

Formulazioni EM basate sulla minimizzazione dell'errore costitutivo

1) Magnetostatica

Il metodo basato sulla minimizzazione dell'errore è stato introdotto da Rikabi per affrontare il problema magnetostatico (1988):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_S \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad (3) \quad + \text{CONDIZIONI AL CONTORNO}$$

Sotto l'ipotesi di stretta monotonia per la relazione costitutiva, egli propone di soddisfare esattamente le equazioni di campo (1) e (2) ponendo:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S - \nabla \Omega \quad (4) \quad \text{con } \nabla \times \mathbf{H}_S = \mathbf{J}_S \text{ preassegnato}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5)$$

e di soddisfare in modo approssimato la relazione (3) attraverso la minimizzazione di un funzionale di errore

$$\Lambda(\mathbf{H}, \mathbf{B}) \geq 0 \quad (6)$$

con la relazione di uguaglianza valida solo se la coppia $(\mathbf{H}^*, \mathbf{B}^*)$ soddisfa esattamente la (3).

Sotto l'ipotesi che le condizioni al contorno non siano di tipo misto, si dimostra che il funzionale di errore è scomponibile in due funzionali, ciascuno dipendente da uno solo dei campi incogniti:

$$\Lambda(\mathbf{H}, \mathbf{B}) = \Theta(\mathbf{H}) + \Xi(\mathbf{B}) \geq 0; \quad \text{con} \quad \Lambda(\mathbf{H}^*, \mathbf{B}^*) = \Theta(\mathbf{H}^*) + \Xi(\mathbf{B}^*) = 0$$

È semplice verificare che vale la disuguaglianza:

$$-\Theta(\mathbf{H}) \leq -\Theta(\mathbf{H}^*) = \Xi(\mathbf{B}^*) \leq \Xi(\mathbf{B})$$

I funzionali Θ e Ξ rappresentano pertanto dei limiti inferiori e superiori per una quantità che si vede coincidere con l'energia magnetostatica nel sistema.

2) Elettrocinematica stazionaria

Le equazioni di campo, che corrispondono alle leggi di Kirchhoff, sono:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{in } V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{in } V$$

Nel caso più generale (presenza in una parte del dominio di Forze Elettromotrici, F.E.M), l'equazione costitutiva (che corrisponde alla legge locale di Ohm) diventa:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad \text{in } V$$

Le condizioni al contorno sull'interfaccia tra materiali conduttori ed isolanti e sugli elettrodi dove viene imposto il potenziale si scrivono rispettivamente come

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{on } \partial V_j \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 & \text{on } \partial V_e \end{aligned}$$

dove denotiamo con

- V il dominio conduttivo
- \mathbf{E} il campo elettrico
- \mathbf{J} il campo densità di corrente
- \mathbf{E}_j il campo elettromotore
- σ la conducibilità elettrica
- ∂V_j e ∂V_e le parti della frontiera su cui sono imposte rispettivamente le condizioni al contorno sui campi elettrico e di corrente.

Se si decide di risolvere questo problema utilizzando la formulazione basata sulla minimizzazione dell'errore costitutivo, occorrerà:

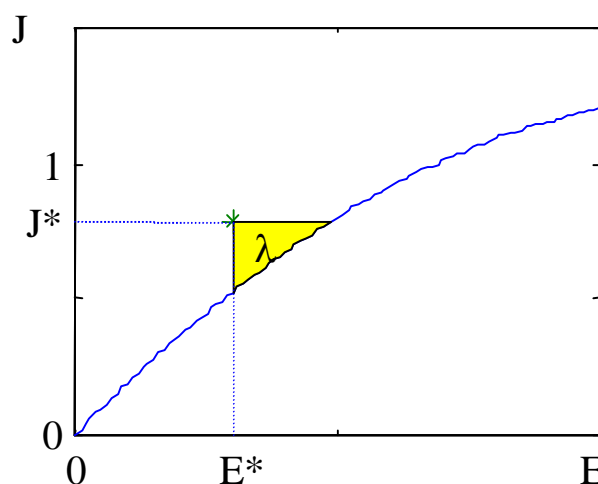
- introdurre due potenziali complementari, \mathbf{T} e ϕ , per soddisfare automaticamente le due equazioni di campo

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

attraverso le posizioni

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}$$

- definire il funzionale locale di errore λ , che può essere:
 - nel caso lineare passivo $\rightarrow \lambda = (\mathbf{J} - \sigma \mathbf{E})^2 / 2\sigma = [\nabla \times \mathbf{T} + \sigma \nabla \phi]^2 / 2\sigma$;
 - nel caso generale non lineare una conveniente espressione analitica che descriva il valore della regione evidenziata in giallo nella figura seguente.



Schema di principio della formulazione basata sull'errore per il problema ECS

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

$$+ \phi = \phi^* \text{ su } \partial V_\phi$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}$$

$$+ \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}^* \text{ su } \partial V_j$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

$$\Lambda(\mathbf{T}, \phi) = \int_V \lambda(\mathbf{T}, \phi) dV = \int_V [\mathbf{J} - \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)]^2 / \sigma dV$$

Funzionale globale d'errore da minimizzare

Formalizzazione del problema ECS nelle formulazioni numeriche basate sugli elementi finiti:

$$\min \Lambda(\mathbf{T}, \phi)$$

$$\min \int_V [\mathbf{J} - \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)]^2 / \sigma dV = \min \int_V [\nabla \times \mathbf{T} - \sigma(-\nabla \phi + \mathbf{E}_i)]^2 / \sigma dV$$

$$\Lambda(\mathbf{T}, \phi) > 0 \quad \forall (\mathbf{T}, \phi) \neq (\mathbf{T}_0, \phi_0)$$

$$\Lambda(\mathbf{T}_0, \phi_0) = 0 \quad \text{dove } (\mathbf{T}_0, \phi_0) \text{ è la soluzione esatta del problema}$$

3) Definizione di maggioranti e minoranti (bounds) locali e globali

a) Splitting (decomposizione) del funzionale di errore

Facciamo riferimento al problema dell'elettro-cinematica stazionaria.

Sotto opportune condizioni al contorno (omogeneità) il funzionale globale di errore può essere diviso in due funzionali ciascuno dei quali dipende da uno solo dei potenziali incogniti:

$$\Lambda(\mathbf{T}, \phi) = \Xi(\mathbf{T}) + \mathfrak{G}(\phi) \geq \Xi(\mathbf{T}_0) + \mathfrak{G}(\phi_0) = 0$$

Se per il problema sotto indagine sono assegnate condizioni al contorno omogenee, i due funzionali di errore si scrivono come

$$-\Xi(\mathbf{T}) = -\int_V (\nabla \times \mathbf{T})^2 / \sigma \, dV + 2 \int_V (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{E}_i \, dV$$

$$\mathfrak{G}(\phi) = \int_V \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{E}_i)^2 \, dV$$

e la scomposizione risulta possibile applicando il teorema di conservazione delle potenze virtuali:

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = -\int_V (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \nabla \phi \, dV = 0$$

b) Bounds su quantità EM globali (problemi stazionari lineari o non-lineari)

L'esatto valore della potenza ohmica, P_0 , dissipata nell'intero dominio V è dato da:

$$P_0 = -\Xi(\mathbf{T}_0) = \mathfrak{G}(\phi_0)$$

Sussistono le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{l} \Xi(\mathbf{T}_0) + \mathfrak{G}(\phi) \geq \Xi(\mathbf{T}_0) + \mathfrak{G}(\phi_0) \\ \Xi(\mathbf{T}) + \mathfrak{G}(\phi_0) \geq \Xi(\mathbf{T}_0) + \mathfrak{G}(\phi_0) \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} P_U = \mathfrak{G}(\phi) \geq \mathfrak{G}(\phi_0) \\ P_L = \Xi(\mathbf{T}) \geq \Xi(\mathbf{T}_0) \end{array}$$

Da cui la soluzione numerica calcolata restituisce i seguenti bounds per la potenza:

$$P_L(\mathbf{T}) = -\Xi(\mathbf{T}) \leq -\Xi(\mathbf{T}_0) = P_0 = \mathfrak{G}(\phi_0) \leq \mathfrak{G}(\phi) = P_U(\phi)$$

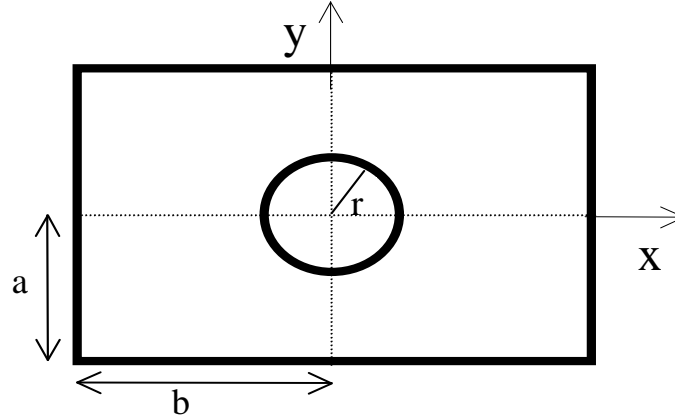
Come secondo esempio, consideriamo l'espressione per il calcolo dell'induttanza di due avvolgimenti collegati in serie (con " L_j " denotiamo l'autoinduttanza del j -mo avvolgimento, con " M " la mutua induttanza tra i due avvolgimenti e con " L " l'induttanza totale della serie $L = L_1 + L_2 + 2M$ (1)

Sappiamo dal paragrafo precedente che è possibile ottenere per via numerica maggioranti e minoranti sulle quantità globali come l'energia magnetica associata ad un induttore, oppure al sistema costituito dai due induttori in serie. Con un po' di manipolazioni numeriche a partire da questi bounds si possono determinare quelli per L , L_1 , L_2 e, ottenuti questi, quelli per " M " attraverso la (1)

c) Bounds globali: Resistenza di lastra 2D con matrice periodica di fori circ.

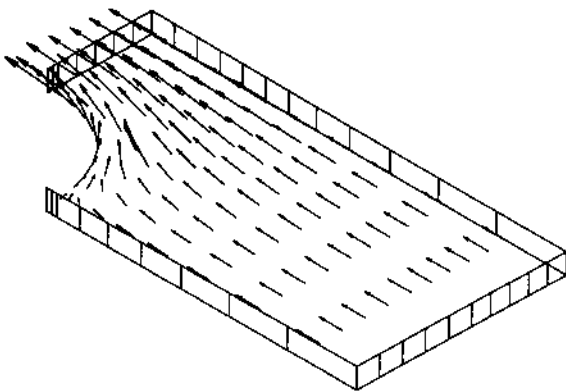
Per questo problema, il valore di raffronto può essere ottenuto attraverso l'espressione analitica di Clausius-Mossotti, valida con buona approssimazione per piccoli valori del rapporto r/a .

Si consideri una cella elementare di un piatto con fori circolari di raggio r ($b/a=2$):

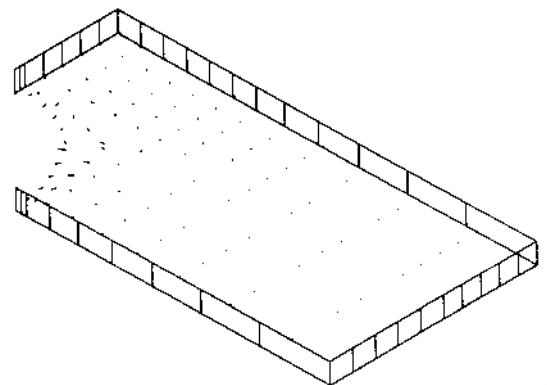


| | $r/a=0.25$ | $r/a=0.50$ | $r/a=0.75$ |
|---------------------|------------------|-------------------|------------------|
| σ_{xx} [S/m] | 950861 ± 169 | 802026 ± 1354 | 547053 ± 380 |
| σ_{yy} [S/m] | 953351 ± 151 | 837201 ± 437 | 697105 ± 681 |
| σ_{CM} [S/m] | 963631 | 859628 | 701616 |

Il tensore di conducibilità della lastra equivalente senza fori σ (S/m) ($\sigma_M=1$ MS/m), comparato con quello ottenuto attraverso l'approssimazione di Clausius-Mossotti, σ_{CM} .



(a)



(b)

Analisi numerica di una lastra piana con fori circolari:

- (a) densità di corrente ottenuta attraverso il potenziale vettore T ;
- (b) stima dell'errore numerico: $J - \sigma E$

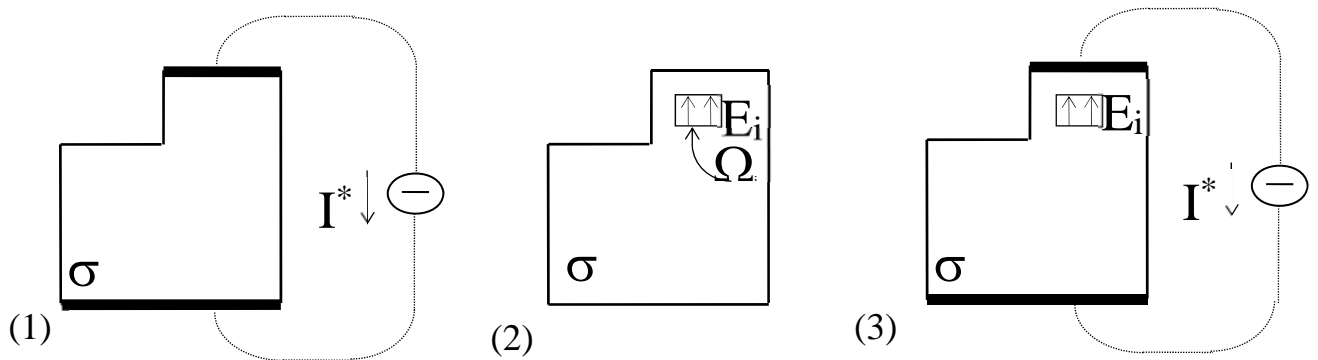
d) Bounds su quantità EM locali (problemi stazionari lineari)

Attraverso la formulazione basata sulla minimizzazione dell'errore ed utilizzando ben note espressioni per il calcolo dell'energia magnetica mutua tra due o più avvolgimenti (oppure dell'energia elettrostatica mutua tra due o più conduttori), della co-energia, della potenza, della resistenza, dell'induttanza è possibile stabilire per via numerica maggioranti e minoranti di quantità elettromagnetiche locali (ad es. la componente di un campo EM lungo una certa direzione, oppure il valore del potenziale scalare, o ancora il valore della densità di energia o di potenza ohmica dissipata in un punto generico del dominio spaziale).

Facciamo riferimento ad un problema di elettro-cinematica stazionaria e supponiamo di voler calcolare i bounds della componente del campo di corrente lungo la direzione \mathbf{n} nel generico punto dello spazio, \mathbf{P} .

Introduciamo nel dominio conduttivo una regione, Ω_i , di forma quadrata centrata nel punto \mathbf{P} e sede di un campo elettromotore ausiliario, \mathbf{E}_i , orientato lungo \mathbf{n} .

Calcoliamo il valore della potenza ohmica mutua dissipata nella regione sede del campo elettromotore ausiliario. È chiaro che questa potenza sarà pari al prodotto della componente media del campo di corrente lungo la direzione per il valore del campo elettromotore per il valore dell'area della sezione ausiliaria. Nel limite in cui la sezione ausiliaria viene contratta ad un punto la media coincide col valore del campo di corrente nel punto. I bounds su questa quantità locale possono essere dedotti dai bounds globali sulla potenza ohmica mutua dissipata nella regione Ω_i .



Problema reale

problema ausiliario

sovrapposizione

Attraverso la soluzione di tre problemi si stabiliscono i bounds per il valore medio della densità di corrente nella regione Ω_i . Si è indicato con ∂V_{j0} (risp. ∂V_{j1}) la parte della frontiera dove $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}^* = 0$ (risp. $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}^* \neq 0$).

4) MODELLO DI MAXWELL COMPLETO

a) Introduzione

Le equazioni di Maxwell in forma locale sono

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t) \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{J}(\mathbf{x},t) + \partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t) / \partial t \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t) / \partial t \quad (1d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x},t) = -\partial \rho(\mathbf{x},t) / \partial t \quad (1e)$$

Per chiudere il problema occorre aggiungere

- le relazioni costitutive:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{f}_B(\mathbf{H},\mathbf{x},t), \quad (2a)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \mathbf{f}_D(\mathbf{E},\mathbf{x},t), \quad (2b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \mathbf{f}_J(\mathbf{E},\mathbf{x},t) \quad (2c)$$

che sono supposte monotone in ogni istante di tempo: $\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}} \geq 0$; $\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \geq 0$; $\underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \geq 0$;

- opportune condizioni iniziali, al contorno e sulle superfici di interfaccia tra materiali che presentano brusche discontinuità delle proprietà dei materiali

Albanese e Fresa (1994) hanno proposto di combinare il campo di corrente e lo spostamento elettrico in un nuovo campo EM, il “campo di spostamento totale”:

$$\mathbf{D}_T(\mathbf{x},t) = \mathbf{D}_{T_0}(\mathbf{x}) + \int_0^t (\mathbf{J}(\mathbf{x},t) + \partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t) / \partial t) dt \quad (3)$$

Con questa posizione le equazioni di Maxwell assumono una forma simmetrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_T = 0 \quad (4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D}_T / \partial t \quad (4c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (4d)$$

E le relazioni costitutive (2a,2b e 2c) si possono condensare nelle seguenti espressioni:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{f}_B(\mathbf{H}(\mathbf{x},t),\mathbf{x},t), \quad (5a)$$

$$\mathbf{D}_T(\mathbf{x},t) = \mathbf{D}_{T_0}(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_D(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{x},t) + \int_0^t \mathbf{f}_J(\mathbf{E}(\mathbf{x},t'),\mathbf{x},t') dt' \quad (5b)$$

Se ora definiamo due potenziali vettori nel seguente modo:

$$\mathbf{A} = - \int_0^t \mathbf{E} dt \quad (6a)$$

$$\mathbf{W} = \int_0^t \mathbf{H} dt \quad (6b)$$

e poniamo: $\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{x}},0) = \underline{\mathbf{B}}_0(\underline{\mathbf{x}})$; $\underline{\mathbf{D}}_T(\underline{\mathbf{x}},0) = \underline{\mathbf{D}}_{T_0}(\underline{\mathbf{x}})$ (7)

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\nabla\times\mathbf{A} \quad (8a)$$

$$\mathbf{D}_T=\mathbf{D}_{T_0}+\nabla\times\mathbf{W} \quad (8b)$$

si perviene alle formulazioni duali:

$$\nabla\times\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}_T/\partial t \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \quad (9)$$

$$\mathbf{H}=\partial\mathbf{W}/\partial t, \quad \mathbf{E}=-\partial\mathbf{A}/\partial t,$$

$$\nabla\times\mathbf{H} - \partial\mathbf{D}_T/\partial t = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} + \partial\mathbf{B}/\partial t = 0, \quad \forall \mathbf{W} \quad \forall \mathbf{A}$$

nelle quali, per ogni arbitraria scelta dei potenziali \mathbf{A} e \mathbf{W} , le equazioni di Maxwell (1) risultano automaticamente soddisfatte.

b) Definizione del funzionale di errore, energia, co-energia

Si procede a questo punto alla definizione di un funzionale di errore locale $\lambda(\mathbf{x},t)\geq 0$ che descriva la misura con la quale le relazioni costitutive (5) sono soddisfatte: esso dovrà essere nullo solo nei punti spazio-temporali dove le suddette relazioni sono rigorosamente rispettate.

Una definizione ammissibile è la seguente:

$$\lambda(\mathbf{x},t) = \alpha_H [\mathbf{B}(\mathbf{x},t) - \mathbf{f}_B(\mathbf{H}(\mathbf{x},t),t)]^2 +$$

$$\alpha_E [\mathbf{D}_T(\mathbf{x},t) - \mathbf{D}_{T_0}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_D(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{x},t) + \mathbf{D}_0(\mathbf{x}) - \int_{t_0}^t \mathbf{f}_J(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),t) dt]^2 \quad (10)$$

dove α_H e α_E sono opportuni coefficienti di peso sulle relazioni costitutive magnetiche ed elettriche, che possono essere, in generale, funzione del tempo e che possono assumere eventualmente nello stesso problema valori diversi per differenti materiali.

Se nel dominio sono presenti materiali non lineari la precedente espressione non è applicabile e dovrà essere sostituita dalla seguente:

$$\lambda(\mathbf{x},t) =$$

$$\alpha_H \left[\int_{H^*(x,t)}^{H(x,t)} \mathbf{f}_B(\mathbf{h}, \mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{h} + \int_{B^*(x,t)}^{B(x,t)} \mathbf{f}_H(\mathbf{b}, \mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{b} + \mathbf{H}^*(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{B}^*(\mathbf{x},t) - \mathbf{H}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \right] +$$

$$\alpha_E \left[\int_{D_T^*(x,t)}^{D_T(x,t)} \mathbf{f}_E(\mathbf{D}_T, \mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{D}_T + \int_{E^*(x,t)}^{E(x,t)} \mathbf{f}_{D_T}(\mathbf{E}, \mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{E} + \mathbf{E}^*(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{D}_T^*(\mathbf{x},t) - \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{D}_T(\mathbf{x},t) \right]$$

$$\forall t \in (t_k, t_{k+1}) \quad (2)$$

dove $\mathbf{f}_H(\mathbf{B}, \mathbf{x}, t)$ è la caratteristica magnetica inversa che fornisce \mathbf{H} rispetto a \mathbf{B} , per \mathbf{x} e t fissati; $(\mathbf{H}^*, \mathbf{B}^*)$ è una coppia che soddisfa la relazione costitutiva magnetica (2.2.1-9a); $\mathbf{f}_{D_T}(\mathbf{E}, \mathbf{x}, t)$ è il mapping non-lineare di $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ su $\mathbf{D}_T(\mathbf{x}, t)$ definito dalla relazione (2.2.1-9b); $\mathbf{f}_E(\mathbf{D}_T, \mathbf{x}, t)$ è la sua inversa rispetto a $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ ed, infine, $(\mathbf{E}^*, \mathbf{D}_T^*)$ è una coppia che soddisfa la relazione costitutiva elettrica (2.2.1-9b). Si noti che la relazione (2.2.1-9b) è dispersiva nel dominio del tempo, per cui un legame di tipo diretto tra i valori istantanei di $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{D}_T(\mathbf{x}, t)$ è possibile solo per casi particolari quali ad esempio quello in cui i potenziali \mathbf{A} e \mathbf{W} sono scelti a dinamica lineare in (t_k, t_{k+1}) . Ad esempio nel caso particolare di condizioni iniziali nulle, di assenza di sorgenti nel dominio e di linearità, isotropia, tempo-invarianza dei mezzi si ha:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3a)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3b)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3c)$$

da cui, assunto $\mathbf{D}_{T_0}(\mathbf{x}) = 0$, si ricava:

$$\mathbf{f}_H(\mathbf{B}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{B} / \mu \quad (4a)$$

$$\mathbf{f}_B(\mathbf{H}, \mathbf{x}, t) = \mu \mathbf{H} \quad (4b)$$

$$\mathbf{f}_{D_T}(\mathbf{E}, \mathbf{x}, t) = [(t - t_k)\sigma + \varepsilon] \mathbf{E} - \sigma \mathbf{A}(t) \quad \mathbf{k} \quad (4c)$$

$$\mathbf{f}_E(\mathbf{D}_T, \mathbf{x}, t) = [\mathbf{D}_T + \sigma \mathbf{A}(t_k)] / [(t - t_k)\sigma + \varepsilon] \quad (4d)$$

Come coppie di campi che soddisfano rispettivamente le relazioni costitutive elettrica e magnetica si possono scegliere:

$$\mathbf{E}^* = 0$$

$$\mathbf{D}_T^* = -\sigma \mathbf{A}(t_k)$$

$$\mathbf{H}^* = 0$$

$$\mathbf{B}^* = 0$$

In questo modo l'errore locale diventa:

$$\lambda(\mathbf{x}, t) = \alpha_H \{ [\mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \cdot [\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) / \mu] \} / 2 +$$

$$\alpha_E \{ [\mathbf{D}_T(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_{D_T}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t)] \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_E(\mathbf{D}_T(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t)] \} \quad (5)$$

$$\forall t \in (t_k, t_{k+1})$$

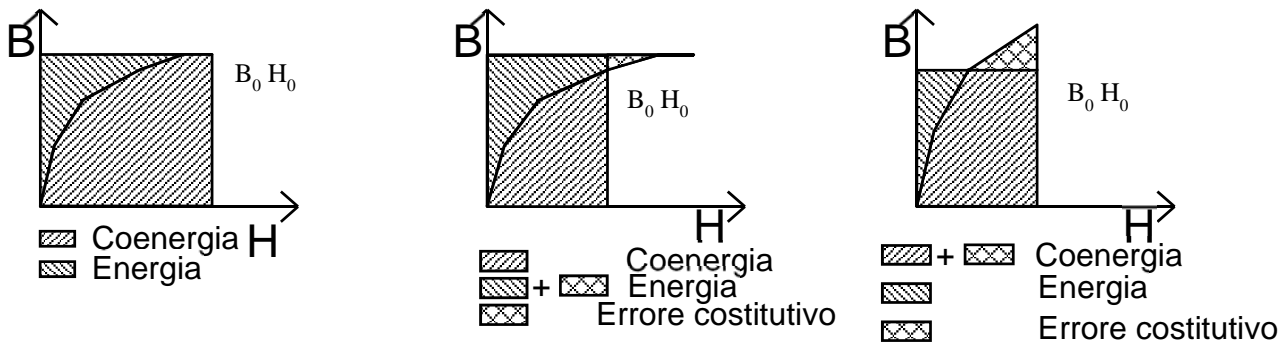


Fig.1 Il funzionale di errore locale definito dalla (2) per relazioni costitutive crescenti è sempre positivo e si annulla soltanto se la relazione costitutiva è verificata esattamente.

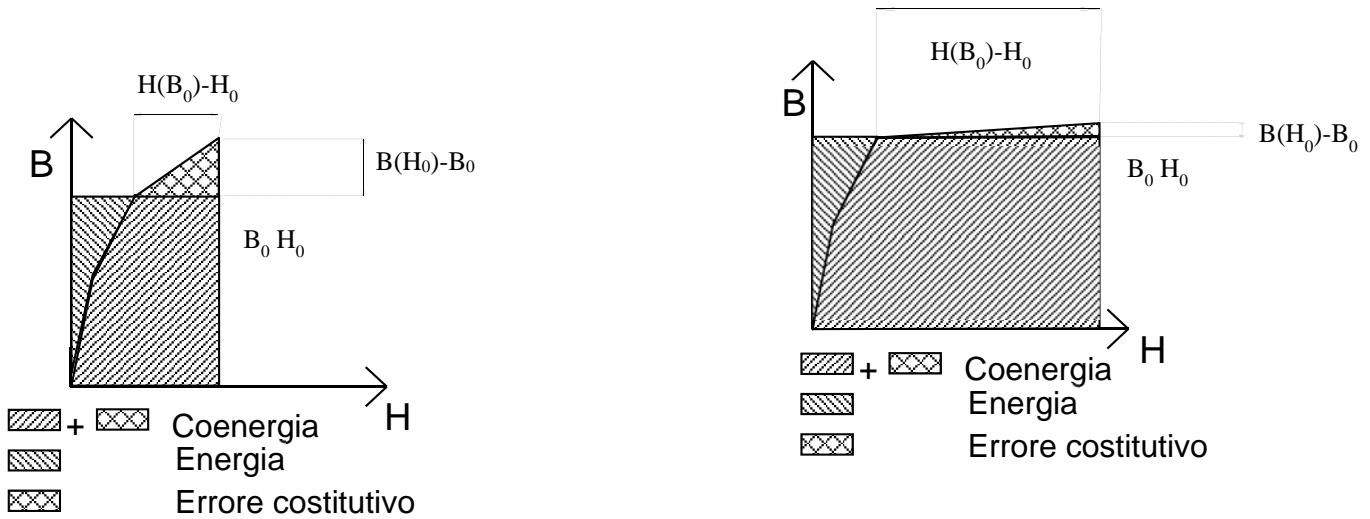


Fig.2 In questo caso le relazioni (1) e (2) sono entrambe accettabili

Fig.3 Situazione patologica per la relazione (1), ma non per la (2)

Il motivo della scelta sulla definizione dell'errore locale appare evidente se si fa riferimento al diagramma della relazione costitutiva B-H riportato in figura (1). Sulla stessa figura è stato evidenziato il significato geometrico degli errori associati alle relazioni (1) e (2). Si osservi che l'errore associato alla (1) è una distanza, mentre quello associato alla relazione (2) rappresenta fisicamente un'area. Questa scelta permette da un lato di evitare situazioni patologiche (vedi figura (3)), e dall'altro di bilanciare equamente il peso dell'errore sulle incognite. Si può notare a questo proposito l'inerente simmetria della (2) rispetto alle soluzioni nelle variabili \mathbf{A} e \mathbf{W} . Una volta definito un valore conveniente per i coefficienti di peso, il problema si riduce alla ricerca dei due potenziali vettori $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ e $\mathbf{W}(\mathbf{x},t)$ capaci di minimizzare il funzionale di errore globale Λ definito come

$$\Lambda = \int_0^T \int_V \lambda(\mathbf{x},t) dVdt \quad (6)$$

dove V è la regione spaziale di integrazione e $(0,T)$ l'intervallo temporale di interesse.

c) Esempio applicativo: stima dell'errore e criteri per il raffinamento della mesh

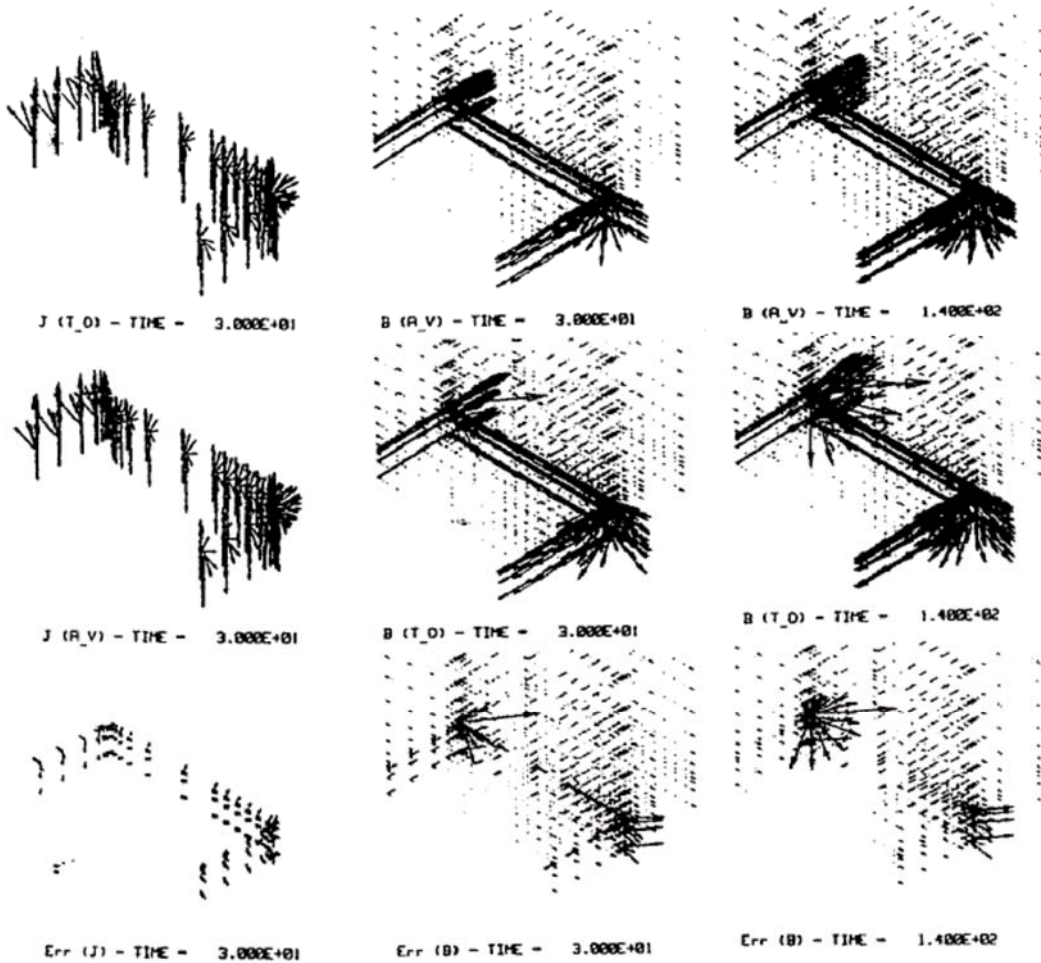


FIGURE 28. TEAM workshop Problem 10. Results obtained by the differential formulations with the fine mesh at the times $t = 30$ ms and $t = 140$ ms. Here $B(A_V)$ is the flux density $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$; $B(T_O)$ is the flux density $\mathcal{B}(\mathbf{H}) = \mathcal{B}(\mathbf{T} - \nabla\Omega + \mathbf{T}_s)$; $Err(B)$ is the error field $\mathbf{B} - \mathcal{B}(\mathbf{H})$; $J(T_O)$ is the current density $\mathbf{J} = \nabla \times (\mathbf{T} + \mathbf{T}_s)$; $J(A_V)$ is the current density $\mathbf{J}_s + \sigma\mathbf{E} = \mathbf{J}_s - \sigma(\partial\mathbf{A}/\partial t + \nabla\phi/\partial t)$; $Err(J)$ is the error field $\mathbf{J} - \mathbf{J}_s - \sigma\mathbf{E}$. (Albanese and Rubinacci, 1994.)

TEAM10 MESH_1936 time = .14E+00

TEAM10 MESH_9765 time = .14E+00

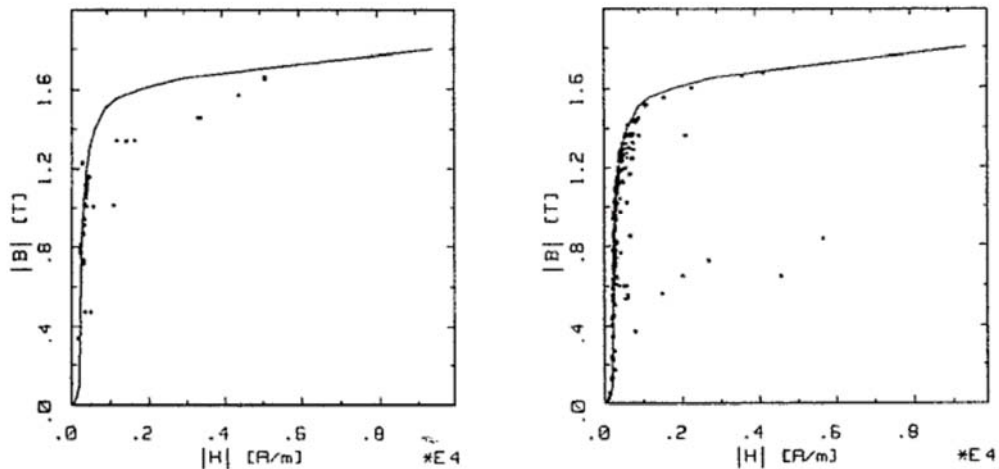


FIGURE 29. TEAM workshop Problem 10. Results obtained in the iron by the differential formulation with coarse and fine meshes at the time $t = 140$ ms. $B-H$ plots (pairs at the element centroids) with $B = |\nabla \times \mathbf{A}|$ and $H = |\mathbf{T} - \nabla\Omega + \mathbf{T}_s|$. (Albanese and Rubinacci, 1994.)

5) Principali caratteristiche delle formulazioni basate sull'errore costitutivo

- Formulazione semplice, adeguata a trattare una vasta classe di problemi nel campo dell'ingegneria e delle scienze applicate (incluso problemi accoppiati) caratterizzati da una coppia di equazioni di campo (usualmente lineari) e da equazioni costitutive (lineari o non lineari).
- Estensione immediata ai problemi dinamici di tipo periodico o transitorio
- Non è necessaria una formulazione debole
- Trattamento automatico delle discontinuità materiali.
- Disponibilità immediata di una stima (qualitativa) dell'errore e di un criterio per il raffinamento della mesh.
- Possibilità di definire maggioranti e minoranti per le quantità globali e locali
- Numero delle incognite raddoppiato