la velocità angolare con cui il rullo ruota rispetto all'asse di rotazione scelto (rotazione che, pertanto, si suppone descritta dall'angolo α). Tenendo conto che inizialmente il rullo è fermo ($T_0 = 0$) sostituendo l'espressione (16) nell'espressione della conservazione dell'energia e esplicitando l'energia potenziale si ottiene:

$$mg(h + r) = mg(2R - r) + \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 \tag{17}$$

dove, in questo caso, v_c è il modulo dalla velocità del centro di massa del rullo quando questo si trova in corrispondenza del punto P. Inoltre, nello scrivere l'energia potenziale iniziale e finale, si è tenuto conto del fatto che l'altezza del centro massa del rullo cilindrico inizialmente è pari a $h + r$ mentre nella posizione finale (ossia in P) è $2R - r$.

La condizione di puro rotalmento del cilindro lega il modulo v_c all'angolo α attraverso la relazione $v_c = r|\dot{\alpha}|$. L'utilizzo del valore assoluto per la velocità angolare $\dot{\alpha}$ si rende necessario in quanto a primo membro compare una quantità definita positiva o nulla mentre il segno del secondo membro può essere positivo o negativo a seconda se l'angolo α aumenta o diminuisce al crescere del tempo. Utlizzando tale espressione nella (17), dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$h = 2(R - r) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{I_c}{mr^2}\right)\frac{v_c^2}{g} \tag{18}$$

Quando il rullo cilindrico percorre la guida semicircolare il suo centro di massa descrive una circonferenza il cui centro concide con il centro della guida semicircolare e il cui raggio è pari a $R - r$. Se ϕ è l'angolo che descrive questa rotazione, il modulo della velocità del centro di massa del cilindro è dato da $v_c = |\dot{\phi}|(R - r)$. Sia ora S un sistema di riferimento solidale con il centro di massa del rullo cilindrico. Durante il moto del cilindro lungo la guida circolare, S non è inierziale e, di conseguenza, sul suo centro di massa, in aggiunta alle forze reali, agisce la forza centrifuga di modulo pari a $m\dot{\phi}^2(R - r)$. Affinché nel punto P il rullo cilindrico resti in contatto con la guida circolare è necessario che il modulo della reazione vincolare

(N) esercitata dalla guida circolare in P sia maggiore o uguale a zero. Possiamo calcolare facilmente l'espressione di N quando il rullo si trova in P nel sistema di riferimento S. In tale posizione sul rullo agiscono la forza peso (di modulo pari a mg, verticale e diretta verso il basso), la forza centrifuga (come già detto di modulo pari a $m\dot{\phi}^2(R-r)$, verticale e diretta verso l'alto) e la reazione vincolare esercitata dalla guida (di modulo N, verticale e diretta verso il basso). Tenendo ora conto che affinchè il cilindro non si stacchi dalla guida (quando si trova in P), il suo centro di massa non deve avere componenti verticali dell'accelerazione. Di conseguenza, dalla prima equazione cardinale della dinamica, si ricava:

$$m\dot{\phi}^2(R-r) - mg - N = 0 \quad \rightarrow \quad N = m\dot{\phi}^2(R-r) - mg \tag{19}$$

Imponendo infine che $N \geq 0$ si ottiene la condizione:

$$\dot{\phi}^2(R-r) \geq g \quad \rightarrow \quad \frac{v_c^2}{g} \geq (R-r) \tag{20}$$

Sostituendo la (20) nella (18) dopo semplici passaggi si ottiene:

$$h \geq \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\frac{I_c}{mr^2}\right)(R-r) \tag{21}$$

Tenendo conto che $I_c = mr^2/2$:

$$h \geq \frac{11}{4}(R-r) = 132\text{cm} \tag{22}$$

Si noti che, come deve essere, l'altezza minima ottenuta in questo caso è maggiore di quella ottenuta nel caso precedente in quanto il rotolamento del rullo cilindrico richiede un'energia aggiuntiva rispetto al caso di massa puntiforme (dove si assume solo moto traslatorio).

Esercizio 3
Per risolvere l'esercizio basta utilizzare la costanza della portata dell'acqua nel tubo e l'equazione di Bernulli. In particolare, dalla costanza della portata risulta:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1 = 4v_1 = 16.8\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{23}$$

Dall'equazione di Bernulli, invece si ricava:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \tag{24}$$

Poiché il tubo è orizzontale $h_1 = h_2$ e quindi:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = -\frac{15}{2}\rho v_1^2 \approx -132.3\text{kPa} \tag{25}$$

Esercizio 4
Il rendimento del ciclo è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_a} \tag{26}$$

dove Q_c rappresenta il calore ceduto dal gas all'ambiente esterno durante il ciclo e Q_a quello assorbito dal gas dall'ambiente esterno. Calcoliamo, quindi, il calore scambiato nelle varie trasformazioni del ciclo.

La trasformazione $A \rightarrow B$ è una isocora e quindi il calore scambiato è dato da:

$$Q_{AB} = mc_v(T_B - T_A) \tag{27}$$

essendo $T_B > T_A$ durante la trasformazione il gas assorbe calore dall'ambiente esterno ($Q_{AB} > 0$).

La trasformazione $B \to C$ è un'espansione isobara e il calore scambiato è dato da:

$$Q_{BC} = mc_p(T_C - T_B) \tag{28}$$

essendo anche in questo caso $T_C > T_B$ durante l'espansione isobara il gas assorbe calore dall'ambiente esterno ($Q_{BC} > 0$).

La trasformazione $D \to C$ è un'espansione adiabatica e quindi non avviene alcun scambio di calore tra gas e ambiente esterno ($Q_{CD} = 0$).

Infine, la trasformazione $D \to A$ è una compressione isoterma che avviene a temperatura $T_D = T_A$. Si noti che essendo il gas reale non è possibile utilizzare l'equazione di stato dei gas perfetti nel calcolo del calore scambiato Q_{DA}. Tuttavia è possibile calcolare Q_{DA} utilizzando la condizione di reversibilità del ciclo. Se, infatti, in ciclo è reversibile la variazione di entropia totale deve essere nulla ossia $\Delta S = 0$. Scriviamo, quindi, esplicitamente la variazione dell'entropia durante il ciclo attraverso l'integrale di Clausius:

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = mc_v \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} + mc_p \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} + \frac{Q_{DA}}{T_A} = 0 \tag{29}$$

Da cui si ottiene:

$$Q_{DA} = -mT_A \left(c_v \ln \frac{T_B}{T_A} + c_p \ln \frac{T_C}{T_B} \right) \tag{30}$$

Si noti come essendo $Q_{DA} < 0$, nella compressione isoterma il calore è ceduto dal gas all'ambiente esterno. Di conseguenza ricordando la (26) si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{Q_{AB} + Q_{BC}} = 1 - \frac{T_A \left(\ln \frac{T_B}{T_A} + \gamma \ln \frac{T_C}{T_B} \right)}{T_B - T_A + \gamma \left(T_C - T_B \right)} \approx 0.24 \tag{31}$$