

Prima Prova Intercorso Fisica 1
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
26 gennaio 2026

Esercizio 1

a) Al fine di determinare l'equazione del moto del punto materiale, valutiamo le forze che agiscono su di esso:

- forza peso $m\vec{g}$ verticale e diretta verso il basso;
- reazione vincolare esercitata dal piano inclinato $\vec{N}$ perpendicolare alla sua superficie e uscente;
- forza d'attrito dinamico (il punto materiale inizialmente è in moto con velocità $\vec{v}_0$) $\vec{F}_A$ parallela al piano inclinato e diretta verso la sua base (il punto materiale inizialmente ha una velocità che lo porta a salire lungo il piano inclinato).

Pertanto, l'equazione del moto risulta essere:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A = m\vec{a} \quad (1)$$

dove $\vec{a}$ rappresenta l'accelerazione del punto. Se scegliamo un sistema di riferimento con origine nella posizione del punto materiale all'istante $t = 0$ (ossia alla base del piano inclinato), asse x parallelo alla direzione del piano inclinato (diretto verso il suo apice) ed asse y perpendicolare al piano inclinato e da esso uscente la (1) diventa:

$$\begin{cases} N - mg \cos \alpha = 0 \\ -mg \sin \alpha - F_A = ma \end{cases} \quad (2)$$

Sostituendo $F_A = \mu_d N$ nelle (2) si ottiene:

$$\begin{cases} N = mg \cos \alpha \\ a = -g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) \end{cases} \quad (3)$$

Integrando la seconda delle (3) si ottiene facilmente la velocità e la legge oraria del punto:

$$\begin{cases} v(t) = -g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)t + v_0 \\ x(t) = -g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + v_0 t \end{cases} \quad (4)$$

dove si è tenuto conto del fatto che il punto inizialmente è dotato di velocità v_0 diretta come l'asse x e si trova nell'origine del sistema scelto.

L'istante τ si ottiene imponendo $v(\tau) = 0$ ossia:

$$\tau = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)} \approx 0.76\text{s} \quad (5)$$

b) In corrispondenza del tempo τ il punto è salito lungo il piano inclinato percorrendo una distanza $d = x(\tau)$. Di conseguenza, la massima quota h_{max} raggiunta dal punto materiale risulta essere $h_{max} = d \sin \alpha$. Tenendo conto delle (4) e della (5) si ottiene:

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g(1 + \mu_d \cot \alpha)} \approx 0.95\text{m} \quad (6)$$

- c) Il punto giunge alla quota h_{max} con velocità nulla. Affinché esso resti fermo in questa posizione, il risultante delle forze che agiscono su di esso deve essere nullo ossia:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A = \vec{0} \quad (7)$$

dove, questa volta, $\vec{F}_A$ rappresenta la forza di attrito statico. Proiettando tale equazione vettoriale lungo gli assi x e y del sistema di riferimento precedentemente individuato si ottiene:

$$\begin{cases} N = mg \cos \alpha \\ F_A = mg \sin \alpha \end{cases} \quad (8)$$

Il valore massimo della forza di attrito statico è dato da $\mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha$. Ricaviamo quindi:

$$F_A = mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha \quad \rightarrow \quad \mu_s \geq \tan \alpha \quad (9)$$

Il valore minimo di μ_s per cui il punto resta fermo una volta giunto al punto di massima quota è pertanto:

$$\mu_s^{min} = \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (10)$$

Esercizio 2

- a) Se il blocco B è fissato sulla superficie orizzontale, gli unici corpi liberi di muoversi sono le masse m_1 , m_2 ed m_3 . Il sistema, pertanto risulta in equilibrio se il risultante delle forze applicate su ciascuno di tali masse è nullo. Su tutte e tre le masse agisce la forza peso $m_i \vec{g}$ ($i = 1, 2, 3$) verticale e diretta verso il basso. In aggiunta, sulle masse m_1 e m_2 agisce la tensione $\vec{\tau}_{12}$ del filo (diretta lungo il filo) e sulle masse m_2 e m_3 la tensione $\vec{\tau}_{23}$ dell'altro filo. Sulle masse m_1 e m_2 , inoltre, agisce la reazione vincolare esercitata dal blocco B che è perpendicolare alla superficie del blocco B e da esso uscente. Si noti che sulla massa m_3 , il blocco B non esercita alcuna reazione vincolare in quanto m_3 è sospeso verticalmente e non vi sono forze che lo premono sulla superficie di B . Di conseguenza, la forza di attrito statico $F_A^{(i)}$ (che è proporzionale alla reazione vincolare N_i) risulta essere presente solo sulle masse m_1 ed m_2 . Dai valori numerici delle masse m_1 , m_2 ed m_3 si ricava che in assenza di attrito statico esse si muoverebbero lungo la superficie del blocco nella direzione che va da m_1 verso m_3 (in altre parole m_1 salirebbe, m_2 si sposterebbe orizzontalmente da sinistra verso destra e m_3 scenderebbe). La forza di attrito statico che agisce sulle masse m_1 e m_2 , pertanto, è diretta parallelamente alla superficie del blocco e ha direzione opposta a quella del moto ossia da destra verso sinistra.

Scegliendo un sistema di riferimento S solidale al blocco (quindi fermo) il cui l'asse x è diretto lungo la direzione dei fili (nel verso che va da m_1 ad m_3) e asse y perpendicolare alla superficie del blocco B (uscente) le condizione di equilibrio sono:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin \alpha + \tau_{12} - F_A^{(1)} = 0 \\ -m_1 g \cos \alpha + N_1 = 0 \\ -\tau_{12} + \tau_{23} - F_A^{(2)} = 0 \\ -m_2 g + N_2 = 0 \\ -\tau_{23} + m_3 g = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Sommando la prima, la terza e la quinta delle (11) si ottiene:

$$F_A^{(1)} + F_A^{(2)} = (m_3 - m_1 \sin \alpha)g \quad (12)$$

Il massimo valore che le forze di attrito statico possono esercitare è dato da $F_{max}^{(i)} = \mu_s N_i$. Imponendo quindi che $F_A^{(1)} + F_A^{(2)} \leq F_{max}^{(1)} + F_{max}^{(2)}$ e tenendo conto delle espressioni di N_1 e N_2 date dalle (11) si ottiene:

$$\mu_s \geq \frac{m_3 - m_1 \sin \alpha}{m_2 + m_1 \cos \alpha} \approx 0.47 \quad (13)$$

che rappresenta l'intervallo di valori cercato per μ_s .

b) e c) Se il blocco B è libero di muoversi non esiste nessun valore di μ_s che garantisce l'equilibrio del sistema di masse dato (blocco e masse m_1 , m_2 e m_3). In tal caso, infatti, le forze che agiscono sul blocco B sono:

- la forza peso $m_B \vec{g}$ (verticale e diretta verso il basso);
- la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dalla superficie orizzontale;
- le forze $-\vec{N}_1$ e $-\vec{N}_2$ che in base al terzo principio della dinamica i corpi di massa m_1 ed m_2 esercitano sul blocco B ;
- le forze $-\vec{F}_A^{(1)}$ e $-\vec{F}_A^{(2)}$ che in base al terzo principio della dinamica i corpi di massa m_1 ed m_2 esercitano sul blocco B .

La condizione di equilibrio per il blocco B è data dall'annullarsi del risultante di tale forze:

$$m_B \vec{g} + \vec{N} - \vec{N}_1 - \vec{N}_2 - \vec{F}_A^{(1)} - \vec{F}_A^{(2)} = \vec{0} \quad (14)$$

Si noti che per come sono direzionate le varie forze in gioco la componente orizzontale del loro risultante non può mai annullarsi se il blocco B è fermo (ossia se il sistema è in equilibrio). Infatti, le componenti orizzontali delle forze $-\vec{N}_1$ (ossia $N_1 \sin \alpha$), $-\vec{F}_A^{(1)}$ ($F_A^{(1)} \cos \alpha$) e $-\vec{F}_A^{(2)}$ ($F_A^{(2)}$) sono tutte dirette nella stessa direzione (ossia da sinistra verso destra). Se, pertanto, il blocco B è libero di muoversi, esso traslerà orizzontalmente sulla superficie su cui è poggiato con accelerazione $\vec{a}_B$ orizzontale e diretta da sinistra a destra.

Se, tuttavia, il blocco B si muove di moto accelerato il sistema di riferimento S scelto precedentemente non è inerziale. Di conseguenza, per determinare in esso il moto delle masse m_i in aggiunta alle forze reali va considerata anche la forza apparente $-m_i \vec{a}_B$ (che in base a quanto detto precedentemente è orizzontale e diretta da destra verso sinistra).

In base a quanto detto, le equazioni del moto per le masse m_i nel sistema S sono:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin \alpha + \tau_{12} - F_A^{(1)} - m_1 a_B \cos \alpha = m_1 a \\ -m_1 g \cos \alpha + N_1 + m_1 a_B \sin \alpha = 0 \\ -\tau_{12} + \tau_{23} - F_A^{(2)} - m_2 a_B = m_2 a \\ -m_2 g + N_2 = 0 \\ -\tau_{23} + m_3 g - F_A^{(3)} = m_3 a \\ -m_3 a_B + N_3 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

dove a rappresenta l'accelerazione delle masse m_1 , m_2 e m_3 nel sistema S (ossia rispetto al blocco B). Tale accelerazione deve necessariamente essere la stessa per le tre masse in quanto esse, per ipotesi, sono collegate attraverso fili inestensibili. In tal caso le forze di attrito $F_A^{(i)}$ sono quelle di attrito dinamico date da $F_A^{(i)} = \mu_d N_i$.

Nello scrivere le (15) si è tenuto conto del fatto che nel momento in cui il blocco B si muove con accelerazione $\vec{a}_B$, la reazione vincolare $\vec{N}_3$ (che nel caso precedente era nulla) è diversa

da zero poiché ora la forza apparente $-m_3\vec{a}_B$ preme la massa m_3 contro la superficie del blocco B .

Si noti che le (15) suppongono che le masse m_i siano in moto nel sistema S . Se fossimo interessati a studiare le condizioni di equilibrio delle masse m_i in S (ossia le condizioni per cui le masse m_i sono ferme rispetto al blocco B) dovremmo risolvere le (15) con $a = 0$ e considerare le $F_A^{(i)}$ come forze d'attrito statico. Procedendo in tal modo è possibile calcolare il coefficiente di attrito statico minimo μ_s^{min} tra blocco e masse m_i per cui queste ultime si mantengono solidali con il blocco B (che a sua volta trasla con moto uniformemente accelerato). In quanto segue, quindi, si suppone (come indicato dalla traccia) che $\mu_s < \mu_s^{min}$.

Dalle (15) possiamo facilmente ricavare le tre componenti N_1 , N_2 ed N_3 esercitate dal blocco B in funzione dell'accelerazione a_B del blocco B stesso:

$$\begin{cases} N_1 = m_1(g \cos \alpha - a_B \sin \alpha) \\ N_2 = m_2 g \\ N_3 = m_3 a_B \end{cases} \quad (16)$$

e di conseguenza i moduli delle corrispondenti forze di attrito dinamico.

Possiamo quindi studiare il moto del blocco B in un sistema di riferimento fisso (solidale con la superficie orizzontale) e quindi inerziale. In particolare se prendiamo un sistema di riferimento con asse x orizzontale e diretto da sinistra verso destra e asse y verticale diretto verso l'alto le equazioni del moto per il blocco B sono (in base alle forze individuate precedentemente):

$$\begin{cases} N_1 \sin \alpha + F_A^{(1)} \cos \alpha + F_A^{(2)} - N_3 = m a_B \\ N - N_1 \cos \alpha + F_A^{(1)} \sin \alpha - N_2 - F_A^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Da cui ricordando la relazione tra forze d'attrito dinamico e reazione vincolare si ottiene:

$$\begin{cases} N_1(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) + \mu_d N_2 - N_3 = m a_B \\ N = N_1(\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) + N_2 + \mu_d N_3 \end{cases} \quad (18)$$

Sostituendo infine le (16) nelle (18) si ottiene:

$$\begin{cases} a_B = \frac{m_1 \cos \alpha (\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)}{m + m_3 + m_1 \sin \alpha (\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha)} g \approx 1.09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ N = m_1(g \cos \alpha - a_B \sin \alpha)(\cos \alpha - \mu_d \sin \alpha) + m_2 g + \mu_d m_3 a_B \approx 55.8 \text{N} \end{cases} \quad (19)$$

Esercizio 3

- a) Le forze che agiscono sul cilindro sono la forza peso $m\vec{g}$ che possiamo immaginare applicata nel suo centro di massa (ossia in O), la reazione vincolare $\vec{N}$ necessaria affinché l'asse di rotazione del cilindro sia fisso (applicata nel punto O).

Nel momento in cui la barretta viene premuta dalla forza $\vec{F}$ contro la superficie del cilindro in rotazione, alle forze elencate precedentemente vanno aggiunte la forza d'attrito (frenante) $\vec{F}_A$ verticale e diretta verso il basso applicata nel punto di contatto tra cilindro e barretta e la reazione vincolare $\vec{N}_B$ esercitata dalla barretta sul cilindro (orizzontale e anch'essa applicata nel punto di contatto tra cilindro e barretta). Per la geometria del problema tale reazione vincolare è data proprio dalla forza $\vec{F}$ applicata sulla barretta.

Se scegliamo con polo il punto O le equazioni cardinali della dinamica per il cilindro (una volta a contatto con la barretta) si scrivono come:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_A = m\vec{a}_c \\ \vec{M}_O = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases} \quad (20)$$

dove $\vec{a}_c$ rappresenta l'accelerazione del centro di massa del cilindro e $\vec{L}$ il suo momento angolare rispetto al polo O .

La prima delle (20) ci permette di calcolare la reazione vincolare $\vec{N}$. Per ipotesi, infatti, il centro di massa del cilindro non si muove e quindi $a_c = 0$. Proiettando la prima delle (20) lungo gli assi x e y rispettivamente orizzontale e verticale nel piano della figura si ottiene:

$$\begin{cases} N_y = mg + F_A \\ N_x = F \end{cases} \quad (21)$$

La seconda delle (20) ci permette di caratterizzare il moto rotatorio del cilindro. È facile rendersi conto che l'unica forza che contribuisce a $\vec{M}_O$ è $\vec{F}_A$:

$$\vec{M}_O = \vec{R} \times \vec{F}_A = -RF_A \hat{k} \quad (22)$$

dove con $\hat{k}$ è stato denotato il versore del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ del cilindro. Si noti che la rotazione del cilindro avviene in senso antiorario mentre il momento $\vec{M}_O$ tende a far ruotare il cilindro in senso orario (e pertanto risulta frenante). Questo spiega il motivo del segno meno nella (22). Inoltre, il modulo della forza di attrito F_A è dato da $F_A = \mu_d N_B = \mu_d F$. Di conseguenza, la (22) si scrive come:

$$\vec{M}_O = -\mu_d RF \hat{k} \quad (23)$$

Ricordando che il momento angolare del cilindro si può scrivere come $\vec{L} = I_O \vec{\omega}$ dove I_O rappresenta il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse di rotazione, la seconda delle (20) diventa:

$$I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\mu_d RF \hat{k} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{\mu_d RF}{I_O} \hat{k} \quad (24)$$

Integrando tale equazione otteniamo:

$$\omega(t) = -\frac{\mu_d RF}{I_O} t + \omega_0 \quad (25)$$

Il cilindro si ferma all'istante τ per cui $\omega(\tau) = 0$ ossia:

$$\tau = \frac{\omega_0 I_O}{\mu_d RF} = \frac{m\omega_0 R}{2\mu_d F} \approx 3.75\text{s} \quad (26)$$

dove si è tenuto conto che $I_O = mR^2/2$.

b) Integrando la (25) di nuovo rispetto al tempo abbiamo:

$$\theta(t) = -\frac{\mu_d RF}{2I_O} t^2 + \omega_0 t \quad (27)$$

Di conseguenza, nel tempo τ il cilindro ruota di un angolo $\theta(\tau)$. Il numero di giri effettuato dal cilindro prima di fermarsi si ottiene semplicemente dividendo tale quantità per 2π :

$$N = \frac{\theta(\tau)}{2\pi} = \frac{\omega_0^2 I_O}{4\pi \mu_d RF} = \frac{m\omega_0^2 R}{8\pi \mu_d F} \approx 4.48 \quad (28)$$

c) Per la conservazione dell'energia, l'energia totale E_A dissipata dalle forze d'attrito risulta essere pari all'energia cinetica rotazionale iniziale del cilindro ossia:

$$E_A = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega_0^2 \approx 281\text{mJ} \quad (29)$$

Tale energia viene trasformata interamente in calore con un aumento della temperatura sia del cilindro che della barretta verticale.