Prova di Esame di Fisica Generale II
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
17 giugno 2026

Esercizio 1

a) La capacità di un condensatore piano è data da:

$$C = \epsilon \frac{S}{d} \tag{1}$$

dove S rappresenta la superficie delle armature del condensatore, d la loro distanza e ϵ la costante dielettrica assoluta del materiale presente tra le due armature. Specificando la (1) per le capacità C_A e C_B dei due condensatori si ottiene:

$$\frac{C_A}{C_B} = \frac{S_A}{S_B} = 2.5 \tag{2}$$

b) I condensatori sono collegati in parallelo e pertanto la capacità totale del sistema risulta pari alla somma delle capacità dei singoli condensatori. Di conseguenza la capacità totale iniziale è data da:

$$C_T = C_A + C_B = 1.4\text{pF} \tag{3}$$

Analogamente la capacità totale finale C'_T risulta essere:

$$C'_T = C'_A + C_B \tag{4}$$

dove C'_A rappresenta la capacità del condensatore A dopo aver inserito la lamina di materiale dielettrico di spessore Δ tra le sue armature. Il campo elettrico tra le armature di un condensatore piano è costante e perpendicolare alla superficie delle sue armature (trascurando gli effetti di bordo). Se quindi indichiamo con E il campo elettrico all'interno del condensatore A e con ΔV la differenza di potenziale tra le sue armature abbiamo:

$$\Delta V = \int_0^d E dx = \int_0^{d_1} E_0 dx + \int_{d_1}^{d_1+\Delta} E_1 dx + \int_{d_1+\Delta}^{d} E_0 dx = E_0(d-\Delta) + E_1\Delta \tag{5}$$

dove si è indicato con d_1 la distanza a partire dall'armatura a potenziale più basso a cui viene inserita la lamina dielettrica, con E_0 il campo elettrico all'interno del condensatore in corrispondenza dello spazio non occupato dalla lamina dielettrica (ossia nel vuoto) e con E_1 il campo elettrico all'interno della lamina dielettrica. Tenendo conto che $E_1 = E_0/\epsilon_r$ la (5) diventa:

$$\Delta V = \frac{\Delta + \epsilon_r(d-\Delta)}{\epsilon_r} E_0 \tag{6}$$

Il campo elettrico E_0 è legato alla densità di carica superficiale σ depositata sulle armature del condensatore dalla relazione $E_0 = \sigma/\epsilon_0$. Se, pertanto $q = \sigma S_A$ è la carica totale sulle armature del condensatore A avremo $E_0 = q/(S_A\epsilon_0)$. Sostituendo tale espressione nella (6) otteniamo:

$$\Delta V = \frac{\Delta + \epsilon_r(d-\Delta)}{\epsilon_r} \frac{q}{\epsilon_0 S_A} \tag{7}$$

Da cui si ricava:

$$C'_A = \frac{q}{\Delta V} = \epsilon_0 S_A \frac{\epsilon_r}{\Delta + \epsilon_r(d-\Delta)} = \epsilon_0 \frac{S_A}{d} \frac{\epsilon_r d}{\Delta + \epsilon_r(d-\Delta)} = C_A \frac{\epsilon_r d}{\Delta + \epsilon_r(d-\Delta)} \tag{8}$$

Sostituendo la (8) nella (4) abbiamo:

$$C'_T = C_A \frac{\epsilon_r d}{\Delta + \epsilon_r (d - \Delta)} + C_B \approx 2.43\text{pF} \tag{9}$$

Si noti come una volta inserito il dielettrico tra le armature del condensatore A la capacità del sistema aumenta in quanto aumenta la capacità C_A.

c) Le cariche iniziali q_A e q_B si calcolano facilmente utilizzando la definizione di capacità:

$$\begin{cases} q_A = C_A \Delta V_0 = 0.18\text{nC} \\ q_B = C_B \Delta V_0 = 0.072\text{nC} \end{cases} \tag{10}$$

Per calcolare le cariche finali q'_A e q'_B occorre tenere presente che l'inserimento della lamina dielettrica tra le armature del condensatore A avviene mentre il sistema dei due condensatori è isolato. Di conseguenza la carica totale del sistema rimane costante mentre la differenza di potenziale $\Delta V'_0$ varia. In particolare poiché abbiamo visto che $C'_T > C_T$ deve necessariamente essere $\Delta V'_0 < \Delta V_0$. Le cariche q'_A e q'_B sono pertanto date da:

$$\begin{cases} q'_A = C'_A \Delta V'_0 \\ q'_B = C_B \Delta V'_0 \end{cases} \tag{11}$$

Dividendo tali equazioni e ricordando la (8) si ottiene:

$$\frac{q'_A}{q'_B} = \frac{C'_A}{C_B} = \frac{C_A}{C_B} \frac{\epsilon_r d}{\Delta + \epsilon_r (d - \Delta)} \tag{12}$$

Tenendo inoltre conto che il sistema è isolato deve essere $q_A + q_B = q'_A + q'_B$ ossia:

$$q'_A + q'_B = q_A + q_B = (C_A + C_B)\Delta V_0 \tag{13}$$

Utilizzando la (12) e la (13) si ricava facilmente:

$$\begin{cases} q'_A = \dfrac{C_A (C_A + C_B)\epsilon_r d}{C_A \epsilon_r d + C_B[\Delta + \epsilon_r (d - \Delta)]} \Delta V_0 \approx 0.21\text{nC} \\ q'_B = \dfrac{C_B (C_A + C_B)[\Delta + \epsilon_r (d - \Delta)]}{C_A \epsilon_r d + C_B[\Delta + \epsilon_r (d - \Delta)]} \Delta V_0 \approx 0.041\text{nC} \end{cases} \tag{14}$$

Confrontando le (14) con le (10) si comprende che durante l'inserimento dalla lamina dielettrica nel condensatore A parte della carica che si trovava sulle armature di B si sposta sulle armature di A come conseguenza del fatto che la capacità di A aumenta mentre quella di B resta costante.

c) Per la conservazione dell'energia il lavoro L svolto dal sistema è dato da:

$$L = U - U' \tag{15}$$

dove U e U' rappresentano rispettivamente l'energia elettrostatica del sistema dei due condensatori iniziale e finale. Come già osservato precedentemente il sistema formato dai due condensatori è isolato e pertanto la sua carica totale $q = q_A + q_B$ resta costante. Di conseguenza avremo:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_T} \qquad \leftarrow \qquad U' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C'_T} \tag{16}$$

Utilizzando le espressioni precedentemente ricavate:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} q^2 \left(\frac{1}{C_T} - \frac{1}{C'_T} \right) = \frac{1}{2}(C_A + C_B)^2 \Delta V_0^2 \frac{C'_T - C_T}{C'_T C_T} = \frac{1}{2}(C_A + C_B)\Delta V_0^2 \frac{C'_T - C_T}{C'_T} \\ &= \frac{1}{2} C_A (C_A + C_B) \Delta V_0^2 \frac{\Delta(\epsilon_r - 1)}{C_A \epsilon_r d + C_B[\Delta + \epsilon_r (d - \Delta)]} \approx 0.962\text{nJ} \end{aligned} \tag{17}$$

Esercizio 2

a) Il circuito risulta equivalente a un circuito formato dalle resistenze R_1 in serie con R_p parallelo delle resistenze R_2, R_3, R_4 e R_5 ossia:

$$R_p = \frac{R_3R_4R_5 + R_2R_4R_5 + R_2R_3R_5 + R_2R_3R_4}{R_2R_3R_4R_5} \tag{18}$$

Di conseguenza, in R_1 e R_p circola la stessa corrente I_1 data da:

$$I_1 = \frac{f}{R_1 + R_p} \tag{19}$$

Per determinare le correnti che circolano nelle resistenze R_2, R_3, R_4 e R_5 basta considerare che ai capi di tali resistenze abbiamo la stessa differenza di potenziale che sussiste ai capi di R_p ossia:

$$V_p = \frac{R_p}{R_1 + R_p} f \tag{20}$$

Di conseguenza deve essere:

$$I_i = \frac{V_p}{R_i} = \frac{R_p}{R_i(R_1 + R_p)} f \qquad \text{con} \quad i = 2, 3, 4, 5 \tag{21}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{f}{R_1 + R_p} \approx 1.909\text{mA} \\ I_2 = \dfrac{R_p}{R_2(R_1 + R_p)} f \approx 0.727\text{mA} \\ I_3 = \dfrac{R_p}{R_3(R_1 + R_p)} f \approx 0.545\text{mA} \\ I_4 = \dfrac{R_p}{R_4(R_1 + R_p)} f \approx 0.363\text{mA} \\ I_5 = \dfrac{R_p}{R_5(R_1 + R_p)} f \approx 0.272\text{mA} \end{cases} \tag{22}$$

b) La potenza W_g erogata dal generatore risulta essere:

$$W_g = fI_1 = \frac{f^2}{R_1 + R_p} \approx 28.6\text{mW} \tag{23}$$

c) Quando il voltmetro viene collegato in parallelo alla resistenza R_3, nel calcolo di R_p occorre considerare anche la sua resistenza interna r_v che risulta anche essa collegata in parallelo alle altre già presenti. Di conseguenza la resistenza R_p è data da:

$$R_p = \frac{R_3R_4R_5r_v + R_2R_4R_5r_v + R_2R_3R_5r_v + R_2R_3R_4r_v + R_2R_3R_4R_5}{R_2R_3R_4R_5r_v} \tag{24}$$

Di conseguenza la tensione misurata dal voltmetro risulta essere:

$$V_p = \frac{R_p}{R_1 + R_p} f \approx 5.26\text{V} \tag{25}$$

Esercizio 3

a) Il campo magnetico generato da una spira circolare di raggio r percorsa da una corrente I in corrispondenza del proprio asse ad una distanza z dal suo centro si può facilmente calcolare utilizzando la prima legge di Laplace. In particolare, il campo magnetico $d\vec{B}(z)$ generato dal tratto infinitesimo della spira $d\vec{l}$ orientato nel verso in cui scorre la corrente sull'asse della spira ad una distanza z dal cui centro risulta essere:

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{26}$$

dove $\vec{r}$ rappresenta il vettore posizione del punto in cui il campo magnetico è calcolato e $\vec{r}'$ il raggio vettore di $d\vec{l}$. Dalla geometria del problema si ricava $\vec{r} = z\hat{k}$ (con $\hat{k}$ versore dell'asse z) mentre $\vec{r}'$ è un vettore di modulo costante (pari ad R) che giace sul piano xy (parallelo alla superficie delle spira). Pertanto, si ricava che $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (R^2 + z^2)$. Essendo inoltre i vettori $d\vec{l}$ e $\vec{r} - \vec{r}'$ perpendicolari la (26) diventa:

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{t} \tag{27}$$

dove con $\hat{t}$ si è indicato il versore del prodotto vettoriale $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')$. Per ottenere il campo magnetico generato dall'intera spira occorre integrare la (27) sull'intera spira. Tuttavia, per ragioni di simmetria quando si effettua questa operazione le componenti del campo magnetico perpendicolari all'asse z si compensano a vicenda. In altri termini fissato un qualunque elemento $d\vec{l}_1$ della spira individuato dal vettore $\vec{r}_1'$ è possibile sempre individuarne un altro $d\vec{l}_2$ posizionato in $\vec{r}_2' = -\vec{r}_1'$ per cui i vettori $d\vec{B}_1(z)$ e $d\vec{B}_2(z)$ hanno componenti perpendicolari all'asse z uguali e opposte. Effettuando quindi l'integrale della (27) su tutta la spira l'unica componente non nulla di $\vec{B}(z)$ è quella lungo l'asse z. Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{B}(z) = \int d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{k} \int \cos\alpha dl \tag{28}$$

dove con α si è indicato l'angolo che il vettore $d\vec{B}(z)$ forma con l'asse z. Dalla geometria del problema si ricava:

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \tag{29}$$

sostituendo tale espressione nella (28) e svolgendo l'integrale si ottiene:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \tag{30}$$

che rappresenta l'espressione cercata.

b) L'energia magnetica del dipolo $\vec{m}$ posizionato sull'asse della spira ad una distanza z dal centro spira risulta essere:

$$U_m(z) = -\vec{m} \cdot \vec{B}(z) = -\frac{\mu_0}{2} \frac{m_0 I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \tag{31}$$

Pertanto nel punto $z = R/2$ l'energia magnetica del dipolo vale:

$$U_m\left(z = \frac{R}{2}\right) = -\frac{4\mu_0 m_0 I}{\sqrt{125}} \frac{1}{R} \approx -2.25\mu\text{J} \tag{32}$$

c) La forza magnetica che $\vec{F}_m$ che agisce sul dipolo è data da:

$$\vec{F}_m = -\vec{\nabla} U_m = -\left(\frac{\partial U_m}{\partial x}, \frac{\partial U_m}{\partial y}, \frac{\partial U_m}{\partial z}\right) \tag{33}$$

Si noti che per calcolare la (33) abbiamo bisogno di determinare l'energia magnetica U_m non solo in corrispondenza dell'asse z ma in un generico punto di coordinate (x, y, z) altrimenti non è possibile determinare le derivate parziali di U_m rispetto a x e y. Tuttavia per ragioni di simmetria possiamo ipotizzare che il campo magnetico generato dalla spira in corrispondenza del suo asse assuma valori massimi al variare sia di x che di y. In altri termini $B(0, 0, z) > B(dx, dy, z)$. In tal caso in corrispondenza dell'asse z le derivate parziali di U_m rispetto a x e y sono entrambe nulle e quindi la (33) diventa:

$$\vec{F}_m = -\frac{\partial U_m}{\partial z}\hat{k} = -\frac{\mu_0 m_0 I R^2}{2}\frac{3z}{(R^2+z^2)^{5/2}}\hat{k} \tag{34}$$

Pertanto se il dipolo è posto in $z = R/2$ il modulo di $\vec{F}_m$ vale:

$$F_m = \frac{24\mu_0 m_0 I}{5^{5/2}R^2} \approx 54.0\mu\text{N} \tag{35}$$

Il momento meccanico $\vec{M}_m$ che agisce sul dipolo è dato da:

$$\vec{M}_m = \vec{m} \times \vec{B} = \vec{0} \tag{36}$$

in quanto $\vec{m}$ e $\vec{B}$ sono paralleli.

c) Affinché il dipolo sia in equilibrio deve essere:

$$\begin{cases} \vec{F}_m = \vec{0} \\ \vec{M}_m = \vec{0} \end{cases} \tag{37}$$

Di conseguenza ricaviamo che il dipolo è in equilibrio se è posizionato in $z = 0$ (ossia al centro della spira) ed orientato lungo z (in tal case la posizione è di equilibrio stabile in quanto U_m è minima) o in direzione opposta a z (in tal caso la posizione è di equilibrio instabile).

Esercizio 4

a) Indichiamo con x la posizione della sbarretta a partire dal lato superiore della guida su cui la stessa sbarretta scorre. Quando la sbarretta scivola verso il basso la forma del circuito c formato dalla sbarretta e dalle parti delle guide rigide che si trovano sopra di essa varia. Essendo presente il campo magnetico $\vec{B}_0$, in corrispondenza di tale variazione si genera una forza elettromotrice indotta f data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz. Se indichiamo con Σ la superficie concatenata al circuito c il flusso del campo magnetico attraverso Σ è dato da:

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}_0) = \int_\Sigma \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = B_0 L x \cos\theta \tag{38}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\vec{B}_0$ è un vettore costante che forma un angolo θ con il versore normale alla superficie Σ (ossa con $d\vec{S}$) e che $\Sigma = Lx$. La forza elettromotrice f indotta nel circuito c risulta pertanto:

$$f = -\frac{\Phi_\Sigma}{dt} = -B_0 L \cos\theta L\frac{dx}{dt} = -B_0 L v \cos\theta \tag{39}$$

b) Per effetto della (39) nel circuito c scorre (in senso orario) una corrente $I = f/R$ dove R rappresenta la resistenza elettrica del circuito c. Poiché le guide si assumo essere conduttori perfetti, R coincide con la resistenza elettrica della sbarretta. Di conseguenza avremo:

$$I = \frac{B_0 S \cos\theta}{\rho}v \tag{40}$$

dove si è considerato che $R = \rho L/S$. Una volta che nel circuito c scorre la corrente I data dalla (40) su di esso agisce una forza magnetica data dalla seconda legge di Laplace. In particolare, la forza magnetica $d\vec{F}$ che agisce sull'elemento $d\vec{l}$ della sbarretta è data da:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times d\vec{B}_0 \tag{41}$$

Essendo B_0 verticale, la direzione di $d\vec{F}$ è orizzontale e perpendicolare a $d\vec{l}$ ossia alla sbarretta. La forza magnetica totale che agisce sulla sbarretta si ottiene integrando la (41) sull'intera lunghezza della sbarretta:

$$\vec{F} = \int_L d\vec{F} = ILB_0\hat{t} = \frac{B_0^2 LS\cos\theta}{\rho} v\hat{t} \tag{42}$$

dove $\hat{t}$ rappresenta il versore orizzontale perpendicolare alla sbarretta e diretto nella direzione che porta verso l'interno del circuito c. La (42) fornisce la relazione cercata per la forza magnetica agente sulla sbarretta. Il modulo della componente di $\vec{F}$ nella direzione delle guide è data da:

$$F_g = F\cos\theta = \frac{B_0^2 LS\cos^2\theta}{\rho} v \tag{43}$$

Si noti che F_g tende a frenare il moto della sbarretta mentre scivola verso il basso (nella direzione delle guide).

c) L'equazione del moto per la sbarretta risulta essere:

$$mg\sin\theta - F_g = m\frac{dv}{dt} \tag{44}$$

Sostituendo la (43) nella (44) l'equazione del moto diventa:

$$g\sin\theta - \frac{B_0^2 LS\cos^2\theta}{m\rho} v = \frac{dv}{dt} \tag{45}$$

Ponendo:

$$\tau = \frac{m\rho}{B_0^2 LS\cos^2\theta} \tag{46}$$

la (45) diventa:

$$g\sin\theta - \frac{v}{\tau} = \frac{dv}{dt} \tag{47}$$

La generica soluzione delle (47) si ottiene sommando la generica soluzione dell'omogenea associata ad una soluzione particolare dell'equazione completa. L'equazione omogenea associata alla (47) risulta:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau} \tag{48}$$

la cui generica soluzione risulta:

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} \tag{49}$$

Una soluzione particolare della (47) si ottiene ponendo in essa $v = v_p$ costante:

$$v_p = \tau g\sin\theta \tag{50}$$

La generica soluzione della (47) risulta pertanto:

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + v_p = Ae^{-t/\tau} + \tau g\sin\theta \tag{51}$$

La costante A si determina imponendo che all'istante $t = 0$ la sbarretta è ferma:

$$v(t) = \tau g\sin\theta\left(e^{-t/\tau} - 1\right) \tag{52}$$

Nel limite per cui $t \to \infty$ si ottiene:

$$v(\infty) = \lim_{t\infty\infty} v(t) = \tau g\sin\theta = \frac{mg\rho\sin\theta}{B_0^2 LS\cos^2\theta} \tag{53}$$