Prova di Esame di Fisica Generale I
Corso di Laurea in Matematica (L-35)
29 aprile 2024

Esercizio 1

a) Consideriamo la direzione individuata dal filo che collega le masse m_1, m_2 ed m_3 e assumiamo come positivo il verso da m_1 ad m_3. Su tutte le masse agisce la forza peso verticale e diretta verso il basso, la tensione dei fili (su m_1 agisce τ_{12}, su m_3 agisce τ_{23} e su m_2 entrambe le tensioni) e la reazione vincolare sviluppata dalle superfici d'appoggio. Se supponiamo che solo la superficie orizzontale è scabra, su m_1 agisce anche la forza di attrito statico. Per quanto riguarda le masse m_1 e m_2, essendo disposte orizzontalmente, la forza peso è completamente bilanciata dalla reazione vincolare esercitata dalla superficie di appoggio. Su m_3, invece, agisce una componente della forza peso non bilanciata dalla reazione vincolare di modulo pari a $m_3 g \sin\alpha$. Proiettando le varie forze descritte lungo la direzione individuata dal filo, le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} -F_{A_1} + \tau_{12} = 0 \\ -\tau_{12} + \tau_{23} = 0 \\ -\tau_{23} + m_3 g \sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove F_{A_1} rappresenta la forza di attrito statico tra m_1 e superficie orizzontale. Sommando le tre equazioni del sistema (1) si ottiene facilmente:

$$F_{A_1} = m_3 g \sin\alpha \tag{2}$$

Per definizione la forza d'attrito statico ha un valore massimo pari a $\mu_s N$. Il modulo della reazione vincolare N esercitato dalla superficie orizzontale nella situazione in cui sulla massa m_1 viene fissata la massa aggiuntiva m è pari a $N = (m_1 + m)g$. Da cui si ottiene:

$$F_{A_1} = m_3 g \sin\alpha \leq \mu_s (m_1 + m) g \qquad m \geq \frac{m_3}{\mu_s}\sin\alpha - m_1 \tag{3}$$

Si evince, quindi, che il valore minimo m_{min} che garantisce l'equilibrio è pari a:

$$m_{min} = \frac{m_3}{\mu_s}\sin\alpha - m_1 \approx 19.65\text{kg} \tag{4}$$

b) Se sussiste attrito anche tra le masse m_2 ed m_3 e il blocco B allora le condizioni di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} -F_{A_1} + \tau_{12} = 0 \\ -F_{A_2} - \tau_{12} + \tau_{23} = 0 \\ -F_{A_3} - \tau_{23} + m_3 g \sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{5}$$

dove F_{A_2} e F_{A_3} rappresentano le forze di attrito statico tra le masse m_2 e m_3 e il blocco B. Sommando le tre equazioni del sistema (5) si ottiene facilmente:

$$F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3} = m_3 g \sin\alpha \tag{6}$$

Ragionando in maniera analoga a quanto fatto precedentemente, si ricava:

$$F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3} = m_3 g \sin\alpha \leq \mu_s (m_1 + m + m_2 + m_3 g \cos\alpha) g \tag{7}$$

da cui, dopo semplici calcoli, si ottiene:

$$m_{min} = \frac{m_3}{\mu_s}(\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha) - m_1 - m_2 \approx 16.15\text{kg} \tag{8}$$

c) e **d)** Una volta rimossa la massa m il sistema delle masse m_1, m_2 ed m_3 non è più in equilibrio e pertanto si mette in moto con accelerazione a positiva (considerando il verso scelto precedentemente). Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} -\mu_d m_1 g + \tau_{12} = m_1 a \\ -\mu_d m_2 g - \tau_{12} + \tau_{23} = m_2 a \\ -\mu_d m_3 g \cos\alpha - \tau_{23} + m_3 g \sin\alpha = m_3 a \end{cases} \tag{9}$$

dove si è esplicitata la forza di attrito dinamico in termini di coefficiente di attrito dinamico e della corrispondente reazione vincolare. Risolvendo il sistema (9) nelle incognite a, τ_{12} e τ_{23} si ottiene:

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_3 \sin\alpha - \mu_d(m_1 + m_2 + m_3\cos\alpha)}{m_1+m_2+m_3} g \approx 4.64 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ \tau_{12} = [\sin\alpha + \mu_d(1-\cos\alpha)] \dfrac{m_1 m_3}{m_1+m_2+m_3} g \approx 11.23\mathrm{N} \\ \tau_{23} = [\sin\alpha + \mu_d(1-\cos\alpha)] \dfrac{m_3(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3} g \approx 16.85\mathrm{N} \end{cases} \tag{10}$$

Esercizio 2

a) Per determinare la tensione τ del filo occorre imporre che la posizione in cui si trova il sistema ($\alpha \equiv \alpha_0 = \pi/6$) sia di equilibrio. Per far ciò occorre imporre che il risultante delle forze esterne e il momento totale delle forze esterne siano entrambi nulli. Tuttavia, per effetto dei vari vincoli, il sistema formato dalle due sbarrette può solo ruotare intorno al punto O. Di conseguenza basta imporre unicamente che il momento delle forze esterne rispetto al polo O sia nullo.

Le forze che agiscono sul sistema delle due sbarrette sono la forza peso (applicata nel suo cento di massa), la tensione τ del filo (applicata nel punto in cui le due sbarrette sono state saldate) e la reazione vincolare che si sviluppa nel punto O. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel punto O, con asse x orizzontale diretto da sinistra verso destra, con asse y verticale diretto verso l'alto e con asse z perpendicolare al piano formato dal sistema delle due sbarrette e uscente da esso. La condizione di equilibrio si scrive come:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_c \times \vec{F}_p + \vec{r} \times \vec{\tau} = \vec{0} \tag{11}$$

dove $\vec{r}_c$ è il vettore posizione del centro di massa del sistema delle due sbarrette, $\vec{F}_p$ la forza peso data dalla massa totale del sistema ($3m$) per $\vec{g}$, $\vec{r}$ il vettore posizione del punto in cui sono state saldate le due sbarrette e $\vec{\tau}$ la tensione del filo (verticale e diretta verso l'alto). Si noti che la reazione vincolare che si sviluppa nel punto O non contribuisce a $\vec{M}_O$ in quanto applicata proprio nel polo rispetto al quale tale momento viene calcolato. Indicando con $\hat{k}$ il versore dell'asse z e svolgendo i prodotti vettoriali nella (11) si ottiene:

$$\vec{M}_O = (-3x_c mg + l\cos\alpha_0 \tau)\hat{k} = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \tau = \frac{3x_c}{l\cos\alpha_0} mg \tag{12}$$

dove x_c rappresenta la coordinata x del vettore $\vec{r}_c$. Determiniamo, quindi, le coordinate del vettore $\vec{r}_c$ nel sistema di riferimento scelto. Poiché entrambe le sbarrette sono omogeee il centro di massa di ognuna di esse si trova nel loro punto medio. Se indichiamo rispettivamente con $\vec{r}_{A_c}$ e $\vec{r}_{B_c}$ il vettore che individua il centro di massa delle due singole sbarrette quando esse sono disposte nella posizione indicata in figura, da semplici considerazioni geometriche si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{r}_{A_c} \equiv \left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha_0; -\dfrac{1}{2}\sin\alpha_0\right) l \\ \vec{r}_{B_c} \equiv \left(\cos\alpha_0 - \dfrac{1}{2}\sin\alpha_0; -\sin\alpha_0 - \dfrac{1}{2}\cos\alpha_0\right) l \end{cases} \tag{13}$$

Una volta note le coordinate dei centri di massa delle singole sbarrette possiamo facilmente calcolare le coordinate del centro di massa del sistema formato da entrambe assimilando le sbarrette a due punti materiali di massa pari all'intera massa delle singole sbarrette le cui posizioni sono individuate dai vettori $\vec{r}_{A_c}$ e $\vec{r}_{B_c}$. Per definizione la posizione del centro di massa di un sistema formato da due punti materiali disposti in posizioni note è data da:

$$\vec{r}_c = \frac{m_A \vec{r}_{A_c} + m_B \vec{r}_{B_c}}{m_A + m_B} = \frac{\vec{r}_{A_c} + 2\vec{r}_{B_c}}{3} \tag{14}$$

Sostituendo le (13) nella (14):

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{5\cos\alpha_0 - 2\sin\alpha_0}{6} l \\ y_c = -\dfrac{5\sin\alpha_0 + 2\cos\alpha_0}{6} l \end{cases} \tag{15}$$

Inserendo, infine, la prima delle (15) nella (12) si ottiene:

$$\tau = \left(\frac{5}{2} - \tan\alpha_0\right) mg \approx 9.43\text{N} \tag{16}$$

b) Una volta che il filo viene tagliato, il sistema delle due sbarrette inizia a ruotare intorno al punto O in senso orario partendo da fermo. Per determinare la velocità angolare quando il sistema forma un angolo $\alpha \equiv \alpha_1 = \pi/3$ basta applicare la conservazione dell'energia (non essendo presenti forze dissipative). Inizialmente il sistema è fermo quindi la sua enegia iniziale è pari alla sua energia potenziale $U_0 = 3mgy_{c_0}$ dove y_{c_0} rappresenta la quota del centro di massa del sistema in corrispondenza di $\alpha = \alpha_0$. Quando il sistema si trova nella posizione $\alpha = \alpha_1$ la sua energia è pari alla somma della sua energia cinetica $T_1 = 1/2 I_O \omega^2$ (dove I_O rappresenta il momento di inerzia del sistema delle due sbarrette calcolato rispetto all'asse di rotazione passante per O e ω la sua velocità angolare) e dell'energia potenziale $U_1 = 3mgy_{c_1}$ (dove y_{c_1} rappresenta la quota del centro di massa del sistema in corrispondenza di $\alpha = \alpha_1$). Si ottiene quindi:

$$3mgy_{c_0} = 3mgy_{c_1} + \frac{1}{2} I_O \omega^2 \qquad \rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{6mg(y_{c_0} - y_{c_1})}{I_O}} \tag{17}$$

Per ottenere I_O possiamo semplicemente sommare i momenti di inerzia I_O^A e I_O^B delle singole sbarrette calcolati rispetto ad un asse passante per O ($I_O = I_O^A + I_O^B$). Inoltre, applicando il teorema di Huygens-Stainer, possiamo esprimere i momenti I_O^A e I_O^B in termini dei momenti calcolati rispetto ad un asse passante per il loro centro di massa:

$$I_O = I_O^A + I_O^B = m_A r_{A_c}^2 + I_c^A + m_B r_{B_c}^2 + I_c^B \tag{18}$$

Si noti che nello scrivere la (18) si è considerato che per la sbarretta A l'asse di rotazione passante per O e quello ad esso parallelo passante per il suo centro di massa sono ad una distanza pari al modulo del vettore $\vec{r}_{A_c}$ le cui coordinate sono date dalla prima delle (13). Analogamente, per la sbarretta B l'asse di rotazione passante per O e quello passante per il suo centro di massa distano di una quantità pari al modulo del vettore $\vec{r}_{B_c}$ le cui coordinate sono date dalla seconda delle (13). Tenendo conto delle (13) e del fatto che $I_c = ml^2/12$, dopo semplici passaggi si ottiene $I_O = 3ml^2$. Sostituendo tale valore nella (17) e utilizzando la (15) per esprimere le ordinate y_{c_0} e y_{c_1} si ha:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(y_{c_0} - y_{c_1})}{l^2}} = \sqrt{\frac{5(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_0) + 2(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)}{3} \frac{g}{l}} \approx 4.24 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{19}$$

Il modulo della velocità del centro di massa v_c è dato dalla relazione $v_c = \omega r_c$. Tenendo quindi conto della (15) e della (19) si ottiene:

$$v_c = \sqrt{\frac{29}{108}\left[5(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_0) + 2(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)\right] gl} \approx 0.76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{20}$$

Esercizio 3

a) Calcoliamo le variabili p, V e T in corrispondenza degli stati A, B e C e il numero di moli n del gas.

Per quanto riguarda lo stato A, sono note V_A, T_A e p_A di conseguenza possiamo calcolare n utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$n = \frac{p_A V_A}{R T_A} \approx 0.2\mathrm{mol} \tag{21}$$

Relativamente allo stato B è dato p_B. Tuttavia sappiamo che la trasformazione $A \to B$ è isocora e quindi $V_B = V_A$. Possiamo quindi calcolare T_B tenendo conto che nella trasformazione il rapporto p/T si mantiene costante:

$$T_B = \frac{p_B}{p_A} T_A = 900\mathrm{K} \tag{22}$$

Infine, per quanto riguarda lo stato C è dato p_C e sappiamo che $T_C = T_B$. Trattandosi di un'isoterma possiamo calcolare V_C utilizzando la legge di Boyle:

$$V_C = \frac{p_B}{p_C} V_A = 15\ell \tag{23}$$

Il grafico nel piano pV delle trasformazioni subite dal gas è riportato in figura 1.

b) Essendo la trasformazione $A \to B$ isocora il lavoro è nullo ($W_{AB} = 0$). Dal primo principio della termodinamica si ricava, quindi, che la quantità di calore scambiato (Q_{AB}) è pari alla variazione di energia interna (ΔU_{AB}) quindi:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \int_{T_A}^{T_B} n c_V dT = n c_V (T_B - T_A) = \frac{3V_A}{2}(p_B - p_A) \approx 1519.9\mathrm{J} \tag{24}$$

dove si è tenunto conto che per gas monoatomici $c_V = 3R/2$. Nella trasformazione $A \to B$, quindi, il gas assorbe calore dall'esterno che porta solo ad un aumento della sua energia interna (riscaldamento a volume costante).

Nella trasformazione isoterma $B \to C$ la variazione di energia interna è nulla ($\Delta U_{BC} = 0$) e, di conseguenza il calore scambiato Q_{BC} è pari al lavoro effettuato W_{BC} (primo principio della termodinamica). Dalla definizione di lavoro si ottiene:

$$Q_{BC} = W_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p dV = nRT_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_B \ln\frac{V_C}{V_B} = p_B V_A \ln\frac{p_B}{p_C} \approx 1669.8\mathrm{J} \tag{25}$$

Nella trasformazione $B \to C$, quindi, il gas si espande isotermicamente compiendo lavoro sull'ambiente esterno ed assorbendo calore (in ugual misura) da esso.

Infine nella trasformazione isobara $C \to A$ il lavoro è dato da:

$$W_{CA} = p_A(V_A - V_C) = V_A\left(p_A - p_B\right) \approx -1013.3\mathrm{J} \tag{26}$$

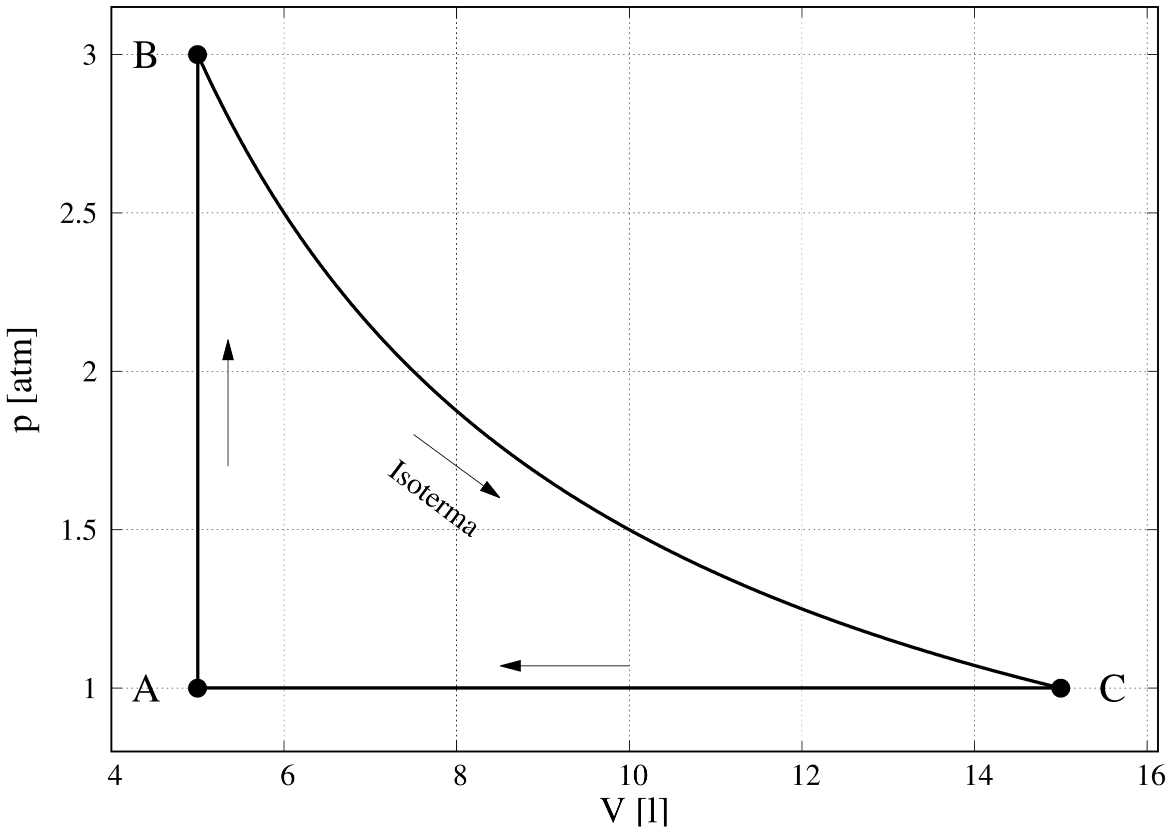

Figura 1: Trasformazioni subite dal gas

La variazione di energia interna è data da:

$$\Delta U_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = \frac{3V_A}{2}(p_A - p_B) \approx -1519.9\text{J} \tag{27}$$

Il calcore scambiato Q_{CA} si calcola facilmente applicando il primo principio della termodinamica:

$$Q_{CA} = W_{CA} + \Delta U_{CA} = \frac{5V_A}{2}(p_A - p_B) \approx -2533.1\text{J} \tag{28}$$

Si noti che Q_{CA} poteva anche essere calcolato utilizzando la formula $Q_{CA} = nc_P(T_A - T_C)$ tenendo conto che per un gas monoatomico $c_P = 5R/2$.

Nella trasformazione $C \to A$ il gas è compresso a pressione costante: viene quindi effettuato un lavoro dall'ambiente esterno sul gas con una conseguente diminuzione dell'energia interna del gas che cede calore all'ambiente esterno.

Per ottenere il lavoro, la quantità di calore scambiato e la variazione di energia interna riferite all'intero ciclo basta sommare le espressioni ottenute per le singole trasformazioni:

$$\begin{cases} W_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = V_A \left[p_B \ln \frac{p_B}{p_A} + (p_A - p_B)\right] \approx 656.5\text{J} \\ Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = V_A \left[p_B \ln \frac{p_B}{p_A} + (p_A - p_B)\right] \approx 656.5\text{J} \\ \Delta U_{tot} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Si noti come essendo un ciclo la variazione di energia interna totale è nulla e conseguentemente il calore totale scambiato dal gas è pari al lavoro totale effettuato dal gas (primo principio della termodinamica).

c) Per definizione, il rendimento del ciclo η è dato dal rapporto tra il lavoro totale effettuato dal gas (W_{tot}) e il calore totale da esso assorbito (Q_{ass}). Tenendo conto di quanto ricavato precedentemente e in particolare delle (25), (26) e (24) dopo semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{ass}} = \frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = 1 - \frac{5}{2\frac{p_B}{p_B - p_A} \ln \frac{p_B}{p_A} + 3} \approx 0.21 \tag{30}$$

Esercizio 4

Per determinare la distanza d occorre ricavare l'equazione del moto dell'elemento di massa infinitesimo di liquido dm una volta fuoriuscito dal foro. Si tratta ovviamente del moto di un proiettile di massa dm sparato dall'altezza h_1 con una velocità iniziale v_1 pari alla velocità con cui l'elemento di massa infinitesimo di liquido fuoriesce dal foro (che si suppone essere perpendicolare alla superficie del foro e, quindi, orizzontale). Per determinare v_1 possiamo applicare la legge di Bernoulli considerando la superficie libera del fluido (punto 0) e il punto in cui è praticato il foro (punto 1):

$$P_0 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \tag{31}$$

dove P_0 e P_1 rappresentano le pressioni del fluido nei punti 0 e 1, v_0 e v_1 i moduli della velocità del fluido negli stessi punti e ρ la densità del fluido. Dalla geometria del problema si evince che $P_0 = P_1 = P_{atm}$. Inoltre se immaginiamo che il foro sia di dimensioni trascurabili rispetto alle dimensioni del recipiente possiamo supporre che superficie libera del fluido sia ferma mentre esso fluisce dal foro (in realtà essa possiede una velocità non nulla diretta verso il basso che tuttavia consideriamo trascurabile rispetto alla velocità con cui il fluido fuoriesce dal foro). Adottando questa approssimazione possiamo porre $v_0 = 0$. Dalla (31) quindi otteniamo:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_0 - h_1)} \tag{32}$$

Nota v_1 possiamo procedere a scrivere l'equazione del moto della massa dm di fluido una volta fuoriuscita dal foro. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nella proiezione ortogonale del foro sulla superficie (orizzontale) su cui è poggiato il recipiente, con asse y verticale rivolto verso l'alto e asse x orizzontale (da sinistra a destra). In tale sistema il moto della massa dm è descritto dalla seguente legge oraria:

$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_1 \end{cases} \tag{33}$$

Per determinare d basta calcolare $x(t)$ in corrispondenza dell'istante in cui $y(t) = 0$. Procedendo in tal modo e ricordando la (32) si ottiene:

$$d = v_1 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{h_1(h_0 - h_1)} \tag{34}$$

che rappresenta l'espressione richiesta.