

TABELLA RIEPILOGATIVA DELLE FORMULAZIONI EM (Forma forte)

Problema	Eq.di Maxwell	Eq.costitutive	Eq.su interfacce tra mezzi diversi	Condizioni iniziali	Condizioni al contorno
Dominio Full Maxwell $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $\partial\Omega_\Sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ $\partial\Omega = \partial\Omega_E \cup \partial\Omega_H \cup \partial\Omega_\infty$ $t \in [0, T]$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \Omega$	$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_B(\mathbf{H}, \mathbf{x}, t)$ $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_D(\mathbf{E}, \mathbf{x}, t)$ $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_J(\mathbf{E}, \mathbf{x}, t)$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \Omega$	$[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \rho_\Sigma$ $[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $[\mathbf{E}] \times \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $[\mathbf{H}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{J}_\Sigma$ $[\mathbf{J}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = -\partial\rho_\Sigma/\partial t$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\Sigma$	$\mathbf{D} _{t=0} = \mathbf{D}_0$ $\mathbf{B} _{t=0} = \mathbf{B}_0$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$	$[\mathbf{E}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{E}^*$ su $\partial\Omega_E$ $[\mathbf{H}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{H}^*$ su $\partial\Omega_H$ regolarità su $\partial\Omega_\infty$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$
Magnetostatica $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $\partial\Omega_\Sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ $\partial\Omega = \partial\Omega_B \cup \partial\Omega_H \cup \partial\Omega_\infty$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$	$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_B(\mathbf{H}, \mathbf{x})$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$	$[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $[\mathbf{H}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{J}_\Sigma$ $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\Sigma$		$[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{B}^*$ su $\partial\Omega_B$ $[\mathbf{H}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{H}^*$ su $\partial\Omega_H$ regolarità su $\partial\Omega_\infty$ $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$
Elettrostatica $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $\partial\Omega_\Sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_E \cup \partial\Omega_\infty$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$	$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_D(\mathbf{E}, \mathbf{x})$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$	$[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \rho_\Sigma$ $[\mathbf{E}] \times \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\Sigma$		$[\mathbf{E}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{E}^*$ su $\partial\Omega_E$ $[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{D}^*$ su $\partial\Omega_D$ regolarità su $\partial\Omega_\infty$ $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$
Eddy Currents (quasi-stazionario magnetico) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $\partial\Omega_\Sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ $\partial\Omega = \partial\Omega_E \cup \partial\Omega_H \cup \partial\Omega_\infty$ $t \in [0, T]$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \Omega$	$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_B(\mathbf{H}, \mathbf{x}, t)$ $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_J(\mathbf{E}, \mathbf{x}, t)$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \Omega$	$[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $[\mathbf{E}] \times \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $[\mathbf{H}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{J}_\Sigma$ $[\mathbf{J}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\Sigma$	$\mathbf{B} _{t=0} = \mathbf{B}_0$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$	$[\mathbf{E}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{E}^*$ su $\partial\Omega_E$ $[\mathbf{H}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{H}^*$ su $\partial\Omega_H$ regolarità su $\partial\Omega_\infty$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$
Propagazione in mezzi non conduttori (assenza di sorgenti) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $\partial\Omega_\Sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ $\partial\Omega = \partial\Omega_E \cup \partial\Omega_H \cup \partial\Omega_\infty$ $t \in [0, T]$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \Omega$	$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_B(\mathbf{H}, \mathbf{x}, t)$ $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_D(\mathbf{E}, \mathbf{x}, t)$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \Omega$	$[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \rho_\Sigma$ $[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $[\mathbf{E}] \times \mathbf{n}_\Sigma = 0$ $[\mathbf{H}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{J}_\Sigma$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\Sigma$	$\mathbf{D} _{t=0} = \mathbf{D}_0$ $\mathbf{B} _{t=0} = \mathbf{B}_0$ $\forall \mathbf{x} \in \Omega$	$[\mathbf{E}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{E}^*$ su $\partial\Omega_E$ $[\mathbf{H}] \times \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{H}^*$ su $\partial\Omega_H$ regolarità su $\partial\Omega_\infty$ $\forall t, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$

Tabella 1: Modelli matematici dei più comuni problemi elettromagnetici

Metodi computazionali per la soluzione dei problemi elettromagnetici

Come visto nella sezione precedente, per ciascuno dei problemi EM che compaiono nella tabella 1 sono state proposte una o più formulazioni attraverso le cui è possibile pervenire ad una soluzione soddisfacente attraverso metodologie computazionali a carattere analitico o numerico. Si sono, cioè, definite delle formulazioni basate su campi o potenziali incogniti -differenziando ulteriormente questi ultimi in ridotti o totali, scalari o vettori, elettrici o magnetici-, ciascuna adeguata al trattamento di problemi rientranti in una specifica classe o sottoclasse.

Abbiamo visto, ad esempio, come sia possibile utilizzare metodi analitici solo nel caso di problemi che presentano domini particolarmente regolari dal punto di vista geometrico (ad es., rettangoli o cerchi in geometria bi-dimensionale, parallelepipedi, cilindri o sfere, se si opera in 3D). Per una classe di problemi omogenei leggermente più ampia, avvalendosi dell'introduzione di un adeguato sistema di coordinate o di opportune trasformazioni di coordinate (ad es. nel metodo delle trasformazioni conformi) i metodi analitici sono ancora utilizzabili. Tuttavia queste tecniche non sono automatizzabili e la loro applicazione attraverso complessi conti manuali è associata a elevata probabilità di errori, time-consuming e riservata a pochi scienziati teorici dotati di eccezionali abilità matematiche.

Nel prosieguo si introdurranno tecniche a carattere numerico utilizzabili da una più vasta platea di progettisti e adeguate al trattamento di classi di problemi decisamente più generali.

Allo scopo, dopo aver mostrato come le formulazioni differenziali presentate in tabella (1) possano essere riscritte in forma integrale attraverso l'ausilio di opportune funzioni test, si chiarirà il significato di formulazioni forti, deboli, variazionali.

A seguire, saranno introdotte le cosiddette formulazioni integrali

Infine, si presenterà una panoramica delle diverse tecniche operative disponibili per la soluzione di un problema E.M: metodi analitici, metodi numerici alle differenze finite, agli elementi finiti, agli elementi di frontiera.

Formulazioni deboli

Le formulazioni dei problemi EM discusse sinora sono state presentate nella cosiddetta "forma forte", vale a dire che la soluzione cercata doveva presentare una regolarità almeno pari all'ordine delle equazioni differenziali del problema e, contemporaneamente, soddisfare ai vincoli algebrici imposti dalle condizioni al contorno ed iniziali (n. b., i vincoli possono essere anche di tipo differenziale nel caso di condizioni al contorno di Neumann!).

Vediamo come sia possibile arrivare ad una formulazione alternativa per gli stessi problemi che imponga condizioni meno restrittive sulle soluzioni.

Si farà riferimento nel seguito al problema dell'elettrostatica, ma il metodo può essere generalizzato senza difficoltà particolari a tutte le formulazioni sinora presentate.

Siano ρ , ϕ_E e D_n opportune funzioni note e limitate in ogni punto delle variabili spaziali; Ω il dominio di definizione del problema; Σ_E , Σ_D e Σ_∞ le parti in cui è suddivisa la frontiera di Ω e su cui sono imposte rispettivamente condizioni al contorno di Dirichlet, Neumann e di regolarità all'infinito; Σ_{12} la superficie di brusca discontinuità tra i materiali 1 e 2 dotati di diverse proprietà materiali (per semplicità nel seguito si farà riferimento al caso di due soli materiali disomogenei presenti nel dominio, ma si precisa che l'ipotesi non è assolutamente limitativa!).

Il problema elettrostatico in forma forte si enuncia nel modo seguente:

Determinare la funzione scalare ϕ che soddisfi il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = -\rho \quad \text{in } \Omega \quad \left\{ \begin{array}{l} [\phi] = 0 \\ \left[\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] = 0 \end{array} \right. \quad \text{su } \Sigma_{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi|_{\Sigma_E} = \phi_E \\ \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_D} = D_n \\ |\phi|_{r \rightarrow \infty} \Big|_{\Sigma_\infty} \rightarrow 0 \quad \text{come } \frac{1}{r} \end{array} \right. \quad (1)$$

Supponiamo, ancora, per semplicità che il dominio sia tutto al finito, per cui non vi siano da imporre condizioni di regolarità all'infinito.

La prima cosa da fare è definire l'insieme all'interno del quale cerchiamo la soluzione del sistema di equazioni (1).

Evidentemente la soluzione deve appartenere all'insieme:

$$\phi \in \Phi = \{ \text{funzioni } \chi \text{ ad energia finita, sufficientemente regolari, tali che } \chi|_{\Sigma_E} = \phi_E \}$$

dove con "funzioni ad energia finita" si intendono quelle per le quali l'integrale

$$\int_{\Omega} |\nabla \chi|^2 d\Omega \quad \text{risulti limitato (se non fosse così l'energia elettrostatica immagazzinata nel}$$

sistema sarebbe illimitata e ciò non è possibile se ρ è limitata, come da ipotesi), mentre per "funzioni sufficientemente regolari" si intendono quelle per le quali la funzione $\varepsilon \nabla \phi$ abbia divergenza definita in ogni punto regolare del dominio (cioè, in tutti i punti del dominio eccetto quelli sulla frontiera Σ).

Si può dimostrare il seguente

Teorema: la forma forte (1) è equivalente alla seguente formulazione (ancora forte):

$$\text{Trovare } \phi \in \Phi \text{ tale che: } \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) + \rho) \phi' d\Omega = 0 \quad \forall \phi' \in \Phi_0 \quad (1')$$

con $\phi' \in \Phi_0 = \{ \text{funzioni } \chi \text{ ad energia finita, sufficientemente regolari, tali che } \chi|_{\Sigma_E} = 0 \}$

Applicando ad (1') l'identità $\nabla \cdot (f \underline{v}) = f \nabla \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla f$ si perviene alla forma debole equivalente (si dice debole perché le richieste di regolarità sulla soluzione, ϕ , sono ora più deboli: ci accontentiamo di una classe C^1 anziché di una classe C^2):

Trovare $\phi \in \Phi$ tale che
$$\int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \phi) \cdot \nabla \phi' d\Omega = \int_{\Omega} \rho \phi' d\Omega + \int_{\Sigma_D} D_n \phi' d\Sigma \quad \forall \phi' \in \Phi_0 \quad (2)$$

Le due formulazioni sono equivalenti nel senso che una soluzione della forma forte (1) e (1') è soluzione del problema nella forma debole (2) e viceversa.

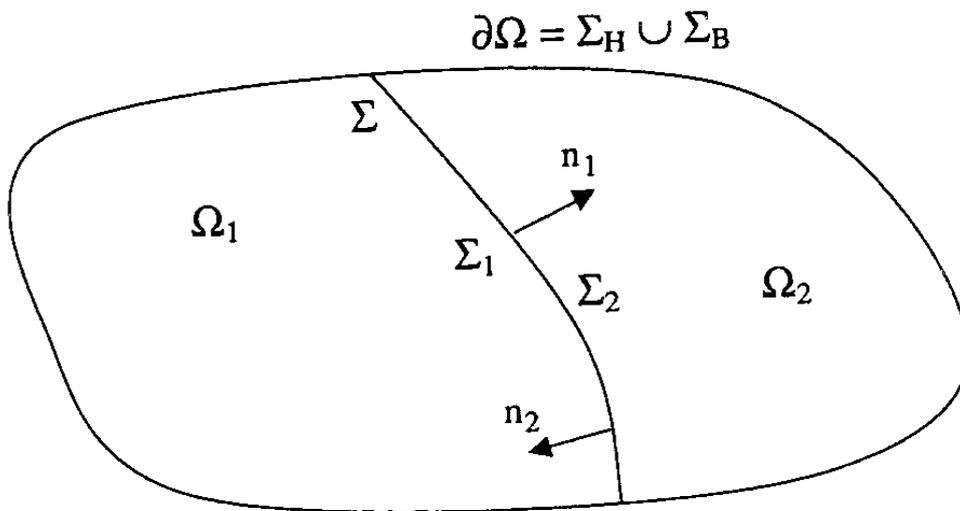


Fig.1. Geometria di riferimento per ricavare la formulazione debole

Occorre fare alcune osservazioni che risulteranno fondamentali nella discussione del metodo degli elementi finiti.

- Si definisce residuo associato all'equazione (1) il termine $r = \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) + \rho$. Nella formulazione (1') il residuo viene pesato per la *funzione test* ϕ' ed integrata sul dominio di soluzione. La logica è pertanto la seguente: *Mentre la soluzione delle equazioni nella forma differenziale è la funzione tale da annullare il residuo in ogni punto del dominio, la soluzione della forma forte integrale (1') e della forma debole (2) è la funzione tale da annullare, sul dominio di soluzione, una qualunque media del residuo pesata per una funzione test.*

Il risultato fondamentale è che, nelle ipotesi fatte, queste due soluzioni coincidono. Tale *modus operandi* spiega anche il nome di “metodo dei residui pesati” attribuito alla procedura.

- Il motivo del nome “forma debole” va ricercato nel fatto che la (2) ha senso a patto che esista il vettore $\varepsilon \nabla \phi$, senza alcun vincolo sull'esistenza della sua divergenza, cosa invece necessaria per soddisfare la (1) e la (1'). Pertanto la

(2) impone vincoli più deboli di (1) e (1') in quanto può essere applicata anche a funzioni che non sono sufficientemente regolari da soddisfare alle condizioni (1) (con alcune limitazioni nella scelta delle funzioni test, come verrà precisato più avanti). Questa proprietà verrà sfruttata a fondo nell'ambito del metodo degli elementi finiti.

- Le condizioni di raccordo sono implicite nella formulazione debole, ossia una soluzione della (2) soddisfa automaticamente alle condizioni di raccordo.
- Il valore di potenziale, ϕ_E , imposto sul contorno Σ_E sembra non comparire esplicitamente nella formulazione debole. In realtà, come si vedrà in seguito, esso è inglobato nella definizione dell'insieme Φ , all'interno del quale si cerca la soluzione. Per questo motivo le condizioni di Dirichlet sono dette *condizioni essenziali*
- Nel caso in cui occorra imporre delle condizioni omogenee di Neumann (ossia $D_n=0$) si può semplicemente omettere l'integrale di superficie che compare nella (2). Per questo motivo si dice che le condizioni omogenee di Neumann sono condizioni naturali per la formulazione debole.

GENERALIZZAZIONE DELLA FORMULAZIONE AI RESIDUI PESATI

Abbiamo visto come sia possibile utilizzare una formulazione debole equivalente a quella forte per il problema dell'elettrostatica.

Ci si chiede se, anche per le altre formulazioni EM che abbiamo presentato in precedenza, esiste la possibilità di introdurre una formulazione ai residui pesati e, in caso affermativo, sotto quali condizioni.

Ricordiamo che, avendo definito con r' il residuo dell'equazione in forma forte, il passo fondamentale della procedura è l'imposizione di

$$\int_{\Omega} r\varphi' d\Omega = 0 \quad \forall \varphi' \in \Phi_0$$

Ricordiamo ora che, se a e b sono due funzioni appartenenti a $L^2(\Omega)$, lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile su Ω , la quantità $\int_{\Omega} a b d\Omega = \langle a, b \rangle$ gode delle proprietà

del prodotto scalare in $L^2(\Omega)$, (inteso come spazio vettoriale), ossia:

1. $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

2. $\langle (k_1 a_1 + k_2 a_2), b \rangle = k_1 \langle a_1, b \rangle + k_2 \langle a_2, b \rangle$

3. Se il prodotto scalare è definito positivo: $\langle a, a \rangle \geq 0$, allora $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$

e dunque la (3) si può anche scrivere nella forma: $\langle r, \varphi' \rangle = 0 \quad \forall \varphi' \in \Phi_0$

ossia si impone che sia nulla la proiezione del residuo lungo tutte le funzioni di Φ_0 . D'altra parte, la formulazione forte richiede che l'equazione si annulli in ogni punto del dominio di soluzione.

Pertanto, si conclude che le due formulazioni sono equivalenti a patto che

1. Sia possibile introdurre una nozione di prodotto scalare (ossia che le funzioni ϕ appartengano ad uno *Spazio di Hilbert*)
2. Che l'insieme Φ_0 delle funzioni test su cui si effettuano le proiezioni sia "opportuno". Ad esempio se l'insieme Φ_0 fosse completo (cioè se, la base di Φ_0 descrivesse l'intero spazio Hilbertiano, tranne in un insieme di punti di misura nulla), saremmo certi che la (2) implicherebbe che $r=0$ quasi ovunque nel dominio di soluzione.

In altre parole l'applicabilità di una formulazione ai residui pesati:

- non dipende dalle proprietà del particolare operatore (gradiente, divergenza, rotore) coinvolto nella forma forte
- dipende dalle proprietà delle funzioni test.

Occorre sottolineare che quanto detto finora implica la rigorosa equivalenza delle due forme solo dal punto di vista puramente matematico.

Infatti, dal punto di vista numerico, quando si risolverà il problema nella sua formulazione ai residui pesati, si considererà solo un insieme approssimato delle funzioni test (contenente un numero finito di funzioni). Pertanto il risultato teorico ci garantisce che, se le funzioni approssimanti sono scelte con le giuste proprietà, allora la soluzione approssimata restituisce *al limite (per numero di funzioni test tendente ad infinito)* la soluzione della forma forte.

Da quanto detto si capisce che la formulazione ai residui pesati può essere utilizzata per un qualunque modello EM purché si presti la dovuta cautela nella scelta e nell'approssimazione delle funzioni test.

FORMULAZIONI VARIAZIONALI

Un esempio: Applicazione al problema dell'elettrostatica

La fisica ci insegna che la soluzione dell'equazione dell'elettrostatica (1) è la funzione scalare che rende minima l'energia posseduta dal campo elettrico. Vogliamo ora inquadrare questa informazione nel nostro contesto. In particolare, si può dimostrare che, definito $F(\varphi)$ il funzionale

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon |\nabla \varphi|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \rho \varphi d\Omega - \int_{\Sigma D} D_n \varphi d\Sigma \quad \forall \varphi \in \Phi \quad (3)$$

la forma debole (2) del problema elettrostatico equivale a:

- Trovare la funzione $\phi \in \Phi$ tale che $F(\phi) \leq F(\psi) \quad \forall \psi \in \Phi$

Che chiameremo *formulazione variazionale del problema*. In altri termini, dobbiamo trovare un funzionale che assuma il valore minimo in corrispondenza della soluzione del problema.

Dall'equivalenza tra la formulazione variazionale e quella debole, e dall'equivalenza tra la forma debole e la forma forte, deriva che la formulazione variazionale risulta equivalente alla formulazione forte.

IL PUNTO DI VISTA DELL'ANALISI FUNZIONALE

Anche nel caso delle formulazioni variazionali è possibile provare a generalizzare l'equivalenza asserita per il caso particolare del problema elettrostatico al modello di un generico altro problema EM.

Si consideri il generico problema lineare nella sua forma forte

$$Lx = f \quad (4)$$

dove L è l'operatore lineare (eventualmente completo delle condizioni di raccordo e al contorno), x è l'incognita e f il termine noto (che comprende eventualmente i valori assegnati al contorno).

Introduciamo un prodotto scalare nello spazio funzionale in cui cerchiamo la soluzione.

Si dice che l'operatore L è

- *auto-aggiunto* rispetto al prodotto scalare introdotto, se risulta $\langle Lx, y \rangle = \langle x, Ly \rangle \quad \forall x, y$
- *definito positivo* rispetto al prodotto scalare introdotto, se risulta $\langle Lx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x, \langle Lx, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Nel caso in cui $x \in \mathcal{R}^n$, allora un generico operatore lineare si può rappresentare attraverso una matrice, e come prodotto scalare si può scegliere l'usuale prodotto matrice per colonna.

In questo caso le nozioni di operatore auto-aggiunto e definito positivo si riducono a quelle di matrice simmetrica e definita-positiva.

Si consideri ora il funzionale
$$F(x) = \frac{1}{2} \langle Lx, x \rangle - \langle f, x \rangle$$

Per esso vale il seguente risultato:

Teorema: Se l'operatore L è auto-aggiunto e definito positivo rispetto al prodotto scalare introdotto, la soluzione x^ della (4) è un punto di minimo del funzionale $F(x)$.*

Da questo teorema è possibile dedurre che la possibilità di individuare una formulazione variazionale per il problema considerato dipende, oltre che dall'introduzione di un prodotto scalare nello spazio vettoriale in cui si cerca la soluzione, **anche dalle proprietà dell'operatore considerato.**

Pertanto, in generale, non per tutti gli operatori è possibile trovare una formulazione variazionale equivalente a quella forte (vale a dire, associare al particolare problema sotto indagine un funzionale che risulti minimo in corrispondenza della soluzione).

Vedremo, al contrario, che anche per la semplice equazione di Poisson possono sorgere dei problemi.

Queste osservazioni ci permettono di concludere che, nonostante le formulazioni variazionali presentino l'indubbio vantaggio di un'interpretazione fisica immediata (corrispondono alla determinazione della particolare soluzione che minimizzi una qualche funzione energia o potenza, immagazzinata nel dominio), risultino di applicabilità molto meno generale rispetto alle formulazioni basate sui residui pesati.

Applicazione all'equazione di Poisson

Applichiamo i concetti precedenti all'equazione di Poisson che, per il problema dell'elettrostatica, assume la forma seguente: $-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = \rho$ in Ω

In questo caso l'operatore L è definito come: $L = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla)$ (5)

Ci chiediamo sotto quali condizioni tale operatore sia auto-aggiunto rispetto all'usuale prodotto scalare in $L^2(\Omega)$

Dalla seconda identità di Green, risulta:

$$\begin{aligned} \langle Lx, y \rangle &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\epsilon \nabla x) y d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\epsilon \nabla y) x d\Omega + \int_{\partial\Omega} \epsilon \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS = \\ &= \langle Ly, x \rangle + \int_{\partial\Omega} \epsilon \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (6)$$

E dunque l'operatore (5) risulta auto-aggiunto se e solo se risulta nullo l'integrale di superficie nella (6).

Per quanto riguarda invece la condizione di definita positività, risulta per la prima identità di Green:

$$\langle Lx, x \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\epsilon \nabla x) x d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon \nabla x \cdot \nabla x d\Omega - \int_{\partial\Omega} \epsilon x \frac{\partial x}{\partial n} dS \quad (7)$$

E dunque l'operatore L risulta definito positivo rispetto al prodotto scalare, se e solo nella (7) risulta non positivo l'integrale di superficie

Si conclude che se, ad esempio, l'incognita soddisfa a condizioni al contorno omogenee di Dirichlet o di Neumann, allora l'operatore L è auto-aggiunto e definito positivo rispetto al prodotto scalare e dunque si può assumere come funzionale da minimizzare $F(x) = \frac{1}{2} \langle Lx, x \rangle - \langle f, x \rangle$ (8)

Se invece le condizioni al contorno non sono nulle, ci sono 3 possibilità:

1. Si definisce un nuovo prodotto scalare sullo spazio di ricerca della soluzione
2. si considera un funzionale da minimizzare differente da (8)
3. si introduce una nuova incognita che soddisfi alle giuste condizioni al contorno.

Formulazioni integrali

Finora abbiamo descritto delle formulazioni che permettono di trovare il campo elettrico o magnetico (o grandezze a questi campi correlate) in tutti i punti dello spazio. Tutte queste formulazioni sono espresse in termini di un operatore differenziale e, per questo, sono chiamate “formulazioni differenziali”.

Un diverso approccio si basa sulla considerazione che tutti i campi sono generati da sorgenti (ad esempio, nel caso del campo elettrostatico, le sorgenti sono le cariche elettriche).

Per questo motivo è possibile assumere le stesse sorgenti quali incognite in termini delle quali impostare la soluzione del problema. Operando in tal modo, come si vedrà tra breve, si perviene a formulazioni nelle quali le sorgenti incognite, sono correlate ai campi -assunti noti in un certo numero di punti del dominio- attraverso operatori integrali (da qui il nome di “formulazioni integrali”).

Un vantaggio evidente è che, mentre il campo va cercato in tutti i punti dello spazio, le sorgenti sono confinate in regioni di spazio ben note a priori (ad esempio, in elettrostatica, le cariche libere possono esistere solo sulle superfici dei conduttori).

D'altra parte, anche i principali svantaggi correlati a questo tipo di formulazioni si intuiscono abbastanza facilmente: facendo sempre riferimento al problema elettrostatico, nel caso in cui nel dominio siano presenti materiali dielettrici, occorre inserire tra le sorgenti incognite anche le cariche di polarizzazione.

Ne consegue che le formulazioni integrali sono di applicazione non facile in domini contenenti mezzi materiali.

CASO ELETTROSTATICO

Si consideri un conduttore, immerso nel vuoto, la cui superficie, Σ_c , sia un'equipotenziale di valore assegnato ϕ_c . Su Σ_c sarà localizzata una carica superficiale σ , la cui determinazione consentirebbe di calcolare il potenziale nel generico punto

spaziale $\underline{\mathbf{r}}$ attraverso la legge di Coulomb:
$$\phi(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma_c} \frac{\sigma(\underline{\mathbf{r}}')}{|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|} dS \quad (9)$$

nella quale la variabile di integrazione si è denotata con $\underline{\mathbf{r}}'$.

Ovviamente la (9) vale anche nei punti di Σ_c dove il potenziale è noto. Pertanto la densità di carica deve essere tale da soddisfare la relazione

$$\phi_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma_c} \frac{\sigma(\underline{\mathbf{r}}')}{|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|} dS \quad \forall \underline{\mathbf{r}} \in \Sigma_c \quad (9')$$

La (9') è un'equazione integrale nell'incognita σ e può essere assunta come punto di partenza per determinare una formulazione debole del problema:

$$\int_{\Sigma_c} \phi_c \sigma'(\underline{\mathbf{r}}) dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma_c} \left(\int_{\Sigma_c} \frac{\sigma(\underline{\mathbf{r}}') \sigma'(\underline{\mathbf{r}})}{|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|} dS' \right) dS \quad \forall \sigma' \quad (10)$$

Nella relazione (10) σ' è un'arbitraria funzione test definita su Σ_c .

Si noti che l'integrale al secondo membro risulta singolare quando $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}'$ e, pertanto, la sua determinazione richiede l'assunzione di precauzioni particolari.

CASO MAGNETOQUASISTATICO

Nel caso magneto-quasi-statico, le sorgenti incognite sono le correnti indotte nei materiali conduttori. Supponendo che nel dominio non siano presenti materiali magnetici, le equazioni differenziale in forma forte sono:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} & \text{in } V \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}} & \text{in } V \\ \underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}} & \text{in } V_c \end{cases} \quad (11)$$

Assumendo come incognita il potenziale vettore magnetico e utilizzando la gauge di Coulomb, si assicura in modo automatico la solenoidalità del campo di induzione magnetica.

Inoltre, la posizione $\underline{\mathbf{E}} = -\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V\right)$ garantisce automaticamente il soddisfacimento della legge di Faraday.

La legge di Ampere viene soddisfatta imponendo la relazione di Biot –Savart:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Sigma_c} \frac{\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}')}{|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'|} dV' \quad (12)$$

Per soddisfare a tutte le equazioni del modello resta, pertanto, da garantirsi il soddisfacimento della sola legge di Ohm, $\eta \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ nel dominio conduttore V_c . Sostituendo le relazioni precedenti, la legge di Ohm assume l'aspetto di un'equazione integrale nell'incognita \mathbf{J} :

$$\eta \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V_c} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) + \nabla \phi = 0 \text{ in } V_c \quad (13)$$

nella quale uno speciale trattamento viene riservato al trattamento del termine $\nabla \phi$. Le condizioni di solenoidalità, al contorno e sulle interfacce dei conduttori cui deve

soddisfare il campo di corrente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s |_{\Sigma_c} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = 0 \text{ in } V_c \\ \underline{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \text{ continua in } V_c \end{array} \right.$$

danno origine alla seguente forma debole:

$$\int_{V_c} \eta \mathbf{J}(\mathbf{r}) \mathbf{J}'(\mathbf{r}) dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \left(\int_{V_c} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) dV = 0 \quad \forall \text{ funzione test } \mathbf{J}' \quad (14)$$