

CAPITOLO VI

Formulazioni dei problemi di Campo Elettromagnetico.

Introduzione

Le equazioni di Maxwell sono universalmente riconosciute come un esempio mirabile ed elegante di modello fisico-matematico per il carattere estremamente compatto col quale inquadrano ogni tipo di problematica si possa presentare nel settore dell'elettromagnetismo.

In forma differenziale ed integrale, si scrivono nella forma seguente:

Equazioni di Maxwell in forma integrale nei mezzi materiali:

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \rho_{lib} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\partial \underline{\mathbf{B}} / \partial t \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \partial \underline{\mathbf{D}} / \partial t \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = -\partial \rho_{lib} / \partial t \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_{\Sigma} \underline{\mathbf{D}} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{V_{\Sigma}} \rho_{lib} dV \quad \text{legge di Gauss} \\ \oint_{\gamma} \underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{t} dl = -\iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad \text{legge di Faraday-Neumann} \\ \oiint_{\Sigma} \underline{\mathbf{B}} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad \text{legge di Gauss (per il campo magnetico)} \\ \oint_{\gamma} \underline{\mathbf{H}} \cdot \hat{t} dl = \iint_{S_{\gamma}} \left(\underline{\mathbf{J}}_{lib} + \frac{\partial \underline{\mathbf{D}}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS \quad \text{legge di Ampère-Maxwell} \\ \oiint_{\Sigma} \underline{\mathbf{J}}_{lib} \cdot \hat{n} dS = -\iiint_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} dV \quad \text{legge di conservazione della carica} \end{array} \right.$
(1a)	(1b)

dove si è denotato con $\underline{\mathbf{E}}$ il campo elettrico, $\underline{\mathbf{D}}$ il vettore spostamento elettrico, $\underline{\mathbf{H}}$ il campo magnetico, $\underline{\mathbf{B}}$ il campo di induzione magnetica, $\underline{\mathbf{J}}$ la densità di corrente, ρ_{lib} la densità di carica libera. Si noti che l'ultima equazione è implicata dalle precedenti.

Le equazioni (1) costituiscono un sistema di eq. differenziali alle derivate parziali, definite nel dominio Ω . Le incognite sono, in generale, rappresentate dai campi vettoriali summenzionati. I forzamenti (ovvero le quantità note perché imposte dall'esterno) sono costituiti dai campi $\underline{\mathbf{J}}^*$ e ρ_{lib} , presenti in alcune parti del dominio.

Per ottenere soluzione unica, occorre aggiungere al modello (5.1)

- le relazioni costitutive, che per i mezzi lineari, isotropi, tempo-invarianti assumono la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}^* \\ \underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \end{array} \right. \quad (2) \quad \text{dove } \underline{\mathbf{J}}^* \text{ è il campo di corrente impresso;}$$

- opportune condizioni al contorno sulla frontiera $\partial\Omega$ del dominio (in particolare, allo scopo, va specificato il valore delle componenti tangenziali dei campi $\underline{\mathbf{E}}$ oppure $\underline{\mathbf{H}}$; in alternativa possono essere assegnate le componenti normali dei campi $\underline{\mathbf{J}}$, $\underline{\mathbf{D}}$ o $\underline{\mathbf{B}}$), \forall istante di tempo t . Sia \mathbf{n}_s il versore normale uscente da $\partial\Omega$. Si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = D_n \\ \underline{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = B_n \\ \underline{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{n}}_s = \underline{\mathbf{E}}_t \\ \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{n}}_s = \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = J_n \end{array} \right. \quad (3)$$

Nel caso in cui la frontiera del dominio si estenda all'infinito, occorre imporre le cosiddette condizioni di regolarità: i campi devono tendere a zero col quadrato oppure col cubo della distanza a seconda se le sorgenti siano dei monopoli oppure dei bipoli.

- Le equazioni differenziali alle derivate parziali implicano che le componenti dei campi incogniti soddisfino a dei requisiti minimi di regolarità spaziale e ciò si verifica solo nel caso di domini omogenei o nei quali le caratteristiche dei materiali variano dolcemente.

Nei problemi pratici, vengono sovente messi in contatto materiali omogenei differenti e, le condizioni di regolarità non sono soddisfatte.

Occorre allora scrivere tante volte il modello (1) quanti sono i differenti materiali, e legare, in ogni istante di tempo, t , le soluzioni attraverso le cosiddette condizioni di interfaccia sulle superfici di separazione dei domini che presentano brusche discontinuità delle proprietà materiali.

$$\left\{ \begin{array}{l} [\underline{\mathbf{D}}_1 - \underline{\mathbf{D}}_2] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = [\underline{\mathbf{D}}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = \rho_s \\ [\underline{\mathbf{B}}_1 - \underline{\mathbf{B}}_2] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = [\underline{\mathbf{B}}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = 0 \\ [\underline{\mathbf{E}}_1 - \underline{\mathbf{E}}_2] \times \hat{\mathbf{n}}_s = [\underline{\mathbf{E}}] \times \hat{\mathbf{n}}_s = 0 \\ [\underline{\mathbf{H}}_1 - \underline{\mathbf{H}}_2] \times \hat{\mathbf{n}}_s = [\underline{\mathbf{H}}] \times \hat{\mathbf{n}}_s = \underline{\mathbf{J}}_s \\ [\underline{\mathbf{J}}_1 - \underline{\mathbf{J}}_2] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = [\underline{\mathbf{J}}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = -\partial\rho_s/\partial t \end{array} \right. \quad (4)$$

Dove sono stati denotati con i pedici 1 e 2 i due mezzi separati dalla superficie di interfaccia $\hat{\mathbf{n}}_s$ è la normale alla superficie di interfaccia diretta da 1 verso 2, mentre con $\underline{\mathbf{J}}_s$ e ρ_s sono indicate rispettivamente correnti e cariche superficiali eventualmente presenti

- Per problemi non stazionari occorre assegnare anche i valori iniziali dei campi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{x}, 0) = \underline{\mathbf{J}}_0 \\ \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, 0) = \underline{\mathbf{B}}_0 \\ \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, 0) = \underline{\mathbf{D}}_0 \end{array} \right. \quad (5)$$

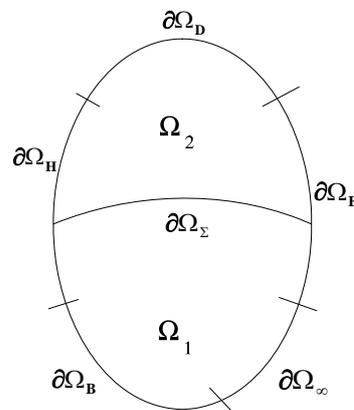


Fig.1 Dominio geometrico per i problemi di tabella 1

1) Modelli E.M. classici per formulazioni F.E.M.

Le equazioni di Maxwell nella loro forma completa ammettono, in generale, soluzioni a carattere “propagativo”, ossia onde elettromagnetiche che variano nello spazio e nel tempo eccitandosi reciprocamente e che si muovono all’interno del dominio alla velocità della luce.

Questo comportamento è tipico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali cosiddetti “iperbolici”.

Tuttavia in molte situazioni di interesse pratico, accade che le derivate temporali siano nulle o trascurabili. In tali casi (limiti statici o quasi-statici) si perviene a dei modelli semplificati (ellittici o parabolici) delle equazioni di Maxwell nelle quali, per le soluzioni, il ritardo di propagazione del segnale risulta essere nullo o può essere trascurato.

A seconda dei campi che costituiscono oggetto di interesse, si parlerà, di volta in volta, di modello elettrostatico, magnetostatico, elettro-cinematico stazionario, quasi-stazionario magnetico ed elettrico.

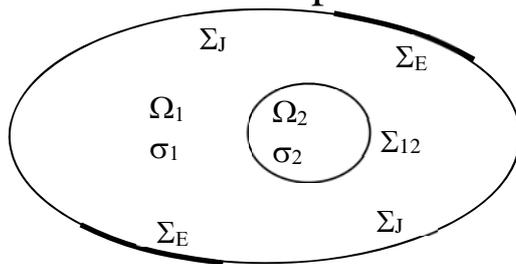
Tutti questi modelli verranno analizzati in dettaglio e, per ciascuno, verranno indicate le incognite potenziali più opportune da usare per la ricerca della soluzione.

2) **Elettro-cinematica stazionaria (ECS) (o conduzione stazionaria)**

In tale modello si assume

1. di essere in regime stazionario
2. che nel dominio siano presenti correnti stazionarie $\underline{\mathbf{J}} \neq 0$
3. che nel dominio siano presenti materiali conduttori ($\sigma \neq 0$)

Fig.2



Con riferimento al problema raffigurato in figura (quanto diremo è generale ma, per semplicità, si farà riferimento al caso di dominio costituito da due soli materiali omogenei di differente conducibilità elettrica), il modello matematico assume la forma

- Le condizioni al contorno sulla frontiera diventano: (l’ultima condizione si applica solo se una parte della frontiera del dominio si trova all’infinito $\Sigma_\infty \neq 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}_k = 0 \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_k = 0 \quad k = 1, 2 \\ \underline{\mathbf{J}}_k = \sigma_k \underline{\mathbf{E}}_k + \underline{\mathbf{J}}_k^* \\ \underline{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S \Big|_{\Sigma_J} = 0 \\ \underline{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{n}}_S \Big|_{\Sigma_E} = 0 \\ \left| \underline{\mathbf{E}} \right|_{r \rightarrow \infty} \Big|_{\Sigma_\infty} \rightarrow 0 \text{ come } \frac{1}{r^2} \end{array} \right.$$

- Sulla superficie di separazione tra i due domini, Σ_{12} , si applicano le condizioni di interfaccia:

$$\begin{cases} [\mathbf{E}] \times \hat{\mathbf{n}}_s = 0 \\ [\mathbf{J}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = 0 \end{cases}$$
- Poiché ci si trova in regime stazionario non occorre specificare alcuna condizione iniziale sui campi.

Tra le varie formulazioni dell'elettromagnetismo questa è la più semplice da trattare per le sue peculiarità:

1. molti materiali conduttivi di interesse applicativo sono effettivamente lineari;
2. l'irrotazionalità del campo elettrico consente l'impiego del potenziale scalare elettrico per la soluzione: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Così facendo, occorre ricercare la soluzione in termini attraverso un campo incognito di tipo scalare anziché vettoriale (quest'ultimo corrisponde a ben tre campi scalari).

Si noti che la soluzione in termini di potenziale risulta unica a meno di una costante additiva. In altre parole, come già visto col metodo dei potenziali di nodo nell'ambito della teoria dei circuiti, occorre assumere che un punto arbitrario del dominio abbia potenziale nullo.

3. Esistono materiali che permettono di approssimare molto bene le condizioni al contorno (se il dominio confina con un conduttore perfetto per il quale $\sigma \rightarrow \infty$ sul contorno si imporrà la condizione $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$; invece sulle frontiere di interfaccia con materiali isolanti (per i quali la conducibilità elettrica risulta nulla ($\sigma=0$), vale la condizione al contorno $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$)

Tenendo conto dell'osservazione (3), se il problema, come in Fig.2, consiste di un corpo conduttore immerso in aria e alimentato tramite due elettrodi realizzati con un materiale di elevata conducibilità elettrica, è possibile limitarsi a risolvere il problema nel solo dominio conduttore, in quanto sulla frontiera sono approssimate molto bene le condizioni al contorno che assicurano l'unicità della soluzione. Infatti, il rapporto tra la conducibilità di un buon conduttore e quella di un buon isolante come l'aria supera facilmente i 10^{10} . Pertanto un problema di conduzione stazionaria, può molto spesso essere risolto in un dominio limitato (un'importante eccezione è costituita dal calcolo della resistenza di terra in un impianto elettrico!).

Introducendo l'incognita potenziale scalare, il modello dell'ECS diventa:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi_k) = \nabla \cdot \mathbf{J}_k^* \quad \text{in } \Omega \text{ con } k = 1, 2; \quad \begin{cases} [\phi] = 0 \\ \left[\sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] = 0 \end{cases} \quad \text{su } \Sigma_{12}; \quad \begin{cases} \phi|_{\Sigma_E} = \phi_E \text{ su } \Sigma_E \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\Sigma_J} = 0 \text{ su } \Sigma_J \end{cases}$$

dove $\partial\varphi/\partial n$ indica la derivata della funzione potenziale nella direzione normale (uscente da Ω) alla superficie. Se Σ_E costituito da più pezzi disgiunti, φ può assumere un valore differente su ciascun pezzo.

Riepilogando, il modello di questo problema è un'equazione di Poisson (Laplace se il termine noto è nullo) con condizioni al contorno di tipo Dirichlet su una parte della frontiera e condizioni al contorno di tipo Neumann sulla parte rimanente.

Una volta note le correnti e il campo elettrico in tutto il dominio conduttore è possibile risolvere il problema elettrostatico nel dominio non conduttore, usando nel nuovo problema il potenziale scalare determinato attraverso la soluzione del problema di ECS quale condizioni al contorno (Dirichlet)

Noti, infine, il campo elettrico e il campo spostamento elettrico nel materiale conduttore e non conduttore, si determina la densità di carica superficiale sulla superficie di interfaccia tra le due regioni.

Le correnti possono essere utilizzate come sorgenti per calcolare, attraverso la soluzione di un problema di magnetostatica, il campo magnetico in tutto il dominio.

3) Elettrostatica (ES)

Il modello dell'elettrostatica si applica in assenza di correnti ($\underline{\mathbf{J}}=0$) o, se si preferisce, quando le cariche presenti nel dominio possano ritenersi macroscopicamente ferme (si ricordi che a causa del rumore termico, anche in assenza di campo elettrico esterno, gli elettroni si spostano nel reticolo cristallino del conduttore percorrendo traiettorie casuali con spostamento medio nullo!).

Con riferimento alla schematizzazione rappresentata in figura (consideriamo, per semplicità, due soli domini disomogenei) e, per mezzi lineari, il modello matematico assume la forma seguente:

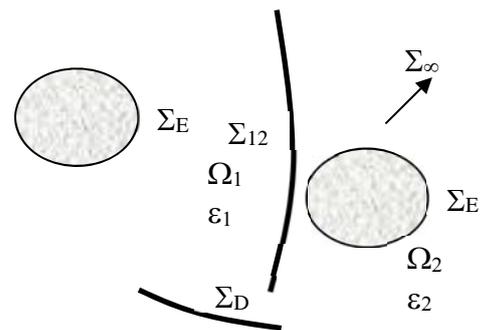


Fig.3

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}_k = 0 \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}_k = \rho & k = 1, 2; \\ \underline{\mathbf{D}}_k = \varepsilon_k \underline{\mathbf{E}}_k \end{cases}$$

- Le condizioni al contorno che assicurano unicità della soluzione, sono (l'ultima condizione si applica solo se una parte della frontiera del dominio si trova all'infinito $\Sigma_\infty \neq 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S \Big|_{\Sigma_D} = D_n \\ \underline{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{n}}_S \Big|_{\Sigma_E} = \underline{\mathbf{E}}_t \\ \underline{\mathbf{E}} \Big|_{r \rightarrow \infty} \Big|_{\Sigma_\infty} \rightarrow 0 \text{ come } \frac{1}{r^2} \end{array} \right.$$

Si noti che nel caso in cui Σ_D sia chiusa, D_n non può essere arbitraria, in quanto il flusso di \underline{D} attraverso la Σ_D deve eguagliare la carica libera ivi racchiusa.

- Avendo denotato con σ_Σ un'eventuale densità di carica superficiale presente sulla superficie di interfaccia, Σ_{12} , le equazioni di raccordo tra i due domini

$$\text{diventano: } \begin{cases} [\underline{E}] \times \hat{\mathbf{n}}_S = 0 \\ [\underline{D}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_S = \sigma_\Sigma \end{cases}$$

In altre parole, si mantengono continue nel passaggio da un mezzo all'altro

1) la componente tangenziale del campo elettrico

2) la componente normale del vettore spostamento elettrico (se non vi è carica superficiale)

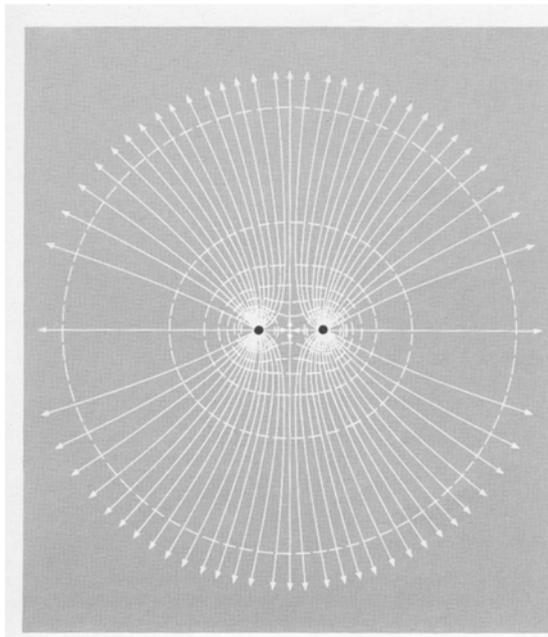
- Ovviamente, trovandoci in regime stazionario non occorre specificare alcuna condizione iniziale.

Rispetto al problema precedente valgono le seguenti osservazioni:

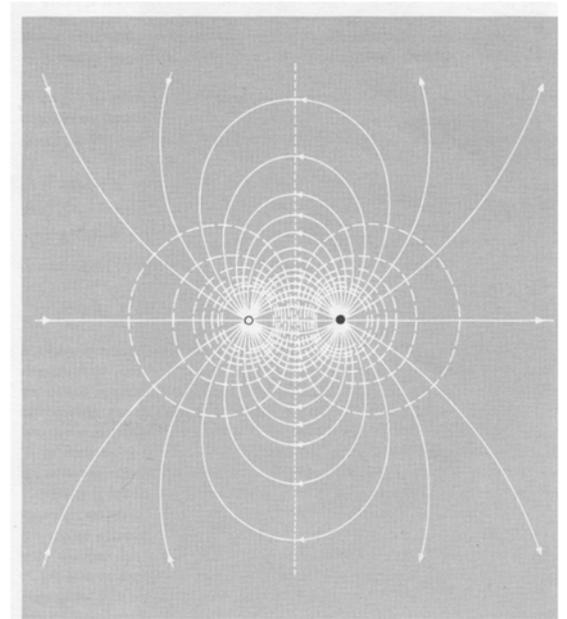
1. Non vale più la terza osservazione. Infatti non esistono materiali con $\epsilon \rightarrow \infty$ (ovvero materiali per i quali valga la condizione $\underline{E} \times \mathbf{n} = 0$) oppure materiali con $\epsilon \rightarrow 0$ (il che implicherebbe $\underline{D} \cdot \mathbf{n} = 0$). Il mezzo che presenta minore costante dielettrica è infatti il vuoto per il quale $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$.

I migliori materiali dielettrici presentano una permittività relativa $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ pari a qualche centinaio. Per questi motivi, in genere il problema dell'elettrostatica va risolto su domini illimitati.

2. Le precedenti considerazioni non debbono portare alla conclusione che le precedenti condizioni al contorno non vengano mai utilizzate.
 - a. La prima ($\underline{E} \times \mathbf{n} = 0$), infatti, si può applicare sulla superficie dei conduttori che, in elettrostatica, presentano campo elettrico nullo al loro interno
 - b. La seconda ($\underline{D} \cdot \mathbf{n} = 0$) si applica nel caso di problemi simmetrici. In questo caso è la geometria del problema che richiede che il campo elettrico sia puramente tangente (ad esempio ciò vale sul piano di simmetria che divide due cariche identiche immerse nel vuoto). Questa osservazione si applica naturalmente anche alla prima condizione al contorno: ad esempio per il piano di anti-simmetria che divide due cariche uguali, ma di segno opposto.



(a)



(b)

3. Poiché il campo elettrico risulta ancora irrotazionale, si può, come nel caso precedente impiegare il potenziale scalare elettrico per calcolare la soluzione: $\underline{\mathbf{E}} = -\nabla\phi$. Ancora una volta per l'unicità della soluzione è necessario imporre che il potenziale assuma un valore arbitrario (ad esempio nullo) in un punto del dominio.

Nel caso di mezzi lineari, per questo problema il modello diventa:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = -\rho \quad \text{in } \Omega \quad \left\{ \begin{array}{l} [\phi] = 0 \\ \left[\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] = 0 \end{array} \right. \text{ su } \Sigma_{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi|_{\Sigma_E} = \phi_E \\ -\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\Sigma_D} = D_n \\ |\phi|_{r \rightarrow \infty}|_{\Sigma_\infty} \rightarrow 0 \text{ come } \frac{1}{r} \end{array} \right.$$

Dove $\partial\phi/\partial n$ indica la derivata della funzione potenziale nella direzione normale (uscente da Ω) alla superficie. Se Σ_E costituito da più pezzi disgiunti, ϕ può assumere un valore differente su ciascun pezzo.

Riepilogando, il modello di questo problema è un'equazione di Poisson (Laplace se il termine noto è nullo) con condizioni al contorno di tipo Dirichlet, oppure Neumann (+ Dirichlet nel punto in cui si fissa arbitrariamente il valore del potenziale), o miste.

4) Magnetostatica (MS)

Il problema della magnetostatica si pone come obiettivo la determinazione del valore del campo magnetico $\underline{\mathbf{H}}$ e del campo di induzione magnetica $\underline{\mathbf{B}}$ a partire dalla distribuzione del campo di corrente **in tutto lo spazio**. Il campo di corrente viene determinato risolvendo preventivamente un problema di ECS.

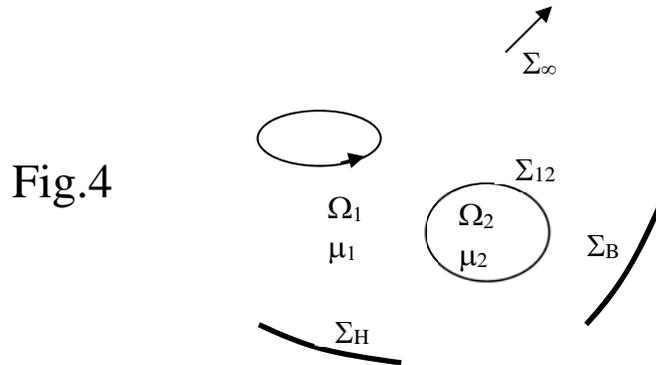


Fig.4

Con riferimento al problema raffigurato in figura (consideriamo, per semplicità, due soli domini di differente permeabilità omogenei e lineari), il modello matematico assume la forma ($k=1,2$)

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_k = \underline{\mathbf{J}}_k^* \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}}_k = 0 \\ \underline{\mathbf{B}}_k = \mu_k \underline{\mathbf{H}}_k \end{cases} \quad (4.1)$$

- Sottolineando che l'ultima espressione si applica solo se una parte della frontiera del dominio si trova all'infinito $\Sigma_\infty \neq 0$, le condizioni al contorno che assicurano unicità della soluzione, sono:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_B} = 0 \\ \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_H} = 0 \\ |\underline{\mathbf{B}}|_{r \rightarrow \infty}|_{\Sigma_\infty} \rightarrow 0 \text{ come } \frac{1}{r^3} \end{cases} \quad (4.2)$$

- Il fatto che $\underline{\mathbf{B}}$ vada a zero come r^{-3} quando $r \rightarrow \infty$ è legato al fatto che non esiste in natura il cosiddetto monopolo magnetico. Si noti, ancora, che, su Σ_H , la circuitazione del campo $\underline{\mathbf{H}}$ lungo un generico percorso chiuso deve essere pari a 0. Pertanto, in base alla legge di Ampere, la superficie Σ_H non può essere attraversata da correnti.
- Avendo denotato con $\underline{\mathbf{K}}_\Sigma$ un'eventuale corrente superficiale presente sulla superficie di interfaccia Σ_{12} , le equazioni di raccordo tra i due domini diventano

$$\begin{cases} [\underline{\mathbf{H}}] \times \hat{\mathbf{n}}_S = \underline{\mathbf{K}}_\Sigma \\ [\underline{\mathbf{B}}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_S = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Cioè si mantengono continue nel passaggio tra i due mezzi la componente tangenziale del campo magnetico (se non sono presenti correnti superficiali) e la componente normale del campo di induzione magnetica.

- Tutte le considerazioni valide per il problema della conduzione stazionaria, e parzialmente preservate per il problema dell'elettrostatica perdono definitivamente validità.
1. La grande maggioranza dei materiali magnetici di interesse applicativo presenta una relazione caratteristica fortemente non lineare (anzi addirittura di tipo isteretico). Pertanto la relazione costitutiva lineare inserita nel modello è generalmente poco realistica ed adottata solo come drastica semplificazione per non rendere la soluzione del problema eccessivamente ardua dal punto di vista computazionale.
 2. In generale non è possibile utilizzare potenziali scalari e, nei casi ammissibili, ciò vale solo con accorgimenti e precisazioni che illustreremo di seguito. Pertanto il problema magnetostatico è intrinsecamente vettoriale e dunque tre volte più oneroso da risolvere rispetto ai problemi precedenti.
 3. Le prime due condizioni al contorno della (4.2) vengono soddisfatte rigorosamente solo in presenza di simmetria del dominio geometrico e delle sorgenti. In mancanza di simmetria, poichè non esistono materiali per i quali vengano soddisfatte in modo rigoroso, possono talvolta essere utilizzate per avere delle soluzioni approssimate, adottando le medesime semplificazioni utilizzate per studiare le reti magnetiche. Questa affermazione è giustificata dal fatto che il vuoto ha una permeabilità magnetica non nulla ma pari a $1.26 \cdot 10^{-7}$ [H/m], e ciò rende, nel migliore dei casi, solo approssimata l'espressione $\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0$. Tutti gli altri materiali presentano una permeabilità relativa $\mu_r = \mu / \mu_0$ che oscilla tra poco meno di 1 e, circa, $1E6$ (il che limita a poche situazioni particolari la validità dell'approssimazione $\underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0$, corretta per $\mu \rightarrow \infty$). Per quanto sopra, in genere, il problema della magnetostatica va risolto su domini illimitati.
 4. Queste peculiarità rendono il modello della magnetostatica il più difficile da trattare tra i problemi stazionari. Per questo sono state proposte in letteratura varie formulazioni per affrontarlo. Le discuteremo di seguito specificando limiti e vantaggi di ciascuna.

a) Formulazione φ - Potenziale scalare ridotto.

In alcuni casi, il calcolo del campo magnetostatico in geometria tridimensionale può essere effettuato attraverso una formulazione basata sul potenziale scalare.

In base al teorema di Helmholtz, il campo magnetico $\underline{\mathbf{H}}$ può essere diviso nelle sue componenti irrotazionale, $\underline{\mathbf{H}}_{\text{irr}}$, e solenoidale, $\underline{\mathbf{H}}_{\text{sol}}$. Il campo solenoidale $\underline{\mathbf{H}}_{\text{sol}}$ è il campo dovuto all'effetto delle correnti assegnate nel caso in cui queste agiscano nello

spazio libero:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_{\text{sol}} = \underline{\mathbf{J}}^* \\ \nabla \cdot \mu_0 \underline{\mathbf{H}}_{\text{sol}} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Tale contributo può essere determinato attraverso la legge dell'azione elementare di Laplace:

$$\mathbf{H}_{\text{sol}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_j} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (4.5)$$

dove V_j è la regione in cui la densità di corrente \mathbf{J} è diversa da zero.

Confrontando la (4.1) e la (4.4) risulta evidente che la differenza tra il campo magnetico \mathbf{H} e il campo magnetico \mathbf{H}_{sol} è irrotazionale può essere derivata da un potenziale scalare $\mathbf{H}_{\text{irr}, k} = -\nabla\phi_k$.

Risulta, pertanto, $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{\text{sol}} - \nabla\phi_k$, con $k=1,2$ (4.6)

e dalla (4.1) si perviene al seguente modello

$$\nabla \cdot (\mu_k \nabla \phi_k) = \nabla \cdot (\mu_k \mathbf{H}_{\text{sol}}) \quad (4.7) \quad \text{in } \Omega_k \quad \left\{ \begin{array}{l} [\phi] = 0 \\ \left[\mu \frac{\partial \phi}{\partial n} - \mu \mathbf{H}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] = 0 \end{array} \right. \quad \text{su } \Sigma_{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi|_{\Sigma_H} = \phi_H \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\Sigma_B} = \mathbf{H}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma_B} \\ |\phi|_{r \rightarrow \infty}|_{\Sigma_\infty} \rightarrow 0 \quad \text{come } \frac{1}{r^2} \end{array} \right.$$

dove il valore di ϕ su Σ_H può essere trovato integrando opportunamente la componente tangenziale di \mathbf{H}_{sol} su Σ_H .

Operando in questo modo, ci si riconduce a risolvere un'equazione di Poisson con condizioni al contorno di tipo Dirichlet, oppure Neumann, o miste.

I principali svantaggi di quest'approccio sono:

1. la scarsa accuratezza dovuta ai fenomeni di cancellazione tra le due componenti del campo calcolate in modo indipendente, specialmente nelle regioni in cui la permeabilità magnetica è elevata. Infatti in tali zone il valore di \mathbf{H} è ovviamente piccolo. D'altra parte \mathbf{H}_{sol} viene calcolato nel vuoto e dunque in generale il suo valore è molto maggiore di \mathbf{H} . Per chiarire il concetto ricorriamo ad un esempio numerico. Assumiamo per semplicità che \mathbf{H}_{sol} e $\nabla\phi$ siano diretti lungo uno degli assi coordinati (ad es. nella direzione \mathbf{i}_x) e che i loro valori veri siano pari a $\mathbf{H}_{\text{sol}} = 1000 \mathbf{i}_x$ A/m e $\nabla\phi = 999 \mathbf{i}_x$ A/m, da cui $\mathbf{H} = 1 \mathbf{i}_x$ A/m.

Ipotizzando di aver commesso un errore dell'1% nella valutazione di entrambi i campi, si otterranno i seguenti valori: $\mathbf{H}_{\text{sol}} = 1001 \mathbf{i}_x$ A/m e $\nabla\phi = 998 \mathbf{i}_x$ A/m. Sostituendo nella (4.6) risulterà $\mathbf{H} = 3 \mathbf{i}_x$ A/m con un errore relativo del 200%

2. In aggiunta, uno sforzo computazionale notevole è richiesto per il calcolo dell'integrale (4.5) in ogni punto del dominio ove si desidera conoscere \mathbf{H} .

Formulazione ϕ - ψ (Potenziale scalare ridotto-totale).

Per superare questi problemi, è possibile ricorrere ad una formulazione alternativa che combina l'uso del potenziale scalare ridotto con quello del potenziale scalare totale. In questo caso il campo magnetico è descritto da

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{\text{sol}} - \nabla \phi && \text{in } V - V_m \\ \mathbf{H} &= - \nabla \psi && \text{nella regione } V_m \end{aligned}$$

dove V_m è la regione nella quale si trovano i materiali ad alta permeabilità.

I potenziali scalari sono così determinati attraverso le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) &= \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_{\text{sol}}) && \text{in } V - V_m \\ \nabla \cdot \mu \nabla \psi &= 0 && \text{nella regione } V_m \end{aligned}$$

che vengono accoppiate imponendo le condizioni di interfaccia sulla frontiera ∂V_m (in altre parole, sulla frontiera di separazione tra i materiali magnetici e non magnetici va imposta la continuità di $\mathbf{H} \times \mathbf{n}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ dove \mathbf{n} è il versore normale a ∂V_m).

Riportiamo di seguito alcune considerazioni relative alla presente formulazione.

- È utilizzabile solo se la regione V_m non è sede di correnti.
- Il problema della cancellazione risulta attenuato solo se la permeabilità è costante nella regione V_m .
- A causa della polidromia della funzione potenziale scalare, per regioni magnetiche molteplici connesse (si pensi, ad esempio, al giogo di un trasformatore) che concatenano correnti devono essere introdotti opportuni tagli, il che rende l'implementazione del metodo piuttosto ostica.
- Avendo due diverse rappresentazioni per il campo magnetico nelle regioni V_m e $V - V_m$, occorre stabilire delle condizioni di raccordo anche sulle superfici di separazione tra questi due domini, anche se fisicamente potrebbero non esserci discontinuità delle proprietà materiali.

b) Formulazione basate sui potenziali vettori: $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{T}}$, $\underline{\mathbf{A}}-\psi$, $\underline{\mathbf{T}}-\Omega$

Le problematiche di cui abbiamo discusso nei punti precedenti scompaiono utilizzando formulazioni basate su potenziali vettori. Il prezzo da pagare è, in questo caso, costituito dall'accresciuto numero di incognite scalari e dalla necessità, in alcuni approcci, di imporre condizioni aggiuntive sui potenziali vettori allo scopo di garantire l'unicità della soluzione.

Appartengono a questa famiglia due classiche formulazioni basate l'una sul potenziale vettore magnetico $\underline{\mathbf{A}}$ (definito come $\underline{\mathbf{B}}=\nabla\times\underline{\mathbf{A}}$) e l'altra sul potenziale vettore elettrico $\underline{\mathbf{T}}$ (definito come $\underline{\mathbf{J}}=\nabla\times\underline{\mathbf{T}}$). Entrambe queste formulazioni possono essere usate in congiunzione con l'approccio del potenziale scalare totale.

c1) Potenziale vettore magnetico

Ricordando che per una nota identità vettoriale $\nabla\cdot\nabla\times\underline{\mathbf{A}}=0$, purché il campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$ sia sufficientemente regolare, ponendo $\underline{\mathbf{B}}=\nabla\times\underline{\mathbf{A}}$ la solenoidalità del campo di induzione magnetica risulta automaticamente imposta.

Il modello del problema magnetostatico diventa allora:

$$\nabla\times\frac{1}{\mu}\nabla\times\underline{\mathbf{A}}=\underline{\mathbf{J}}^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla\times\underline{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_B}=0 \\ \frac{1}{\mu}\nabla\times\underline{\mathbf{A}}\times\hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_H}=0 \\ |\underline{\mathbf{A}}|_{r\rightarrow\infty}|_{\Sigma_\infty}\rightarrow 0 \text{ come } \frac{1}{r^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [\nabla\times\underline{\mathbf{A}}]\cdot\hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_{12}}=0 \\ \left[\frac{1}{\mu}\nabla\times\underline{\mathbf{A}}\right]\times\hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_{12}}=0 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

I principali svantaggi di questa formulazione sono:

- $\underline{\mathbf{A}}$ è un campo vettoriale
- Il sistema (4.6) non ammette in generale un'unica soluzione in termini di $\underline{\mathbf{A}}$. Infatti posto $\underline{\mathbf{A}}'=\underline{\mathbf{A}}-\nabla\psi$ dove ψ è un campo scalare sufficientemente regolare, si vede immediatamente che anche $\underline{\mathbf{A}}'$ soddisfa alle equazioni (4.6)

Per garantire l'unicità della soluzione un vincolo addizionale, detto "gauge", deve essere imposto allo scopo di avere una corrispondenza biunivoca tra il potenziale vettore e il suo rotore. Una tra le gauges più comuni nel problema magnetostatico è quella di Coulomb:

$$\nabla\cdot\underline{\mathbf{A}}=0$$

Un'altra possibile scelta è: $\underline{\mathbf{w}}\cdot\underline{\mathbf{A}}=0$

dove $\underline{\mathbf{w}}$ è un arbitrario campo vettoriale non dotato di linee di campo chiuse.

Quest'ultima scelta può essere effettuata per imporre la condizione di gauge allorché si decida di risolvere il problema magnetostatico numericamente attraverso una formulazione basata sugli elementi finiti (FEM). In tali metodi il dominio viene modellato con un reticolo. Operando con modalità analoghe a quelle utilizzate per risolvere i circuiti elettrici attraverso il metodo delle correnti di maglia, i lati del reticolo possono essere ripartiti negli insiemi complementari dell'albero e del co-albero. Il passaggio finale è quello di adottare l'insieme dei lati dell'albero quale campo $\underline{\mathbf{w}}$ per l'imposizione della gauge (Albanese e Rubinacci, 1990).

Questa scelta risulta particolarmente vantaggiosa se la base funzionale utilizzata per ricercare la soluzione è costituita dai cosiddetti edge-elements. In questo caso, le

incognite da determinare rappresentano fisicamente e gli integrali di linea del potenziale vettore lungo i lati del reticolo. In questa situazione, l'imposizione della gauge si riduce banalmente ad imporre pari a zero tutte le incognite associate ai lati dell'albero della mesh e a cercare la soluzione nella sola base funzionale costituita dalle incognite associate ai lati del co-albero.

Entrambi i problemi summenzionati, spariscono nel caso in cui la geometria di interesse sia bidimensionale.

In tali ipotesi, facendo riferimento ad un sistema cartesiano (x, y, z) , ipotizziamo che la densità di corrente sia funzione solo delle coordinate x e y e diretta lungo l'asse z : $\underline{\mathbf{J}}=J_z(x,y)\underline{\mathbf{i}}_z$. Il campo di induzione magnetica, $\underline{\mathbf{B}}(x,y)$, avrà componente nulla nella direzione z e, nella gauge di Coulomb, il potenziale vettore potrà essere espresso come: $\underline{\mathbf{A}}=A_z(x,y)\underline{\mathbf{i}}_z$.

Da quanto sopra consegue che $\underline{\mathbf{B}}=\nabla\times\underline{\mathbf{A}}=\nabla A_z(x,y)\times\underline{\mathbf{i}}_z$

Ed ancora che l'equazione da risolvere diventa:

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu}\nabla A_z\right)=-\mathbf{J}_z^* \quad \left\{ \begin{array}{l} A_z|_{\Sigma_B}=0 \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial n}|_{\Sigma_H}=0 \\ |A_z|_{r\rightarrow\infty}|_{\Sigma_\infty}\rightarrow 0 \text{ come } \frac{1}{r^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [A_z]|_{\Sigma_{12}}=0 \\ \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial n}\right]|_{\Sigma_{12}}=0 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Ragionamenti analoghi possono essere ripetuti nel caso di problemi magnetostatici a simmetria assiale.

In tali ipotesi, introduciamo un riferimento cilindrico (r,φ,z) e supponiamo che la densità di corrente sia funzione solo delle coordinate r e z e diretta lungo φ : $\underline{\mathbf{J}}=J_\varphi(r,z)\underline{\mathbf{i}}_\varphi$. Si può mostrare che, in questi casi, $\underline{\mathbf{B}}(r,z)$ abbia componenti non nulle solo nelle direzioni r e z ; ed inoltre che, sotto la gauge di Coulomb, il potenziale vettore possa essere espresso attraverso la relazione $\underline{\mathbf{A}}=A_\varphi(r,z)\underline{\mathbf{i}}_\varphi$.

Da quanto detto consegue che $\underline{\mathbf{B}}=\nabla\times\underline{\mathbf{A}}=[\nabla\psi(r,z)\times\underline{\mathbf{i}}_\varphi]/r$; (4.7)

dove $\psi=rA_\varphi$ è detto flusso poloidale per radiante in quanto fornisce a meno di un fattore pari a 2π , il flusso di $\underline{\mathbf{B}}$ attraverso un cerchio centrato sull'asse z e passante per il punto di coordinate (r,z) .

In questo caso l'equazione da risolvere diventa: $\nabla\times\left(\frac{\nabla\psi\times\hat{\mathbf{i}}_\varphi}{\mu r}\right)=\mathbf{J}_\varphi^*\hat{\mathbf{i}}_\varphi$ (4.8)

che si può anche scrivere nella forma $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=-\mathbf{J}_\varphi^*$ (4.8a)

c1a) Formulazione $\underline{\mathbf{A}}$ ungauged

In realtà, anche nei problemi 3D è spesso possibile risolvere numericamente il problema MS utilizzando la formulazione basata sul potenziale vettore magnetico $\underline{\mathbf{A}}$ senza imporre, almeno esplicitamente, nessuna gauge.

Affinchè il solutore numerico converga è necessario che siano soddisfatte alcune ipotesi che andremo di seguito a dettagliare e a motivare.

Ricordiamo che l'equazione da risolvere richiede che il termine noto sia solenoidale per una ben nota identità vettoriale

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{J}}^* \rightarrow 0 = \nabla \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \right) = \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}^*$$

Tuttavia, se si risolve attraverso una tecnica iterativa il problema MS utilizzando una formulazione agli elementi finiti, la solenoidalità analitica del termine noto non basta a garantire che il residuo dell'equazione discretizzata converga a zero. E', infatti, necessario che il termine noto appartenga al co-dominio (*range*) raggiungibile dalla base funzionale utilizzata per la soluzione numerica. Affinchè entrambe le condizioni vengano verificate occorre eseguire un preprocessing in due passi sul termine noto:

- 1) Esprimere il termine noto come il rotore di un potenziale vettore in modo da garantirne la solenoidalità analitica: $\underline{\mathbf{J}}^* = \nabla \times \underline{\mathbf{T}}^*$
- 2) Proiettare il potenziale vettore sulla base funzionale costituita dalle funzioni di forma utilizzate per la soluzione agli elementi finiti del problema numerico.

Il soddisfacimento di entrambe le condizioni garantisce che il termine noto così modificato sia compatibile con la base funzionale utilizzata.

In realtà, se si utilizza per la soluzione numerica iterativa il metodo del gradiente coniugato si può dimostrare che la gauge sul potenziale vettore magnetico viene imposta in maniera automatica,

Si noti, infine, che la formulazione ungauged, quando converge, permette di arrivare alla soluzione numerica del problema in modo molto più veloce per due ragioni:

- 1) La mancata imposizione esplicita della gauge riduce il numero di equazioni del problema da risolvere (se la gauge viene imposta attraverso dei vincoli sul potenziale vettore).
- 2) Non occorre pre-processare i lati della mesh per costruire gli insiemi complementari dell'albero e del coalbero (se la gauge viene imposta numericamente come $\underline{\mathbf{w}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = 0$)

c2) Formulazione $\underline{\mathbf{A}}-\phi$

Con riferimento al caso b) se la regione ad alta permeabilità magnetica, V_m , non permette l'utilizzo di un potenziale scalare totale (ad es. per la presenza di correnti), si può pensare di utilizzare in questo dominio un potenziale vettore magnetico $\underline{\mathbf{A}}$. In questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{B}} &= \nabla \times \underline{\mathbf{A}} && \text{in } V_m \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{\text{sol}} - \nabla \phi && \text{in } V - V_m\end{aligned}\quad (4.9)$$

Nel caso di mezzi lineari, la formulazione $\underline{\mathbf{A}}-\phi$ conduce al seguente sistema:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \underline{\mathbf{A}}) &= \mathbf{J} && \text{in } V_m \\ \mathbf{w} \cdot \underline{\mathbf{A}} &= 0 && \text{in } V_m \\ \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) &= \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_{\text{sol}}) && \text{in } V - V_m\end{aligned}\quad (4.10)$$

Per quanto riguarda l'imposizione delle condizioni di interfaccia la formulazione presenta caratteristiche simili a quelle che combinano l'uso dei potenziali scalari ridotto e totale, col vantaggio, però, di eliminare i problemi legati alla cancellazione.

I principali punti di debolezza della formulazione sono abbastanza semplici da individuare:

- In V_m occorre lavorare con una incognita vettoriale
- La soluzione in termini di $\underline{\mathbf{A}}$ non è unica e dunque occorre imporre una gauge
- Servono condizioni di raccordo sulla superficie di separazione tra regioni disomogenee

c3) Formulazione $\underline{\mathbf{A}}-\psi$

In assenza di correnti, è possibile adottare per la regione $V - V_m$ una formulazione basata sull'incognita potenziale totale, invece che ridotto, vale a dire imporre:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{B}} &= \nabla \times \underline{\mathbf{A}} && \text{in } V_m \\ \mathbf{H} &= - \nabla \psi && \text{in } V - V_m\end{aligned}\quad (4.11)$$

In questo caso, il sistema da risolvere diventa:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \underline{\mathbf{A}}) &= \mathbf{J} && \text{in } V_m \\ \mathbf{w} \cdot \underline{\mathbf{A}} &= 0 && \text{in } V_m \\ \nabla \cdot (\mu \nabla \psi) &= 0 && \text{in } V - V_m\end{aligned}\quad (4.12)$$

Per quanto riguarda l'imposizione delle condizioni di interfaccia e l'eventuale introduzione di tagli, la formulazione presenta caratteristiche simili a quelle che combinano l'uso dei potenziali scalari ridotto e totale ma ha il vantaggio di eliminare i problemi legati alla cancellazione. Con questo approccio, nel caso di domini a connessione multipla, è, tuttavia, possibile estendere la regione V_m , in modo da rendere semplicemente connessa la regione esterna alle correnti ed avere di conseguenza una funzione potenziale scalare ψ monodroma.

C4) Formulazione $\underline{\mathbf{T}}-\Omega-\psi$

La formulazione basata sul potenziale vettore elettrico \mathbf{T} è nota come il metodo $\mathbf{T}-\Omega$. In questo metodo \mathbf{T} differisce da \mathbf{H} per il gradiente di un potenziale scalare Ω :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \Omega \quad (4.13)$$

Tenendo conto che il potenziale vettore elettrico può essere definito solo nella regione ove la densità di corrente è diversa da zero, ed utilizzando per il resto del dominio il potenziale scalare totale, si pone:

$$\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{J} \quad \text{in } V_j \quad (4.14)$$

$$\mathbf{H} = - \nabla \psi \quad \text{in } V - V_j$$

Si perviene in questo modo al seguente modello

$$\nabla \cdot \mu (\mathbf{T} - \nabla \Omega) = 0 \quad \text{in } V_j \quad (4.15)$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{T} = 0 \quad \text{in } V_j$$

$$\nabla \cdot \mu \nabla \psi = 0 \quad \text{nella regione esterna } V - V_j$$

Per quel che concerne tagli e condizioni di interfaccia valgono considerazioni analoghe a quelle relative alla formulazione $\underline{\mathbf{A}}-\psi$.

Potrebbe sembrare che l'approccio $\underline{\mathbf{T}}-\Omega$ sia simile a quello basato sui due potenziali scalari ($\underline{\mathbf{H}}_{\text{sol}}$ potrebbe, infatti, essere interpretato come il particolare potenziale vettore elettrico \mathbf{T} avente divergenza nulla). La differenza tra le due formulazioni è che nell'approccio coi potenziali scalari $\underline{\mathbf{T}}$, o se si preferisce $\underline{\mathbf{H}}_{\text{sol}}$, viene calcolato in maniera analitica, mentre in quello basato sul potenziale vettore elettrico la sua valutazione è ottenuta per via numerica proiettandolo sullo stesso spazio funzionale adoperato per approssimare il gradiente di Ω , la qual cosa limita notevolmente il problema degli errori di cancellazione.

5) Elettro-quasi-statica

Le equazioni da risolvere sono

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \rho \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{D}}}{\partial t} \end{cases} \quad (4.16)$$

Cui vanno aggiunte le condizioni al contorno, di raccordo ed iniziali (su $\underline{\mathbf{D}}$), nonché le relazioni costitutive

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}} \end{cases} \quad (4.17)$$

Il fatto che nel modello (4.16) il campo elettrico sia ancora irrotazionale, ci permette di utilizzare ancora una volta il potenziale scalare elettrico φ come incognita primaria. Poiché questa è sempre la scelta migliore da adottare, quando possibile, non è necessario introdurre formulazioni alternative. Per quanto detto, il problema è intrinsecamente scalare, ossia richiede la determinazione di un'incognita scalare. Applicando l'operatore di divergenza all'ultima equazione si ottiene

$$\nabla \cdot \left(\sigma \nabla \varphi + \frac{\partial \varepsilon \nabla \varphi}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.18),$$

cui vanno aggiunte opportune condizioni iniziali e al contorno.

Se ci si trova ad operare in condizioni di regime sinusoidale alla frequenza ω assegnata, la (4.18) diventa: $\nabla \cdot ((\sigma + j\omega\varepsilon)\nabla \varphi) = 0$ (4.19)

Se definiamo il tempo di diffusione come $\tau = \varepsilon/\sigma$, dalla (4.19) si vede immediatamente che per $\omega \ll 1/\tau$ il potenziale obbedisce all'equazione della conduzione stazionaria, mentre per $\omega \gg 1/\tau$ si ottiene l'equazione dell'elettrostatica. Poiché per un buon conduttore $\tau \approx 10^{-19}$ s, mentre per un buon isolante $\tau \approx 10$ s, a frequenze comprese tra i 10 Hz e 1 MHz, nei conduttori valgono con ottima approssimazione le equazioni della conduzione stazionaria e nei dielettrici le equazioni dell'elettrostatica.

Per questi motivi il modello dell'elettro-quasi-statica trova scarso interesse nelle applicazioni pratiche, salvo nel caso in cui occorra analizzare il comportamento di materiali semi-conduttori, che, quanto a proprietà costitutive, occupano una posizione intermedia tra le due classi di materiale precedentemente citate.

6) Magneto-quasi-statica (QSM)

La determinazione delle correnti parassite (Eddy currents) indotte nei conduttori da un campo magnetico tempo-variante è basata sulla soluzione delle equazioni di Maxwell scritte sotto l'approssimazione quasi-stazionaria:

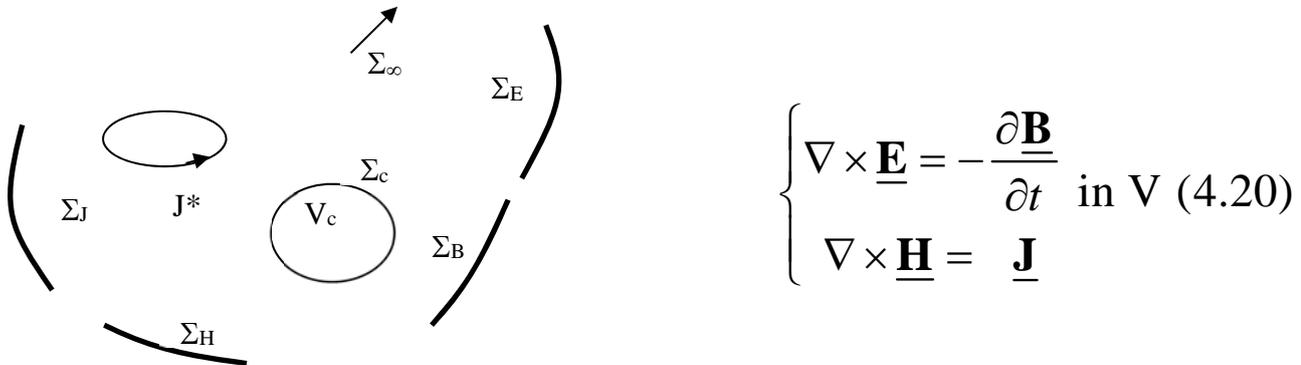


Fig. [3] Semplice configurazione per il problema delle correnti parassite

Si noti che la densità di corrente è incognita nel dominio conduttore V_c , mentre risulta assegnata (correnti impresse) nella restante parte del dominio $V - V_c$.

Il modello si completa aggiungendo

1) le relazioni costitutive,

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}} & \text{in } V \\ \underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}} & \text{in } V_c \\ \underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}^* & \text{in } V - V_c \end{cases}$$

2) opportune condizioni al contorno

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_B} = 0; & \underline{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_E} = 0 \\ \underline{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_J} = 0; & \underline{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{n}}_S|_{\Sigma_H} = 0 \\ |\underline{\mathbf{B}}|_{r \rightarrow \infty}|_{\Sigma_\infty} \rightarrow 0 & \text{come } \frac{1}{r^3} \end{cases} \quad (4.2)$$

3) le condizioni iniziali sul campo $\underline{\mathbf{B}}$ (che soddisfino alla condizione $\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0$)

4) le relazioni di interfaccia, sulle superfici di discontinuità S

$$\begin{cases} [\underline{\mathbf{H}}] \times \hat{\mathbf{n}}_S = \mathbf{K}_S; & [\underline{\mathbf{E}}] \times \hat{\mathbf{n}}_S = 0 \\ [\underline{\mathbf{B}}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_S = 0; & [\underline{\mathbf{J}}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_S = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

dove il termine \mathbf{K}_S tiene conto di eventuali correnti superficiali presenti su S

L'osservazione che in $V-V_c$ la corrente è assegnata, consente di dividere il problema (4.20) nei due sotto-problemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} \end{array} \right. \text{ in } V_c \quad (4.20a) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}^* \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \end{array} \right. \text{ in } V - V_c \quad (4.20b)$$

Dalle equazioni appena scritte, si vede immediatamente che il modello della magneto-quasi-statica consiste nell'accoppiamento di un modello quasi-statico nella regione conduttrice e di un modello statico (magnetostatica) nella regione non conduttrice.

Da questa osservazione derivano alcune considerazioni.

- Così come il modello magnetostatico è il più difficile da risolvere dei problemi stazionari, così il modello della magneto-quasi-statica è ben più complicato da trattare rispetto al modello elettro-quasi-statico. Anche il numero di possibili formulazioni risulta pertanto elevato, ciascuna con i propri pro e contro.
- Dal punto di vista numerico-matematico, il problema (4.20a-b) consiste nell'accoppiamento tra un problema statico (ellittico) ed uno diffusivo (parabolico) che vanno raccordati imponendo le condizioni di interfaccia sulla superficie di separazione tra il dominio conduttore e quello non-conduttore.
- La magneto-quasi-statica ha come limite la magnetostatica quando la corrente indotta nel dominio conduttore si annulla, ossia quando la derivata temporale del campo di induzione magnetica va a zero.
- Il sistema (4.20a-b) consente di determinare il campo $\underline{\mathbf{H}}$, e quindi $\underline{\mathbf{B}}$, in tutto V . Noto $\underline{\mathbf{H}}$, è possibile tramite la legge di Ampere determinare il campo di corrente in V_c e, infine, utilizzando la legge di Ohm locale, il campo $\underline{\mathbf{E}}$.
- Da tutto ciò consegue che questo modello non consente di calcolare il campo elettrico al di fuori del dominio conduttore. Se questa informazione è richiesta, occorre aggiungere la legge di Gauss e risolvere il modello

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\epsilon \underline{\mathbf{E}}) = 0 \end{array} \right. \text{ in } V - V_c \quad (4.21) \text{ tenendo presente che la componente tangenziale}$$

di $\underline{\mathbf{E}}$ è nota sulla superficie di interfaccia tra il dominio conduttore e quello non-conduttore essendo noto il campo elettrico in V_c .

- Come conseguenza di ciò, esiste in generale una discontinuità della componente normale del campo elettrico sulla superficie del conduttore e quindi un accumulo di carica superficiale $\epsilon[\underline{\mathbf{E}}_c - \underline{\mathbf{E}}_{nc}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = \rho_s$; ciò sebbene risulti: $\underline{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = 0$ su S_c (Infatti il campo di corrente è nullo in aria e la sua componente normale deve mantenersi continua). La cosa, in apparenza assurda (se $\underline{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = 0 \forall t$ su S_c , in base alla legge di conservazione della carica non vi è flusso di carica dall'interno del materiale

conduttore sulla superficie e, pertanto, su questa non vi può essere un accumulo di carica superficiale!!!), si spiega tenendo conto del fatto che nel modello QSM si è soppresso il termine di corrente di spostamento e pertanto la legge di conservazione della carica perde di validità.

- Nel seguito tratteremo il modello della magneto quasi-statica nel dominio del tempo, cioè supporremo che i campi varino temporalmente con legge arbitraria. Va tuttavia sottolineato che grande importanza nella pratica riveste il caso in cui i mezzi del dominio sono lineari tempo-invarianti e tutti i campi varianti con legge sinusoidale. Questo tipo di problemi può essere studiato, analogamente a quanto fatto nell'ambito della teoria dei circuiti, utilizzando il metodo simbolico ed associando ai campi e alle sorgenti i corrispondenti fasori.

Come detto, le possibili formulazioni numeriche introdotte per la trattazione numerica di questo problema sono molteplici e vengono di seguito brevemente richiamate.

Le distingueremo in due categorie: formulazioni magnetiche (incognita legata al campo magnetico) e formulazioni elettriche (incognita legata al campo elettrico). In entrambi i casi è possibile utilizzare come incognite campi, potenziali o, contemporaneamente, campi e potenziali. Va sottolineato come, a differenza del problema magnetostatico, ora non sia possibile in alcun caso utilizzare formulazioni in cui il campo incognito sia costituita esclusivamente da una funzione scalare.

a) Formulazione magnetica in termini di campo: formulazione \mathbf{H}

Se si risolve direttamente nell'incognita \mathbf{H} , si giunge al sistema:

$$\nabla \times (\sigma^{-1} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}) + \mu \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} = 0 \quad \text{in } V_c \quad (1)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}^* \\ \nabla \cdot \mu \underline{\mathbf{H}} = 0 \end{cases} \quad \text{in } V - V_c \quad (2)$$

Cui vanno aggiunte le condizioni al contorno e di raccordo (si suppone non vi siano

correnti superficiali sulla frontiera di V_c)

$$\begin{cases} [\underline{\mathbf{H}}] \times \hat{\mathbf{n}}_s = 0; \\ [\mu \underline{\mathbf{H}}] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = 0; \end{cases} \quad (3)$$

Pertanto, in questa formulazione, occorre trovare in ogni punto del dominio (a meno della presenza di eventuali simmetrie) il campo magnetico $\underline{\mathbf{H}}$. I principali svantaggi di questo modo di operare sono:

- 1) Complessità computazionale moltiplicata per 3 rispetto al caso scalare

2) Imposizione problematica delle condizioni di interfaccia. Infatti nelle formulazioni scalari, il potenziale generalmente si mantiene continuo nel passaggio da un mezzo all'altro. Questa circostanza risulta essere vantaggiosa dal punto di vista numerico, come si approfondirà nel seguito, quando introdurremo le formulazioni agli elementi finiti, in quanto sovente si cerca un'approssimazione continua della variabile incognita. Quando, invece, si ha a che fare con grandezze vettoriali come $\underline{\mathbf{H}}$ queste non possono più essere considerate continue (difatti per la seconda della (3) la componente normale di $\underline{\mathbf{H}}$ deve essere discontinua nel passaggio tra due mezzi di differente permeabilità). Pertanto questa formulazione non può essere adottata in presenza di mezzi a differente permeabilità a meno di non usare delle tecniche avanzate (Edge elements, Cell Method).

b) Formulazione magnetica mista: formulazione $\mathbf{H}-\varphi$

Abbiamo già notato che nelle regioni in cui σ è uguale a zero (dominio $V-V_c$) le equazioni (2) sono identiche a quelle della magnetostatica. Possiamo dunque pensare, almeno in questa regione, di utilizzare un'incognita scalare.

Introduciamo, come già fatto in magnetostatica, il campo indisturbato $\underline{\mathbf{H}}_s$, ossia il campo che sarebbe prodotto dalle correnti imposte in tutto il dominio V , se le correnti indotte nel materiale conduttore non fossero presenti.

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_s = \underline{\mathbf{J}}^* \\ \nabla \cdot \mu \underline{\mathbf{H}}_s = 0 \end{cases} \quad \text{in } V \quad (4)$$

Tale campo si diffonde istantaneamente in tutto lo spazio (in questo senso è statico) anche se, in generale le correnti impresse possono dipendere dal tempo. Assumiamo che $\underline{\mathbf{J}}^*$ sia nullo nella regione conduttrice V_c e che $\underline{\mathbf{H}}_s$ soddisfi anche tutte le condizioni al contorno e di raccordo. La differenza $\underline{\mathbf{H}}_r = \underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{H}}_s$ (5) viene chiamato campo di reazione e rappresenta appunto il contributo al campo portato dalle correnti indotte nel materiale conduttore. Questo campo soddisfa alle relazioni:

$$\nabla \times (\sigma^{-1} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_r) + \frac{\partial (\mu \underline{\mathbf{H}}_r)}{\partial t} = - \frac{\partial (\mu \underline{\mathbf{H}}_s)}{\partial t} \quad \text{in } V_c \quad (6)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_r = 0 \\ \nabla \cdot (\mu \underline{\mathbf{H}}_r) = 0 \end{cases} \quad \text{in } V - V_c \quad (7)$$

cui vanno aggiunte le condizioni iniziali e di raccordo; le condizioni al contorno saranno nulle essendo soddisfatte da $\underline{\mathbf{H}}_s$.

Poiché nella (7) non vi sono correnti impresse, si può porre $\underline{\mathbf{H}}_r = -\nabla\varphi$ in $V-V_c$ dove φ è una funzione armonica (cioè con laplaciano nullo) che può essere facilmente accoppiata ad $\underline{\mathbf{H}}$ sulle frontiere di interfaccia tra mezzi conduttori e non-conduttori imponendo che la componente tangente del campo $\underline{\mathbf{H}}$ coincida con la derivata direzionale di φ lungo la tangente.

Il modello da risolvere diventa in questo modo:

$$\nabla \times (\sigma^{-1} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}_r) + \frac{\partial (\mu \underline{\mathbf{H}}_r)}{\partial t} = - \frac{\partial (\mu \underline{\mathbf{H}}_s)}{\partial t} \quad \text{in } V_c \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \varphi) = 0 \quad \text{in } V - V_c \quad (8)$$

Gli svantaggi di questa formulazione sono i seguenti:

- Occorre precalcolare $\underline{\mathbf{H}}_s$ risolvendo in ogni istante un problema magnetostatico.
- Occorre imporre esplicitamente (o garantire automaticamente con qualche artificio numerico) le condizioni di raccordo sulla superficie S_c del conduttore, dato che a cavallo di essa cambia la rappresentazione del campo magnetico.
- Permane il problema delle condizioni di continuità menzionato in precedenza. Nelle implementazioni FEM, per le difficoltà associate all'imposizione delle condizioni fisiche di interfaccia sulla componente tangente di $\underline{\mathbf{H}}$ attraverso funzioni di base nodali, questa formulazione viene comunemente associata all'uso delle "edge functions".
- In situazioni con pronunciato effetto pelle (alti valori di σ) il campo di reazione compensa quasi perfettamente il campo indisturbato all'interno del materiale conduttore. Pertanto il calcolo del campo magnetico totale tramite la (5) comporta elevati errori di cancellazione.

c) Formulazione magnetica in termini di potenziale (metodo \mathbf{T} - Ω - Ω)

Per ovviare al problema delle condizioni di continuità, il mezzo classico è quello di ricorrere alle funzioni potenziale. In particolare, nel caso magnetico, si impone automaticamente la condizione di solenoidalità sulla densità di corrente $\underline{\mathbf{J}}$ attraverso la posizione $\underline{\mathbf{J}} = \nabla \times \underline{\mathbf{T}}$ in V_c (9). Usando la notazione del precedente paragrafo, risulta:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}_r = \nabla \times \underline{\mathbf{T}} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{H}}_r = \underline{\mathbf{T}} - \nabla \Omega \text{ in } V_c \quad (10)$$

dove Ω è il potenziale scalare magnetico.

Le equazioni (6) e (8) diventano in questa formulazione:

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \underline{\mathbf{T}} + \mu \frac{\partial (\underline{\mathbf{T}} - \nabla \Omega)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial (\underline{\mathbf{H}}_s)}{\partial t} \text{ in } V_c \quad (11)$$

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \Omega) = 0 \text{ in } V - V_c \quad (12)$$

Così facendo sparisce il problema delle condizioni di raccordo; infatti è possibile mantenere sia $\underline{\mathbf{T}}$ che Ω continui, mentre $\underline{\mathbf{H}}_r$ può avere componente normale discontinua (nel caso di discontinuità nella permeabilità dei mezzi a contatto), in modo da assorbire le discontinuità di $\partial \Omega / \partial n$. Il prezzo da pagare è l'imposizione di una condizione aggiuntiva (Gauge) per garantire l'unicità della soluzione in termini di $\underline{\mathbf{T}}$ e Ω . In analogia a quanto fatto in magnetostatica, si può imporre la Gauge di Coulomb: $\nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} = 0$ oppure la gauge a 2 componenti $\underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = 0$ dove $\underline{\mathbf{u}}$ è un arbitrario campo vettoriale che non possiede linee di campo chiuse. In questo modo, oltre ad assicurare l'unicità della soluzione, si ha l'ulteriore vantaggio di ridurre il numero di gradi di libertà di $\underline{\mathbf{T}}$ da tre a due.

Il principale limite della formulazione è la scarsa accuratezza dei risultati in presenza di regioni ferromagnetiche (all'interno dei quali sia $\underline{\mathbf{H}}$ che $\underline{\mathbf{H}}_s$ sono piccoli in modulo), specie durante le fasi transitorie (quando le correnti parassite impediscono la penetrazione del campo all'interno del materiale ferromagnetico), a causa dei problemi di cancellazione ($|\underline{\mathbf{H}}_r|$ è piccolo come $|\underline{\mathbf{H}}|$ ed $|\underline{\mathbf{H}}_s|$, e viene calcolato attraverso la differenza di $\underline{\mathbf{T}}$ e $\nabla \Omega$).

d) Formulazione elettrica in termini di campo: formulazione \mathbf{A}^*

Nelle formulazioni elettriche le grandezze primarie sono direttamente legate al campo elettrico. In particolare si può porre: $-\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^*$ (13)

dove \mathbf{A}^* è unica a patto di scegliere opportunamente le condizioni iniziali.

Le equazioni di campo in termini di \mathbf{A}^* -chiamato *potenziale vettore modificato* - si scrivono

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}^* \right) + \sigma \frac{\partial (\mathbf{A}^*)}{\partial t} &= 0 \quad \text{in } V_c \\ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}^* \right) &= \mathbf{J}^* \quad \text{in } V - V_c \\ \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{A}^*) &= 0 \quad \text{in } V - V_c \end{aligned} \quad (14)$$

con le condizioni iniziali, al contorno e di raccordo: $\begin{cases} [\mathbf{A}^*] \times \hat{\mathbf{n}}_s = 0; \\ [\sigma \mathbf{A}^*] \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = 0; \end{cases}$ su S_c

- La terza delle (14) è la legge di Gauss (avendo supposto nulla la densità di carica) ed equivale all'imposizione della condizione di Gauge. Si noti che per una singola regione conduttrice con ε costante, si ha esattamente la Gauge di Coulomb.
- In modo duale a quanto accade per le formulazioni magnetiche, sono in questo caso le discontinuità della conducibilità elettrica a dover essere opportunamente trattate, in quanto, quando si impone la continuità della componente normale di \mathbf{J} , una componente di \mathbf{A}^* risulta discontinua.
- la presenza dell'operatore rot-rot può produrre matrici singolari o molto malcondizionate quando la conducibilità tende a zero oppure nel caso di problemi in bassa frequenza.

Si noti che impiegare il potenziale vettore modificato equivale a risolvere il problema direttamente in termini del campo elettrico \mathbf{E} .

e) Formulazione elettrica mista: formulazione $\mathbf{A}^*-\Omega$

Per evitare di dover trovare un'incognita vettoriale al di fuori dei conduttori si possono in quella zona ripetere le considerazioni fatte precedentemente per la formulazione magnetica mista., ed introdurre anche ora un potenziale scalare

magnetico per descrivere il campo di reazione.

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}^* \right) + \sigma \frac{\partial (\mathbf{A}^*)}{\partial t} &= 0 \quad \text{in } V_c \\ \nabla \cdot (\mu \nabla \Omega) &= 0 \quad \text{in } V - V_c \end{aligned}$$

Va posta particolare attenzione nell'imposizione delle condizioni di raccordo, in quanto le incognite sono ora di natura differente: elettrica in V_c , magnetica fuori

f) Formulazione elettrica in termini di potenziali: formulazione $\underline{\mathbf{A}}-V-\varphi$

Per superare il problema delle condizioni di continuità si possono anche ora introdurre i potenziali, in particolare il potenziale vettore magnetico $\underline{\mathbf{A}}$, ponendo

$$\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \quad (16)$$

La legge di Faraday diventa: $\nabla \times \left(\underline{\mathbf{E}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}$; da cui si ricava:

$$\underline{\mathbf{E}} = - \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V \right) \quad (17)$$

dove V è un potenziale scalare.

Per mezzi materiali lineari, nella regione dei conduttori, le equazioni di campo diventano:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{\mathbf{A}} + \sigma \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V \right) = \mathbf{0} \quad \text{in } V_c \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \sigma \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \quad \text{in } V_c \quad (19)$$

Dove, la (19) è la legge di continuità della corrente ed è dipendente dalla (18), Fuori dalla regione conduttrice ($V-V_c$) usando il potenziale ridotto si ha:

$$\nabla \cdot \mu \nabla \varphi = 0$$

Sulla frontiera dei conduttori, la condizione di continuità sulla componente normale di \mathbf{J} implica che:

$$\mathbf{J}_n = -\sigma \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V \right) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

mentre all'interfaccia tra mezzi conduttori di diversa conducibilità risulta:

$$\left[\sigma \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] \cdot \mathbf{n} = 0$$

Per avere unicità della soluzione sarà necessario imporre una condizione sulla divergenza di $\underline{\mathbf{A}}$ (Gauge) e sul valore assunto da V sul contorno del dominio.

Gauge di Coulomb

Se si impone la gauge di Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, le (18-19) diventano:

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 \underline{\mathbf{A}} = -\sigma \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V \right) \quad \text{in } V_c \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \sigma \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \quad \text{in } V_c \quad (21)$$

Ora la (21) non si ottiene più dalla divergenza della (20) e dunque è indipendente da essa. Si ha infatti:

$$\nabla^2 \nabla \cdot \left(\frac{\underline{\mathbf{A}}}{\mu} \right) = \nabla \cdot \left(-\sigma \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla V \right) \right) = 0 \quad \text{in } V_c \rightarrow \nabla^2 \left(\nabla \cdot \left(\frac{\underline{\mathbf{A}}}{\mu} \right) \right) = 0 \quad \text{in } V_c \quad (22)$$

che è indipendente dalla (21).

Si può vedere che se si impone $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ (23) sulla frontiera del conduttore, si forza in modo automatico la gauge di Coulomb. Tuttavia vi possono essere difficoltà pratiche nell'imporre la (23)

Nel caso in cui σ è costante la (21) ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) si riduce a $\nabla^2 V = 0$ in V_c e poiché la (23) è soddisfatta sulla frontiera del conduttore, V deve essere al massimo una costante.

Gauge di Lorenz

Se, viceversa, si adopera la gauge di Lorenz, che per i problemi di correnti parassite assume la forma $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\sigma V$ si perviene, nel caso di mezzi lineari ed omogenei, alle equazioni:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \left(\frac{1}{\mu\sigma} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \quad (24)$$

$$-\mu\sigma^2 \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \sigma (\nabla V) = 0 \quad (25)$$

Il maggior vantaggio di questa gauge è il disaccoppiamento che determina tra le due equazioni. Le equazioni (24) e (25) ammettono soluzione unica se viene assegnato V oppure $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ sulla superficie del conduttore. L'unicità è garantita anche nel dominio della frequenza purché sia $\omega \neq 0$. A frequenza zero, invece, l'unicità della soluzione è garantita solo se la condizione al contorno viene imposta attraverso $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$.

Così come la Gauge di Coulomb, la Gauge di Lorenz può essere applicata anche in presenza di mezzi disomogenei o non lineari. Tuttavia, in questi casi, il disaccoppiamento tra \mathbf{A} e V non è garantito.

7) Propagazione

I fenomeni propagativi costituiscono una famiglia di problemi estremamente vasta e diversificata. Appare opportuno introdurre una classificazione più dettagliata:

1) *Problemi propagativi transitori*. Vengono generalmente affrontati nel dominio del tempo. Vengono adoperati metodi alle differenze finite (time-stepping) per l'avanzamento nel tempo delle equazioni differenziali associate al problema.

2) *Problemi propagativi in regime armonico nello spazio libero o in mezzi lineari*: L'approccio classico è quello di ridurre le equazioni differenziali ad equazioni algebriche complesse attraverso la trasformata di Fourier. La soluzione viene quindi determinata nel dominio della frequenza.

Data la vastità del problema, risulta impossibile anche solo menzionare tutte le formulazioni proposte e i problemi di interesse del settore. Ci si limiterà, pertanto, ad accennare solo ad alcuni argomenti, e in particolare:

- la determinazione degli autovalori nelle cavità risonanti;
- la propagazione nelle guide d'onda in condizioni di regime sinusoidale;
- la questione dei modi spuri;

Riguardo ai problemi propagativi a carattere transitorio si rimanda invece al paragrafo successivo.

Determinazione degli autovalori nelle cavità risonanti

L'energia elettromagnetica può essere trasmessa attraverso conduttori cavi dette guide d'onda. Nel corso della propagazione, i campi possono assumere diverse configurazioni dette modi la cui forma dipende dalle caratteristiche geometriche ed elettriche della struttura guidante. Una cavità risonante può essere considerata una guida d'onda cortocircuitata ad una estremità. Se la guida viene alimentata all'altra estremità si stabilisce un'onda stazionaria in analogia a quanto succede ad una linea in corto-circuito; in particolare, indicata con λ_g la lunghezza d'onda del campo elettromagnetico nella guida (il cui valore è legato alla geometria della guida e alla lunghezza d'onda del segnale), a distanza $\lambda_g/2$ dalla terminazione il campo è nullo. Si può pertanto chiudere la guida con un piano posto a distanza $\lambda_g/2$ dalla terminazione senza disturbare la distribuzione del campo: si realizza in questa maniera una cavità risonante. Il risonatore può avere più modi di oscillazione e quindi più frequenze di risonanza: il modo fondamentale è quello che ha la frequenza più bassa.

La soluzione del problema della cavità risonante implica la soluzione di un problema agli autovalori. Le equazioni governanti in una formulazione basata sul potenziale vettore magnetico e sul potenziale scalare sono:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = (\varepsilon \omega^2 - j \omega \sigma) \mathbf{A} - (\sigma + j \omega \varepsilon) \nabla V \quad \text{in } \Omega,$$

dove per le cavità risonanti si assume che la variazione temporale dei campi è armonica e che la frequenza sia abbastanza alta da escludere la penetrazione del campo nei conduttori (questo implica che i conduttori possano essere rappresentati in termini di condizioni sulla frontiera, Σ , mentre all'interno del dominio, Ω , si possa assumere $\sigma=0$). Per assicurare l'unicità della soluzione, può essere adottata la gauge di Lorenz nel limite delle alte frequenze:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= -j \omega \mu \varepsilon V & \text{in } \Omega \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= -j \omega \varepsilon \beta V & \text{su } \Sigma \end{aligned}$$

dove β è una costante positiva arbitraria, mentre \mathbf{n} è il versore uscente normale a Σ .

Problemi in guide d'onda

Se il problema consiste nel determinare il comportamento di un dato modo (noto) propagantesi in una guida d'onda nella quale vari ostacoli possono essere posizionati (ad esempio conduttori non-ideali, permittività complesse, etc.) bisogna adottare la gauge di Lorenz nella sua forma completa [18]:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \sigma V - \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{in } \Omega$$

in tal caso l'equazione governante assume la forma:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega$$

In questo modo si determina il potenziale vettore magnetico e quindi il campo magnetico. Per la determinazione del campo elettrico è necessario calcolare V . Esso si ottiene risolvendo l'equazione:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla V + \nabla \cdot \varepsilon \frac{\partial \nabla V}{\partial t} = -\nabla \cdot \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \cdot \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad \text{in } \Omega$$

dove il potenziale \mathbf{A} è una quantità nota dalla soluzione dell'equazione precedente.

Modi spuri

Uno degli argomenti di maggiore interesse per la comunità scientifica nel settore della propagazione EM, è quello dell'identificazione e dell'eliminazione dei cosiddetti modi spuri dalle soluzioni numeriche dei problemi relativi alle cavità risonanti. Una possibile origine delle soluzioni spurie si individua facilmente esaminando il semplice modello del problema propagativo quando ci si trova in condizioni di regime armonico, in presenza di mezzi omogenei non-dissipativi e in assenza di termini sorgente:

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0\mu_r \hat{\mathbf{H}} \quad \text{in } \Omega \quad (1a) \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{H}} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (26a)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = j \omega \epsilon_0 \epsilon_r \hat{\mathbf{E}} \quad \text{in } \Omega \quad (1b) \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (26b)$$

$$\hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{in } \Sigma_E \quad (1c) \quad \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{in } \Sigma_E \quad (26c)$$

$$\hat{\mathbf{H}} \times \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{in } \Sigma_H \quad (1d) \quad \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{in } \Sigma_H \quad (26d)$$

dove la frontiera del dominio di definizione del problema Ω è stata divisa in due parti per tenere conto delle due possibili condizioni al contorno: Σ_H (piano di simmetria) e Σ_E (conduttore perfetto o piano di anti-simmetria).

Per $\omega=0$ tale problema si scinde in due problemi distinti (uno per $\hat{\mathbf{E}}$ e uno per $\hat{\mathbf{H}}$). Ricordando il teorema di Helmholtz è facile verificare che l'unica soluzione possibile per i campi è quella banale $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$.

Per $\omega \neq 0$ le equazioni relative alla divergenza e alle componenti normali dei campi sulla frontiera sono automaticamente dedotte dalle equazioni immediatamente precedenti e, pertanto, esse spesso non vengono incluse esplicitamente nelle formulazioni. Dato, però, che l'implicazione non sussiste per $\omega=0$ e, d'altra parte, le equazioni (26) sono essenziali perché la soluzione sia $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$, la loro omissione genera soluzioni non banali a frequenza nulla che nel problema fisico non esistono: le soluzioni spurie.

Il problema modellato attraverso le relazioni (26) può essere riformulato in forma equivalente attraverso uno solo dei campi ad esempio il campo elettrico $\hat{\mathbf{E}}$ come:

$$(\epsilon\mu)^{-1} \nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{E}} = k^2 \hat{\mathbf{E}} \quad \text{in } \Omega \quad (27a)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (27b)$$

$$\hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{in } \Sigma_E \quad (27c)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{in } \Sigma_H \quad (27d)$$

$$\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{in } \Sigma_H \quad (27e)$$

dove $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$. Si può facilmente dimostrare che la formulazione (27) esclude a priori la presenza di modi spuri.

Va, tuttavia, osservato che la (27) impone quattro equazioni scalari, lasciando a disposizione tre soli gradi di libertà. Nel caso delle guide d'onda e delle cavità a simmetria assiale il problema si risolve esplicitando la (27b) in termini di una delle componenti di $\hat{\mathbf{E}}$, sostituendo nella (27a) ed usando poi due sole delle tre equazioni che la (27a) mette a disposizione. Nel caso di formulazioni 3D, tuttavia il metodo non è applicabile e pertanto vanno usate formulazioni differenziali che non sono a priori esenti dalla presenza di modi spuri.

Appare opportuno, a questo proposito, distinguere le formulazioni proposte in due gruppi: da una parte si possono collocare i metodi caratterizzati dall'impiego di funzioni di forma nodali, dall'altra quelli basati sull'impiego degli edge elements.

Nel caso di elementi finiti nodali, le approssimazioni inaccurate del numero d'onda zero non possono essere distinte dagli autovalori fisicamente diversi da zero, che anzi sovente risultano contaminati da parte dei modi spuri. D'altra parte il fatto che la divergenza delle soluzioni spurie è diversa da zero può essere adoperata per filtrare le soluzioni reali da quelle dovute all'approssimazione numerica.

Uno dei primi lavori in cui si tratta intorno alle soluzioni spurie, è quello di Davies, il quale, pur non adottando alcun accorgimento per forzare la condizione di solenoidalità dei campi, propone un semplice criterio per identificare le soluzioni spurie: integrare il quadrato della divergenza.

Successivamente venne proposto di eliminare la divergenza dei campi attraverso l'introduzione di un termine di penalità. Questo approccio, tuttavia, anziché eliminare le soluzioni spurie, finisce col creare una nuova sorgente di modi spuri. Webb risolve il problema attraverso l'introduzione di un algoritmo iterativo che aggiusta in maniera conveniente per ciascun modo i coefficienti di penalità.

Nelle formulazioni basate sugli "edge elements" poiché i modi spuri compaiono a frequenza esattamente nulla ed anche in numero prevedibile a priori, si può evitare di calcolarli. Per questo in letteratura le formulazioni basate sugli "edge elements" sono indicate con una terminologia un po' impropria come esenti da soluzioni spurie