

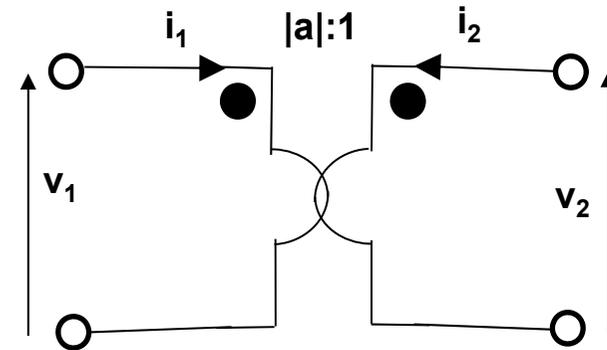
TRASFORMATORE IDEALE

La relazione caratteristica è:

$$\frac{v_1}{v_2} = a \Rightarrow v_1 = av_2$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{1}{a} \Rightarrow i_1 = -\frac{i_2}{a}$$

$$P_{ass}(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = av_2 \left(-\frac{1}{a} i_2 \right) + v_2 i_2 = 0$$

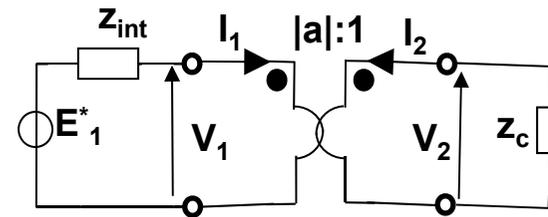


Il lato alimentato del trasformatore ideale prende il nome di circuito primario; l'altro lato costituisce il circuito secondario. Il trasformatore ideale è un componente trasparente rispetto alla potenza.

Nel caso di rete in regime sinusoidale, utilizzando il metodo simbolico si ottiene:

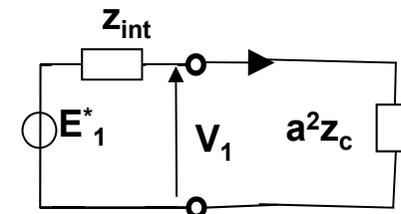
$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \quad \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -\frac{1}{a}$$

$$\dot{N} = \bar{V}_1 \bar{I}_1 + \bar{V}_2 \bar{I}_2 = 0$$

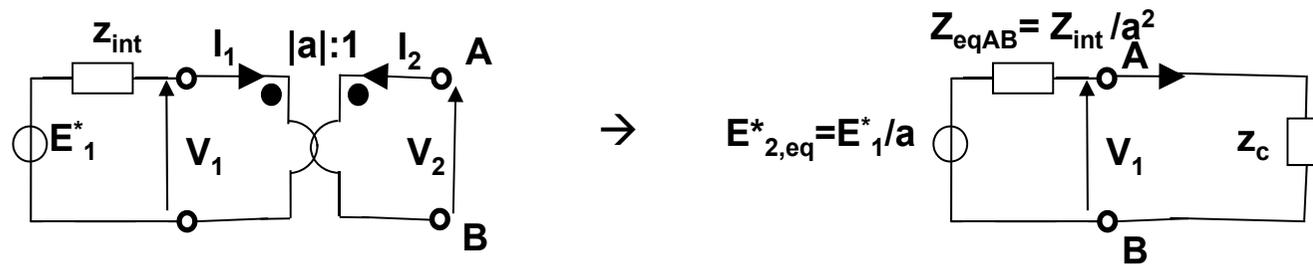


L'introduzione di un trasformatore ideale tra il lato alimentato e il carico consente di variare il valore dell'impedenza di carico visto dai morsetti del circuito primario

$$\dot{z}'_{c,1} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{a\bar{V}_2}{-\frac{\bar{I}_2}{a}} = -a^2 \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = a^2 \dot{z}_c$$



In maniera analoga è possibile riportare il circuito primario al secondario attraverso l'applicazione del teorema di Thevenin:



$$E_{2eq} = \frac{E_1^*}{a}$$

$$\dot{z}_{eqAB} = \frac{\overline{V_2}}{I_2} = \frac{\overline{V_1}}{a} \frac{1}{(-a)I_1} = -\frac{1}{a^2} \frac{\overline{V_1}}{I_1} = \frac{\dot{z}_{int}}{a^2}$$

Si noti che nel passaggio dal primario al secondario un rapporto di trasformazione pari ad “a” del trasformatore ideale comporta un aumento della corrente di un fattore pari ad “a” ed una contestuale ed identica riduzione del valore della tensione rilevata ai morsetti.

MAGNETOSTATICA

Si riscontra sperimentalmente la presenza di forze agenti su una carica di prova in movimento, q_p , collocata all'interno di una regione nella quale sono assenti distribuzioni di carica elettrica libera ma presenti distribuzioni di corrente elettrica. In maniera similare, si riscontrerà che della limatura di ferro, collocata su un piano e posta in una regione soggetta all'azione di correnti elettriche o di particolari oggetti che vengono genericamente denominati "magneti permanenti", tratterà delle figure di forma caratteristica ("spettro magnetico" o effetto Zeeman).

Le forze che danno origine a tali fenomeni non possono essere evidentemente di natura Coulombiana e vengono spiegate riconoscendo l'esistenza di un nuovo campo vettoriale, detto "magnetico" e identificato attraverso il simbolo \mathbf{H} , associato alle sorgenti precedentemente individuate (correnti e magneti permanenti). Le linee del campo magnetico \mathbf{H} prodotte da una particolare sorgente coincidono con lo spettro magnetico.

La forza complessiva, denominata "Lorentziana", che agisce su una carica elettrica di prova q che si muove con velocità \mathbf{v} in una regione in cui coesistono campi elettrici e magnetici è pari a

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H})$$

La costante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m] è detta permeabilità magnetica nel vuoto

(n.b. si ricorda che H sta per Henry e rappresenta nel SI l'unità di misura dell'induttanza).

Nello spazio libero il campo magnetico, come il campo elettrico, è un campo lineare e, per esso, vale il Principio di Sovrapposizione degli Effetti (PSE). Il contributo nel punto \mathbf{x} al campo magnetico, $d\mathbf{H}(\mathbf{x})$, generato da una corrente I che circola in un tratto infinitesimo $d\mathbf{l}$ di conduttore, centrato nel punto \mathbf{x}' , è dato dalla cosiddetta legge dell'azione elementare :

$$d\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

La legge dell'azione elementare può essere utilizzata anche per determinare il contributo portato al campo magnetico $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ da una densità volumica di corrente \mathbf{J} che interessa il dominio spaziale Ω' :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \iiint_{\Omega'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{4\pi(x - x')^3} dx'$$

Per un circuito filiforme generico γ' attraversato dalla corrente I , risulta:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\gamma'} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{(x - x')^3}$$

In analogia a quanto fatto in elettrostatica, è possibile definire il momento di dipolo magnetico. Se la distribuzione di corrente si riduce ad una spira filiforme piana γ' , di area S e versore normale \mathbf{n} , percorsa da corrente I , il momento di dipolo magnetico può essere espresso come:

$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$. Se il dipolo magnetico è collocato nell'origine del sistema di riferimento, il campo magnetico $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, al di fuori della regione occupata dalle correnti è pari a :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{m}}{x} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{x}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})}{x^5} - \frac{\mathbf{m}}{x^3} \right)$$

Il legame tra il campo magnetico e le correnti di conduzione può essere espresso in modo compatto attraverso la legge di Ampere nelle sue versioni differenziale ed integrale :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, dl = \iint_{\Sigma_{\gamma}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS \qquad \text{LEGGE DI AMPERE}$$

dove γ è una generica curva chiusa, Σ_{γ} una generica superficie orlata dalla curva γ mentre \mathbf{t} ed \mathbf{n} sono rispettivamente i versori tangenti e normali a γ e Σ_{γ} .

In analogia a quanto fatto per il problema elettrostatico è possibile introdurre in magnetostatica un secondo campo vettoriale il cui impiego si rivela particolarmente utile allorché il dominio di interesse non sia costituito interamente dallo spazio vuoto. Tale campo prende il nome di **campo di induzione magnetica, \mathbf{B}** .

Il legame tra il campo magnetico e il campo di induzione magnetica in un certo punto spaziale dipende generalmente solo dal materiale che occupa quel particolare punto spaziale e prende il nome di relazione costitutiva magnetica. Nei casi più semplici (materiali diamagnetici e paramagnetici) tale legame è lineare ed assume la forma:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$$

dove μ è la permeabilità magnetica assoluta e μ_r è detta permeabilità magnetica relativa. Per questi materiali μ_r differisce generalmente poco dal valore unitario.

Esiste tuttavia un'altra classe di materiali molto importanti dal punto di vista delle applicazioni, i materiali ferromagnetici, per i quali il legame tra $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ed $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ assume carattere non-lineare, varia istante per istante e, addirittura, dipende dai valori assunti da \mathbf{H} nel punto spaziale di interesse in tutti gli istanti precedenti (isteresi):

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_B(t, \mathbf{H}(\mathbf{x}, \cdot))$$

La principale motivazione alla base dell'introduzione del campo di induzione magnetica è la sua importante proprietà di mantenersi solenoidale anche in presenza di disomogeneità o non-linearità delle proprietà materiali del dominio.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow \oiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

Occorre sottolineare le seguenti importanti differenze rispetto al problema elettrostatico:

- Ad oggi, non è stata dimostrata l'esistenza del monopolo magnetico (cioè della carica magnetica isolata). Pertanto la sorgente magnetica più semplice è il dipolo magnetico.
- Il campo elettrostatico è irrotazionale e conservativo mentre, in presenza di correnti libere nel dominio, il campo \mathbf{H} non lo è. Questo implica che, generalmente, non è possibile derivare \mathbf{H} da un potenziale scalare.
- Il campo di induzione magnetica \mathbf{B} è, come detto, solenoidale e questo implica che il flusso magnetico attraverso una superficie aperta Σ_γ orlata dalla curva chiusa γ

$$\Phi = \iint_{\Sigma_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

FLUSSO MAGNETICO

dipende in realtà esclusivamente dalla sola curva chiusa γ e non dalla particolare Σ_γ selezionata tra le infinite superfici che ammettono γ come orlo.

Il campo magnetico medio in una piccola regione dello spazio può essere definito in modo operativo attraverso uno strumento (magnetometro) basato sulla cosiddetta legge di Lenz: in un circuito elettrico concatenato da campi magnetici variabili nel tempo vengono indotte forze elettromotrici di natura non conservativa:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \rightarrow \iint_{\Sigma} \Delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \Delta\Phi = -\int_{t_0}^{t_1} e \cdot dt$$

Ruotando di 180° lo strumento

$$|\langle B_n \rangle| = \frac{\langle \Delta B_n \rangle}{2} = -\frac{1}{2\Sigma} \int_{t_0}^{t_1} e \cdot dt$$

Magnetostatica in presenza di mezzi materiali

Se nel dominio sono presenti mezzi materiali, le correnti elementari degli elettroni contribuiscono al campo magnetico macroscopico. Per capire il meccanismo fisico, si può partire dal modello di Bohr dell'atomo di idrogeno ed assimilare l'elettrone che ruota attorno al protone, mantenendosi ad una distanza media r , ad una corrente elementare di intensità $i=e/T$, dove e è la carica elementare e T il periodo dell'orbita.

Il momento magnetico dell'elettrone è allora $m=i*S=(e/T)*\pi*r^2=e*\omega*r^2/2$

Consideriamo il punto P, centro di un volume elementare $\Delta\tau$, in un generico mezzo magnetizzato. Detto $\Delta\mathbf{m}$ il momento magnetico della materia contenuta in $\Delta\tau$, N il numero di atomi per unità di volume e $\langle\mathbf{m}\rangle$ il valore medio del momento magnetico atomico, definiamo Intensità di magnetizzazione il vettore

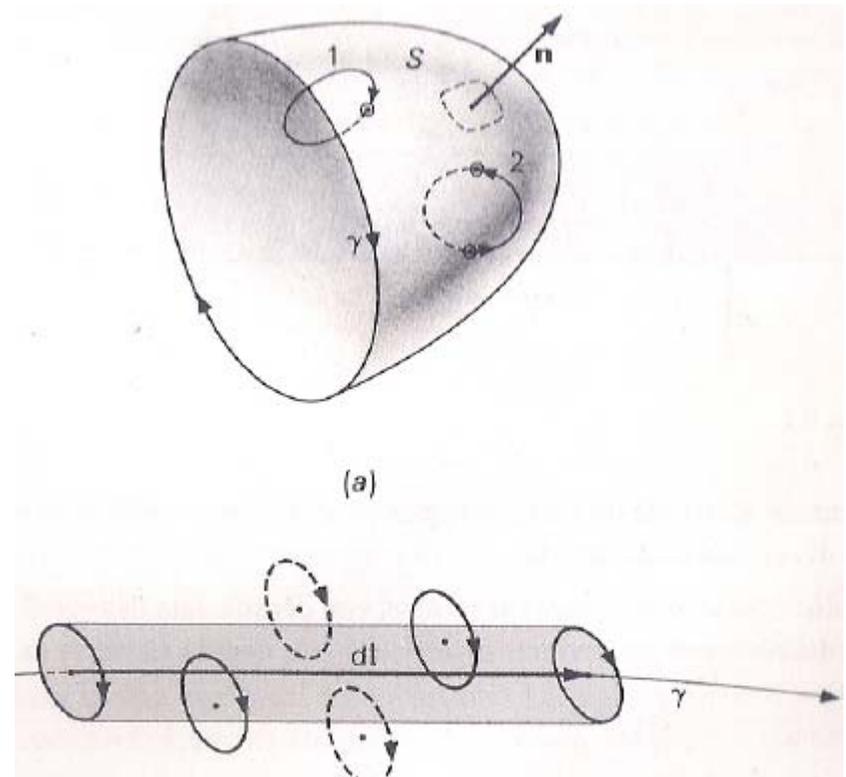
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta\tau} = N \langle \mathbf{m} \rangle$$

Definiamo ora il vettore densità di corrente di magnetizzazione \mathbf{J}_{magn} nel mezzo.

Con riferimento alla fig.(a), si consideri una superficie infinitesima ΔS di normale \mathbf{n} , passante per il punto P. La componente normale alla superficie S di \mathbf{J}_{magn} è data da:

$$J_{\text{magn},n} = \mathbf{J}_{\text{magn}} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{I_{\text{mol}}}{\Delta S}$$

dove I_{mol} è la corrente molecolare attraversante la superficie ΔS **pari alla somma algebrica di tutte le correnti microscopiche che tagliano la superficie.**



Per calcolare la corrente totale attraverso S si assumano tutte le spire di uguale area A . La normale alla superficie di area A costituisce la direzione del momento magnetico, \mathbf{m} . Un elemento elementare $d\mathbf{l}$ della linea chiusa γ che orla la superficie S attraversa quindi tutte le spire il cui centro è contenuto nel volume cilindrico descritto muovendo rigidamente una spira centrata in $d\mathbf{l}$ lungo la curva chiusa γ (vedi fig. b). Tale volume vale:

$$dV = A \frac{\mathbf{m}}{m} \cdot d\mathbf{l}$$

Se N è il numero di spire per unità di volume e i la corrente di una singola spira, la corrente, dI , delle spire attraversate da $d\mathbf{l}$ vale:

$$dI = NiA \frac{\mathbf{m}}{m} \cdot d\mathbf{l} = N\mathbf{m} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

Pertanto scrivendo l'espressione della corrente totale associata ad S ed utilizzando il teorema di Stokes si ottiene:

$$\iint_S \mathbf{J}_{magn} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} dS$$

Da cui si ottiene:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_{magn}$$

In presenza di materia, le correnti di magnetizzazione si aggiungono alle correnti libere quali sorgenti per il campo d'induzione magnetica

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{lib} + \mu_0 \mathbf{J}_{mag} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{lib} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_{lib}$$

Confrontando l'ultima espressione con la legge di Ampere, si ricava che

$$\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Nei materiali lineari il vettore di magnetizzazione risulta proporzionale al campo magnetico:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \text{ dove } \chi_m \text{ è detta "susceptività magnetica".}$$

Sostituendo nella relazione precedente e ponendo $\mu_r = (1 + \chi_m)$ si ottiene il legame costitutivo tra \mathbf{B} e \mathbf{H} in termini di permeabilità magnetica assoluta, μ , e permeabilità magnetica relativa, μ_r :

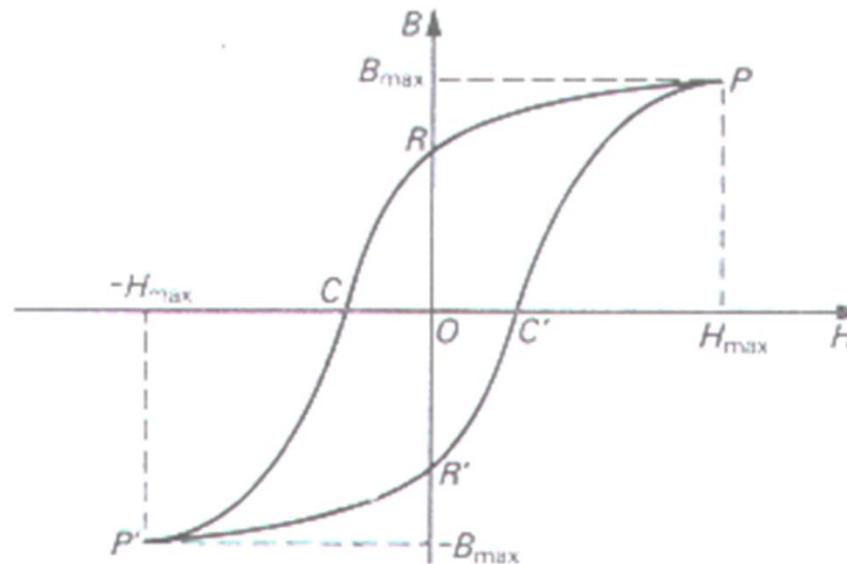
$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H} (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

Riepilogo dei valori della permeabilità relativa nei mezzi materiali

MATERIALI **DIAMAGNETICI** se $\mu_r < 1$

MATERIALI **PARAMAGNETICI** se $\mu_r > 1$

MATERIALI **FERROMAGNETICI** se $\mu_r \gg 1$ → CURVA DI MAGNETIZZAZIONE

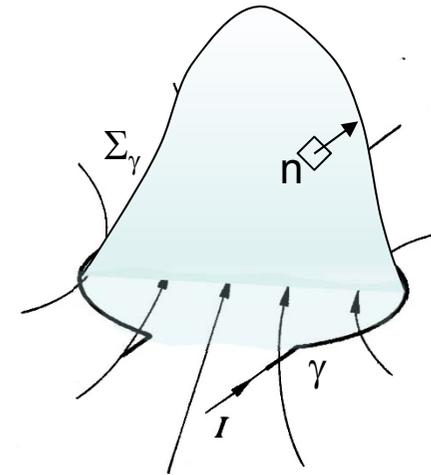


Quando $H=0 \rightarrow B \neq 0 \rightarrow$ punto di magnetizzazione residua

Quando $B=0 \rightarrow H$ è negativo \rightarrow punto coercitivo

COEFFICIENTE DI AUTOINDUTTANZA DI UN AVVOLGIMENTO

Consideriamo prima il caso di un avvolgimento costituito da una sola spira percorsa da corrente i che produce nello spazio dei campi magnetici:



Il flusso del campo magnetico prodotto dalla spira e concatenato con lo stesso avvolgimento vale:

$$\Phi_\gamma = \iint_{\Sigma_\gamma} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \quad [\text{Weber}]$$

Il coefficiente di auto-induttanza si ottiene come rapporto tra il flusso auto-concatenato e la corrente che lo produce:

$$L = \frac{\Phi_\gamma}{i} \quad [\text{Henry}]$$

Per un avvolgimento di N spire con $N \gg 1$, il valore del coefficiente di auto-induzione aumenta con legge proporzionale ad N , e il componente prende il nome di induttore. $L = \frac{N \langle \Phi_\gamma \rangle}{i}$

Alle basse frequenze, un induttore reale ha un comportamento molto vicino a quello dell'induttore ideale.

Se l'induttore è realizzato attraverso un conduttore massiccio (cioè di sezione elevata), al crescere della frequenza del segnale elettrico la densità di corrente, anziché distribuirsi in maniera uniforme, risulta più elevata nella regione periferica ed inferiore in quella centrale. Tale fenomeno, noto come EFFETTO PELLE, oltre che dalla frequenza dipende anche dalla conducibilità e della permeabilità magnetica del conduttore utilizzato per realizzare l'avvolgimento.

Consideriamo le due bobine illustrate in figura:

Si assuma che la corrente nella bobina 1 sia nulla mentre nella bobina 2 circoli la corrente i_2 . Una parte differente del campo di induzione magnetica generato da i_1 si concatenerà con ciascuna delle N spire della prima bobina. Il percorso di ciascuna spira è identificato dalla sotto-curva $\gamma_{1,j}$ e l'unione delle N sotto-curve costituisce il percorso totale γ_1 della prima bobina.

Si associ ad ogni sotto-curva $\gamma_{1,j}$ una superficie $\Sigma_{\gamma_{1,j}}$ che ammetta come orlo la stessa $\gamma_{1,j}$ e si calcolino i flussi magnetici concatenati con tutte le $\Sigma_{\gamma_{1,j}}$. Assumeremo quale flusso concatenato con l'avvolgimento 1 e prodotto dalla corrente i_2 la somma dei flussi concatenati con le singole spire del primo avvolgimento:

$$\Phi_{12,TOT} = \sum_{j=1, N_1} \iint_{\Sigma_{\gamma_{1,j}}} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_{\gamma_{1,j}} d\Sigma$$

Flusso prodotto della corrente i_2 e concatenato con la superficie Σ_{γ_1}

Si definisce **COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE**: $M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$

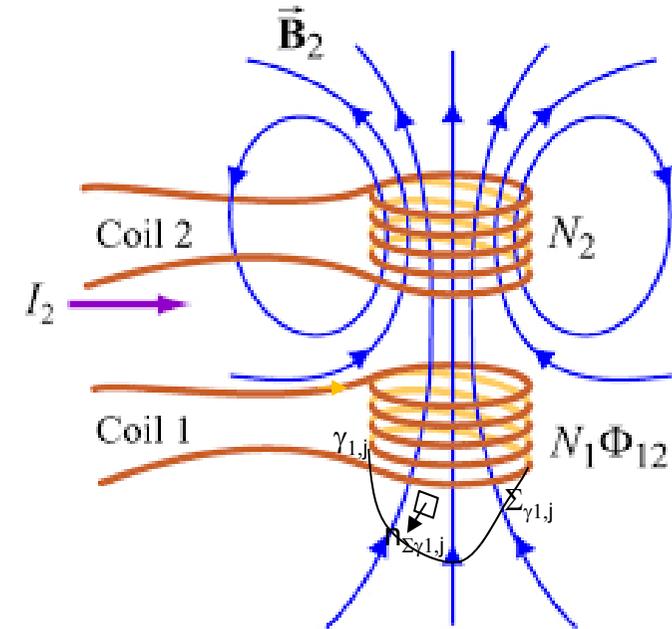
Nel caso di avvolgimenti N spire, può essere conveniente introdurre il cosiddetto flusso medio per spira: $\langle \phi_{12} \rangle$

$$\langle \phi_{12} \rangle = \frac{\Phi_{12,TOT}}{N_1} \rightarrow M_{12} = \frac{\langle \phi_{12} \rangle}{I_2} N_1$$

In maniera analoga, nel caso in cui la bobina 2 sia lasciata aperta e nella prima bobina circoli la corrente i_1 risulta:

$$\Phi_{21,TOT} = \sum_{j=1, N_1} \iint_{\Sigma_{\gamma_{2,j}}} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\gamma_{2,j}} d\Sigma; \quad M_{21} = \frac{\langle \phi_{21} \rangle}{I_1} N_2$$

Si può dimostrare che risulta sempre $M_{12} = M_{21}$



I coefficienti di auto-induzione dei due avvolgimenti sono sempre positivi e valgono:

$$L_1 = \frac{\langle \Phi_{11} \rangle}{I_1} N_1 \quad L_2 = \frac{\langle \Phi_{22} \rangle}{I_2} N_2$$

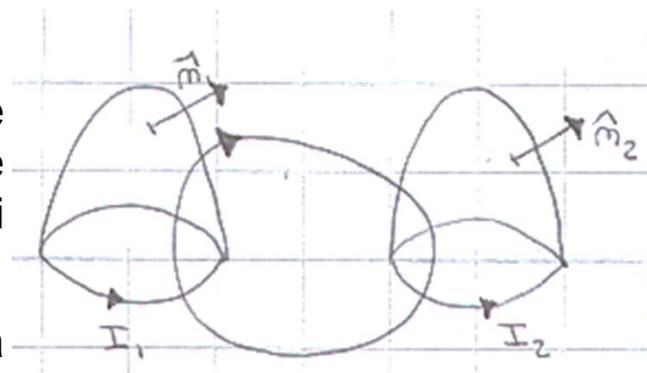
Nel caso in cui I_1 e I_2 siano entrambe diverse da zero, il flusso magnetico totale concatenato

con i due avvolgimenti risulta pari a:

$$\Phi_{T1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

$$\Phi_{T2} = M_{21} I_1 + L_2 I_2$$

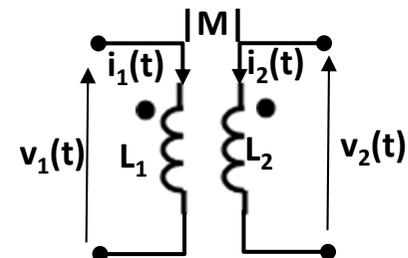
Si noti che il segno del coefficiente di mutua induzione dipende dagli orientamenti assunti per le correnti I_1 e I_2 (che sono associati attraverso la regola della mano destra ai versi delle normali alle superfici utilizzate per il calcolo dei flussi).



Ad esempio, adottando le convenzioni riportate nella figura a lato, i coefficienti di mutua risultano negativi.

Nella rappresentazione circuitale degli induttori accoppiati per determinare il segno del coefficiente di mutua si fa uso di due puntini collocati vicino ai terminali dei due induttori e dei riferimenti assunti per le correnti. Se entrambe le correnti puntano verso i puntini (o entrambe nella direzione opposta) la mutua è positiva; nel caso in cui una delle correnti punti verso il terminale dove è collocato il puntino e l'altra in direzione opposta, la mutua è negativa.

Nel caso riportato in figura risulta $M > 0$.



Per due induttori accoppiati magneticamente deve essere sempre soddisfatta la relazione $L_1 L_2 \geq M^2$

In mancanza, si perverrebbe al risultato assurdo dell'esistenza di coppie di correnti alle quali sarebbe associato un immagazzinamento negativo di energia magnetica : $W_m < 0$.

Nel caso di accoppiamento perfetto risulta $L_1 L_2 = M^2 \Rightarrow \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a$

Il termine costante a è chiamato rapporto di trasformazione

Attraverso il rapporto di trasformazione ed una rielaborazione delle relazioni (2) è possibile pervenire alla relazione caratteristica del trasformatore ideale.

I passaggi principali vengono riportati a lato.

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1 \left(\bar{I}_1 + \frac{M}{L_1} \bar{I}_2 \right) = j\omega L_1 \left(\bar{I}_1 + \frac{1}{a} \bar{I}_2 \right)$$

$$\bar{V}_2 = j\omega M \left(\bar{I}_1 + \frac{L_2}{M} \bar{I}_2 \right) = j\omega M \left(\bar{I}_1 + \frac{1}{a} \bar{I}_2 \right)$$

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{L_1}{M} = a$$

Dalla prima delle due relazioni:

$$\frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} = \bar{I}_1 + \frac{1}{a} \bar{I}_2 \quad (3)$$

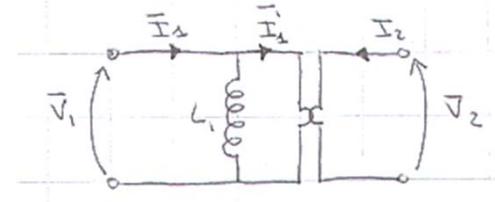
tiene conto del differente numero di spire tra i due avvolgimenti

Ricordando che in un trasformatore ideale le correnti devono soddisfare alla relazione

$$\frac{\bar{I}'_1}{I_2} = -\frac{1}{a} \rightarrow \bar{I}'_1 + \frac{\bar{I}_2}{a} = 0$$

si deduce che la sola condizione di accoppiamento perfetto non garantisce l'equivalenza tra un trasformatore ideale e due induttori accoppiati magneticamente: nella relazione (3), infatti, la corrente al primo membro (detta corrente di magnetizzazione) risulta nulla solo per $L_1 \rightarrow \infty$

Nel caso in cui L_1 sia limitato, il circuito equivalente di due induttori con accoppiamento magnetico perfetto è costituito da un trasformatore ideale di rapporto di trasformazione pari ad a con un induttore (detto di magnetizzazione e di induttanza è pari ad L_1) aggiunto in parallelo alla prima porta.



Si determina, ora, il circuito equivalente a due induttori accoppiati magneticamente nel caso di accoppiamento non perfetto: $L_1 L_2 > M^2$

Le induttanze L_1 e L_2 possono essere scomposte nelle due coppie di induttanze L'_j e L_{jd} , $j=1,2$ in modo che le L'_j soddisfino alla condizione di accoppiamento perfetto. Le induttanze L_{jd} prendono il nome di induttanze di dispersione.

$$L_1 = L'_1 + L''_1 = L'_1 + L_{1d}$$

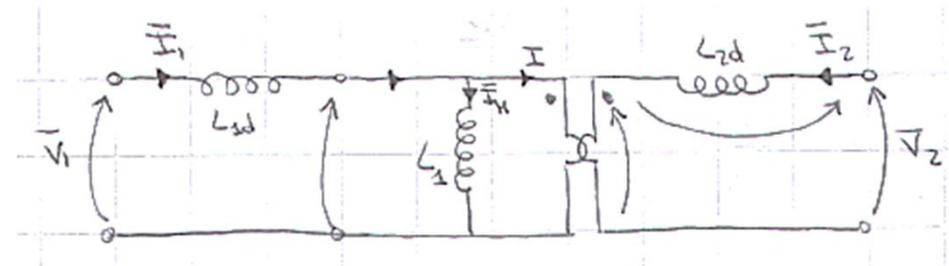
$$L_2 = L'_2 + L''_2 = L'_2 + L_{2d}$$

$$L'_1 L'_2 = M^2$$

Sostituendo le L'_j e L_{jd} nelle (2) si perviene alle seguenti relazioni e al conseguente circuito equivalente associato:

$$\bar{V}_1 = j\omega L'_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 + j\omega L_{1d} \bar{I}_1$$

$$\bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L'_2 \bar{I}_2 + j\omega L_{2d} \bar{I}_2$$



Per giustificare il nome assegnato alle L_{jd} calcoliamo i flussi medi per spira al primario ($\phi_{11}=L_1 I_1/N_1$; $\phi_{21}=M I_1/N_1$) e al secondario ($\phi_{22}=L_2 I_2/N_2$; $\phi_{12}=M I_2/N_2$) ed introduciamo i flussi di dispersione medi per spira al primario e al secondario, ϕ_{1d} e ϕ_{2d} , ed i coefficienti di dispersione al primario e al secondario, σ_{1d} e σ_{2d} .

$$\phi_{1d} = \phi_{11} - \phi_{21};$$

$$\phi_{2d} = \phi_{22} - \phi_{12};$$

$$\sigma_{1d} = \frac{\phi_{1d}}{\phi_{11}} = \frac{\phi_{11} - \phi_{21}}{\phi_{11}} = 1 - \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}}$$

$$\sigma_{2d} = \frac{\phi_{2d}}{\phi_{22}} = \frac{\phi_{22} - \phi_{12}}{\phi_{22}} = 1 - \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}}$$

Utilizzando questi parametri si ottiene:

$$L_1 = \frac{N_1 \langle \phi_{11} \rangle}{I_1} \quad L_2 = \frac{N_2 \langle \phi_{22} \rangle}{I_2} \quad M_{12} = \frac{N_1 \langle \phi_{12} \rangle}{I_2} \quad M_{21} = \frac{N_2 \langle \phi_{21} \rangle}{I_1}$$

$$\sigma_{1d} = 1 - \frac{M_{21} I_1}{N_2 L_1 I_1} \frac{N_1}{N_1} \Rightarrow 1 - \sigma_{1d} = \frac{M_{21}}{L_1} \frac{N_1}{N_2}$$

$$\sigma_{2d} = 1 - \frac{M_{12} I_2}{N_1 L_2 I_2} \frac{N_2}{N_2} \Rightarrow 1 - \sigma_{2d} = \frac{M_{12}}{L_2} \frac{N_2}{N_1}$$

$$(1 - \sigma_{1d})(1 - \sigma_{2d}) = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \textcircled{1}$$

se c'è
accoppiamento
perfetto

Il titolo di induttanze di dispersione attribuito alle L_{jd} è pienamente giustificato dal fatto che sono ottenute moltiplicando le induttanze originarie per i coefficienti di dispersione

$$\begin{cases} L_{1d} = \sigma_{1d} L_1 \\ L_{2d} = \sigma_{2d} L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L'_1 = (1 - \sigma_{1d}) L_1 \\ L'_2 = (1 - \sigma_{2d}) L_2 \end{cases}$$

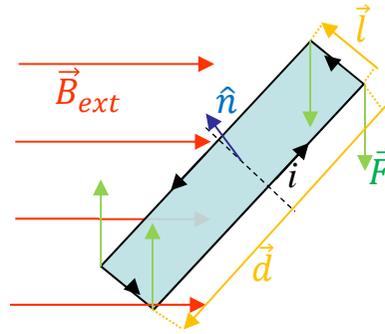
Un ulteriore vantaggio di questa scelta è che nel caso in cui gli induttori accoppiati siano due avvolgimenti di N_1 e N_2 spire il rapporto di trasformazione del trasformatore ideale presente nel circuito equivalente coincide col rapporto del numero di spire dei due avvolgimenti

$$L'_1 = M_{21} \frac{N_1}{N_2} \quad L'_2 = M_{12} \frac{N_2}{N_1}$$

$$a = \frac{L'_1}{M} = \frac{M}{L'_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

FORZE ELETTRO-MECCANICHE

Una spira γ percorsa da corrente i ed immersa in un campo magnetico esterno \mathbf{B}_{ext} è sede di forze elettrodinamiche che possono essere determinate attraverso l'espressione $\mathbf{F} = i \oint_{\gamma} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_{ext}$



Nel caso di spira rettangolare rigida che presenti due lati ortogonali rispetto al campo \mathbf{B}_{ext} , la coppia motrice che mette in rotazione la spira vale

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{F} \times \mathbf{d} = (i\mathbf{l} \times \mathbf{B}_{ext}) \times \mathbf{d} = \mathbf{B}_{ext} (i\mathbf{l} \cdot \mathbf{d}) - i\mathbf{l} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{B}_{ext}) = -i\mathbf{l} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{B}_{ext}) = (i\mathbf{l} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{B}_{ext} = iS\mathbf{n} \times \mathbf{B}_{ext}$$

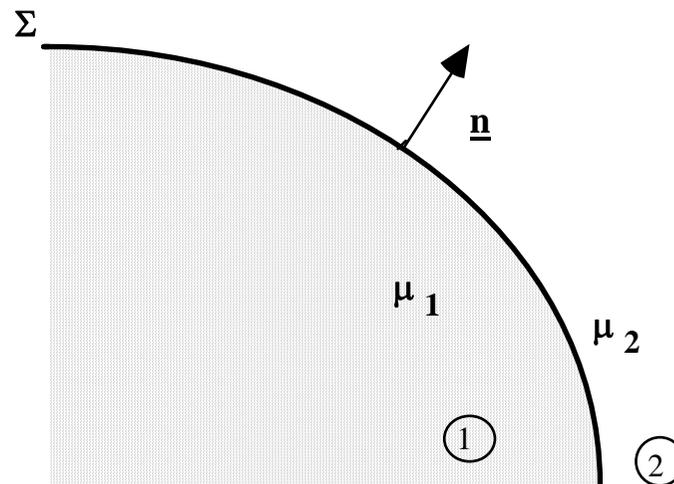
La coppia motrice si annulla quando la normale, \mathbf{n} , alla superficie S della spira e il campo \mathbf{B} diventano paralleli.

Comportamento del campo magnetico sulla superficie di separazione fra un mezzo a permeabilità molto elevata e l'aria

Nei sistemi fisici comprendenti materiali ferromagnetici lineari omogenei e isotropi, per i quali cioè si possa ritenere che fra i vettori \mathbf{B} e \mathbf{H} intercorra una relazione del tipo $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, risulta spesso utile far ricorso ad una approssimazione che consente di semplificare notevolmente l'analisi

Sia S la superficie di separazione fra un materiale (1) caratterizzato da una permeabilità μ_1 ed un mezzo (2) di permeabilità μ_2 come schematicamente rappresentato in fig.1. Supponiamo che le due permeabilità siano legate da una relazione del tipo $\mu_1 \gg \mu_2$, come avviene, ad esempio, quando il materiale 1 è costituito da un materiale ferromagnetico e il mezzo 2 è l'aria ($\mu_2 = \mu_0$).

L'ipotesi $\mu_1/\mu_2 \rightarrow \infty$ non corrisponde ad una situazione fisicamente realizzabile ma rappresenta una prima approssimazione per lo studio di alcuni problemi di notevole interesse applicativo nei quali sono presenti materiali ferromagnetici. Si evidenzierà come l'adozione di tale ipotesi consentirà di calcolare separatamente i campi incogniti all'interno e all'esterno del materiale ferromagnetico.



Per studiare il comportamento del campo nel passaggio dal mezzo 1 al mezzo 2, cominciamo ad esaminare le due configurazioni di principio rappresentate in fig. 2a e 2b: in esse, «O» è la traccia di un conduttore filiforme rettilineo perpendicolare al piano del foglio, percorso da una corrente i . Nel caso (a), il mezzo a permeabilità infinita (che nel seguito per brevità sarà denominato "ferro") è costituito da una struttura toroidale interrotta in corrispondenza di un traferro di spessore d ; nella figura (b), invece, è rappresentato un toro di materiale ferromagnetico che avvolge senza interruzioni il conduttore percorso dalla corrente i .

Prima di affrontare il caso specifico del contatto aria-ferro, si ricorda preliminarmente che in corrispondenza della superficie di separazione S fra due mezzi generici di diversa permeabilità, si stabiliscono fra le componenti dei campi \mathbf{H} e \mathbf{B} le

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] = B_{n2} - B_{n1} = 0 \quad (1)$$

seguenti relazioni a carattere generale :

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{K} \quad (2)$$

Si suppone, inoltre, che in questo caso sulla superficie di separazione non sia localizzata alcuna corrente superficiale libera, ovvero $\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

Le relazioni (1) e (2) possono essere riscritte nella forma seguente:

$$\mu_1 H_{n1} - \mu_2 H_{n2} = 0 \quad (3)$$

$$(\mathbf{B}_{t1} / \mu_1) - (\mathbf{B}_{t2} / \mu_2) = 0 \quad (4)$$

Per studiare le due situazioni sopra schematizzate imponiamo, inoltre, la condizione di regolarità all'infinito.

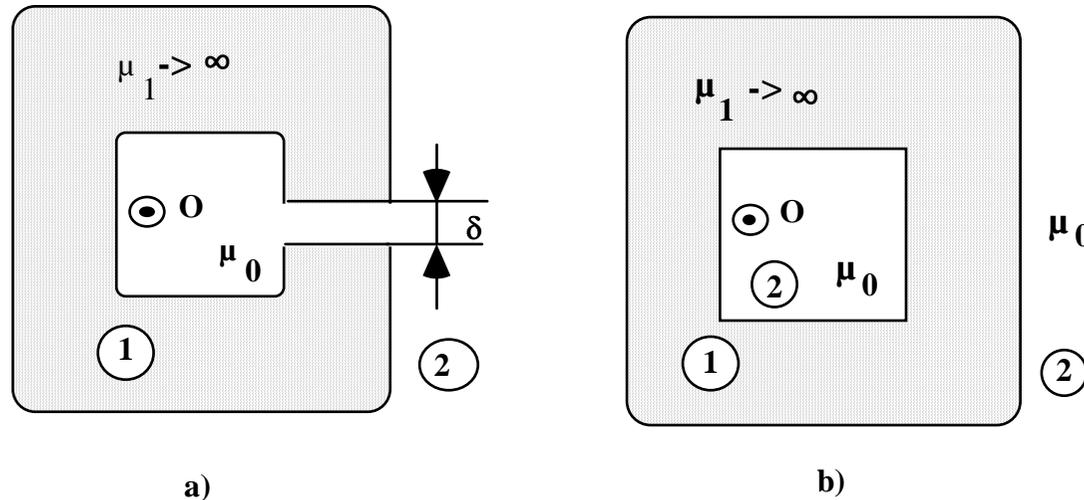


Fig.2

Caso (a)

Nell'aria il campo di induzione \mathbf{B} sarà senz'altro limitato; ne consegue che, sull'interfaccia aria-ferro, anche la componente normale di \mathbf{B} , B_{n2} , risulta limitata (e quindi anche H_{n2}); per la (1), anche la B_{n1} risulterà limitata e, data la caratteristica B-H del ferro, ne consegue che $H_{n1}=0$. In questa situazione osserviamo dunque che nel ferro il problema può essere studiato sulla base del

seguinte modello:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

D'altra parte il ferro costituisce un dominio semplicemente connesso nel quale l'ipotesi di irrotazionalità di \mathbf{H} consente di introdurre un potenziale scalare, dal quale far discendere tale campo. Avremo cioè $\mathbf{H} = -\nabla\Phi$ e all'interno del ferro il problema risulta descritto dalle equazioni:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

$$H_{n1} = \partial\Phi/\partial n|_S = 0$$

Si tratta dunque di risolvere un problema di Neumann la cui soluzione risulta peraltro banale. Infatti, su S risulta $\Phi = \text{cost}$, il che implica $\Phi = \text{costante}$ all'interno e, di conseguenza, $\mathbf{H} = \text{grad } \Phi = 0$ nel ferro. L'ipotesi $\mu \rightarrow \infty$ dà, dunque, origine ad un problema che risulta formalmente simile a quello relativo alla determinazione del campo elettrico \mathbf{E} all'interno di un conduttore perfetto ($\sigma \rightarrow \infty$).

La soluzione di questo problema consente inoltre di affrontare anche il problema esterno.

Infatti, per la (2), $H_{t1} = H_{t2} = 0$ e poiché $\mathbf{B}_{t2} = \mu_0 \mathbf{H}_{t2}$ anche la componente tangente di \mathbf{B} nell'aria risulterà nulla. Ciò implica che il campo \mathbf{B} emerge da S nell'aria diretto ortogonalmente. In aria, le

equazioni governanti assumono l'aspetto: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ con la condizione al contorno $\mathbf{B}_{t2} = 0$.
 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{lib}}$

Resta a questo punto da determinare l'andamento di \mathbf{B} all'interno del ferro. Tale problema può essere affrontato sulla base della conoscenza di \mathbf{B} ottenuto dalla soluzione del problema esterno:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0$$

Questa volta sul contorno si dovrà imporre la condizione $B_{n1} = G(P)$, con $G(P)$ funzione del punto, ottenuta attraverso la soluzione del precedente problema esterno.

La \mathbf{B}_{t1} risulterà indeterminata (e in ogni caso limitata o nulla) dovendo essere nulla la \mathbf{H}_{t1} .

Una tabella riassuntiva servirà a chiarire gli andamenti delle componenti tangenziali e normali di \mathbf{H} e \mathbf{B} alla frontiera di separazione per la configurazione in esame (Tabella I).

Un andamento qualitativo delle linee di \mathbf{B} all'interfaccia è quello rappresentato in fig. 3.

| | Ferro (1) | Aria (2) |
|-------|-----------|----------|
| H_t | 0 | 0 |
| H_n | 0 | limitata |
| B_t | limitata | 0 |
| B_n | limitata | limitata |

Tabella I

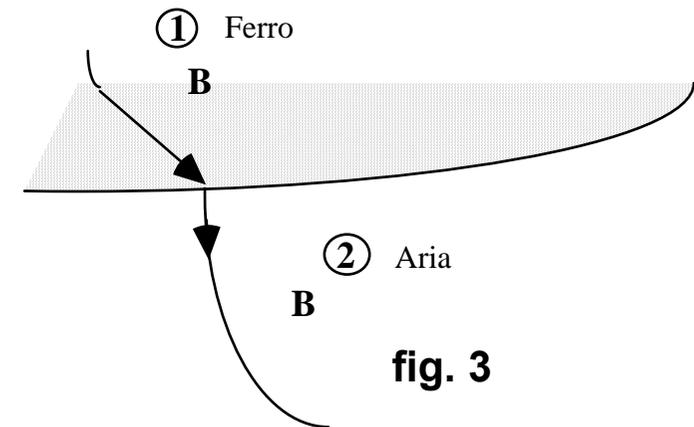


fig. 3

Caso b)

Osserviamo che in questa configurazione, per la mancanza di connessione semplice del dominio, non è possibile introdurre un potenziale scalare totale per la determinazione del campo magnetico, che semplificherebbe considerevolmente l'analisi del problema. Notiamo, peraltro, che in applicazioni di notevole rilievo, come ad esempio nel caso del trasformatore, il dominio toroidale concatena una corrente nulla. Ciò consente di ritornare ad una situazione simile a quella descritta nel caso a). Una valutazione delle componenti dei campi \mathbf{B} ed \mathbf{H} può peraltro essere ottenuta sulla base delle seguenti considerazioni.

La componente tangente di \mathbf{H} nell'aria, H_{t2} , si mantiene limitata su S , dovendo soddisfare la legge d'Ampere; si avrà, quindi che anche H_{t1} , per la (2), si manterrà limitata. Poiché $\mu_1 \rightarrow \infty$ ed H_{t1} è limitata in modulo, ne consegue che B_{t1} risulterà illimitata. La componente tangente di \mathbf{B} nell'aria, B_{t2} , risulterà, invece, limitata ($B_{t2} = \mu_0 H_{t2}$).

Essendo \mathbf{B} limitato nell'aria, si mantiene limitata la sua componente normale B_{n2} che è continua all'interfaccia ($B_{n2} = B_{n1}$): per la (3) risulta, dunque, nulla la componente normale H_{n1} nel ferro. Da queste posizioni discende, inoltre, che H_{n2} deve risultare limitata ($H_{n2} = B_{n2} / \mu_0$). Le singole componenti dei campi \mathbf{H} e \mathbf{B} possono pertanto essere valutate secondo lo schema sintetico riportato nella Tabella II.

| | Ferro (1) | Aria (2) |
|-------|------------|----------|
| H_t | limitata | limitata |
| H_n | 0 | limitata |
| B_t | illimitata | limitata |
| B_n | limitata | limitata |

Tabella II

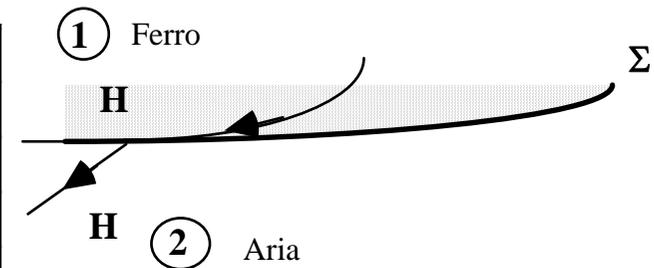


Fig. 4.

Un andamento qualitativo delle linee di H all'interfaccia è quello rappresentato in fig. 4.

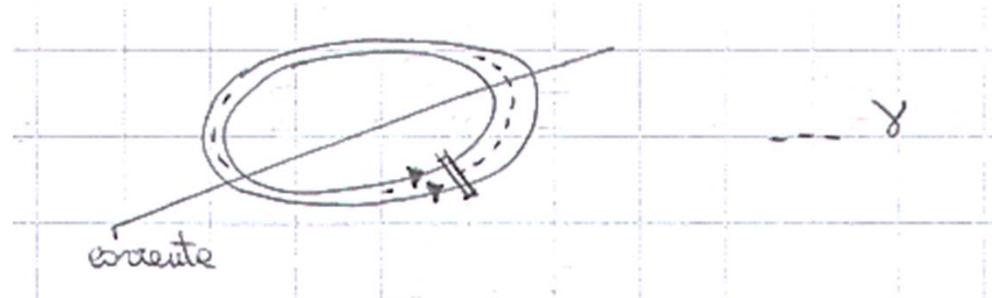
La configurazione di fig. 2a) è tipica delle applicazioni nelle quali si richiede la disponibilità di un campo di induzione magnetica elevato nella regione del traferro (è questo il caso, ad esempio, degli elettromagneti).

La configurazione in cui il ferro ha struttura toroidale (del tipo di fig. 2b) risulta, come già accennato, di notevole interesse nei casi in cui esso è concatenato con correnti uguali e opposte. In tali casi (si pensi ad esempio al caso del trasformatore), nel rispetto della legge di Ampere, il campo magnetico si mantiene nullo all'interno del ferro, a dispetto della sua configurazione completamente chiusa.

CIRCUITI MAGNETICI

Consideriamo un circuito filamentare, γ , immerso nello spazio vuoto e concatenato con un certo numero N di correnti I_J . Applicando la legge di Ampere si ottiene

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = \sum_{J=1}^N I_J$$



Se il circuito γ è realizzato con un materiale lineare omogeneo di elevata permeabilità magnetica, si può dimostrare che la componente normale di \mathbf{B} alla superficie laterale del conduttore risulta nulla in ogni punto. Utilizzando la caratteristica magnetica $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ per sostituire il campo di induzione magnetica al campo magnetico nella legge di Ampere, si ottiene:

$$\oint_{\gamma} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{t}}{\mu} dl = \oint_{\gamma} \frac{B_t(l)}{\mu} dl \rightarrow \oint_{\gamma} \frac{B_t(l)}{\mu(l)} dl = \sum_{J=1}^N I_J$$

Assumendo per semplicità che il circuito magnetico sia un cilindro di area ΔS , il flusso magnetico nella generica sezione individuata dall'ascisse curvilinea l sarà pari a $\Delta \Phi = \Delta S(l) B_t(l)$.

Se si utilizza questa espressione per eliminare il campo di induzione magnetico, la legge di Ampere diventa:

$$\oint_{\gamma} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S(l) \mu(l)} dl = \oint_{\gamma} \frac{B_t(l)}{\mu(l)} dl = \sum_{J=1}^N I_J$$

Introducendo il parametro riluttanza:

$$\mathcal{R} = \oint_{\gamma} \frac{1}{\Delta S(l) \mu(l)} dl$$

Si perviene all'equivalente della legge di Ohm per i circuiti magnetici, detta legge di Hopkinson, in cui la riluttanza \mathcal{R} , il flusso $\Delta \Phi$ e la forza magneto-motrice $\sum_{J=1}^N I_J$

prendono il posto rispettivamente della resistenza, della corrente e della F.E.M:

$$\mathcal{R} \Delta \Phi = \sum_{J=1}^N I_J$$

Si noti che per un tubo di flusso cilindrico di altezza l , di sezione S e di permeabilità assoluta μ , la riluttanza ha un'espressione analoga a quella utilizzata per il calcolo della resistenza di un cilindro resistivo di conducibilità σ e di analoga forma geometrica:

$$R = \frac{l}{S\sigma} \quad \text{Resistenza di un tratto di conduttore elettrico di forma cilindrica}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S} \quad \text{Riluttanza di un tratto di conduttore magnetico di forma cilindrica}$$

Tra circuiti magnetici e circuiti elettrici valgono numerose analogie tanto che lo studio di un circuito magnetico in regime stazionario può essere sempre ricondotto allo studio di un circuito elettrico equivalente in regime stazionario.

Nel seguito svilupperemo queste considerazioni per alcune topologie di circuiti magnetici di particolare rilevanza nelle applicazioni

La soluzione del problema generale della magnetostatica, in presenza di correnti libere e materiali ferromagnetici, risulta particolarmente complessa. Fortunatamente, in molte applicazioni di interesse applicativo, si ottengono ottime soluzioni, attraverso un'analisi simile a quella sviluppata per i circuiti elettrici in condizioni stazionarie. E' possibile, cioè, condurre lo studio facendo riferimento a parametri globali, analoghi a quelli che, nel caso del campo di corrente stazionario (tensioni, correnti, resistenze, ecc.), consentono una notevole semplificazione del modello e una valutazione più immediata delle grandezze di interesse.

I principi sui quali tale analogia si basa e le limitazioni del modello saranno illustrate nel seguito. Esaminiamo dapprima una struttura del tipo mostrato in fig. 5, nella quale si suppone che il materiale ferromagnetico sia caratterizzato da una permeabilità infinita. Il traferro di altezza d è sede di un campo magnetico \mathbf{H}_t , dovuto alla corrente i che interessa l'avvolgimento di N spire.

Inoltre, per l'ipotesi di $\mu_1 \rightarrow \infty$, il campo magnetico nel ferro risulterà nullo (ci troviamo, in altre parole, nell'ambito della configurazione a) e le linee vettoriali di \mathbf{H} avranno un andamento qualitativo del tipo riportato in figura 6. Appliciamo la legge di Ampere ad una linea γ chiusa del tipo mostrato in fig. 6.

Sulla base delle considerazioni precedentemente sviluppate si avrà:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = Ni \cong \langle H \rangle L \quad (5)$$

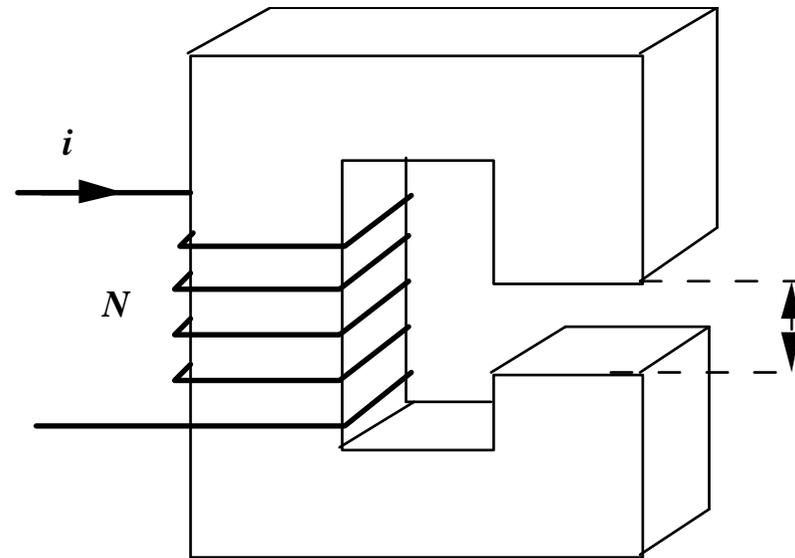


fig. 5

dove L e $\langle H_0 \rangle$ indica la lunghezza del tratto di γ che si svolge in aria e con $\langle H \rangle$ il valore medio di \mathbf{H} lungo γ . Applicando invece la stessa legge ad una linea del tipo di quella indicata con γ_1 in fig. 6 si ottiene:

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni \cong H_2 \delta \quad (6)$$

In cui si è indicato con H_2 il modulo di \mathbf{H} nel traferro. Uguagliando la (5) e la (6) si ottiene, allora:

$$H_2 \approx \langle \mathbf{H} \rangle (L / \delta)$$

Si conclude, perciò, che, se il traferro ha dimensioni trascurabili rispetto a L (e, quindi, rispetto allo sviluppo complessivo della struttura in ferro), il campo nell'aria, al di fuori del traferro, è trascurabile rispetto al valore che esso assume nel traferro. Questa considerazione induce, allora, a trattare i sistemi del tipo in esame, introducendo un'ulteriore approssimazione che consiste nel trascurare del tutto il campo al di fuori del traferro. Ci si riconduce, cioè, ad una situazione nella quale il campo è completamente incanalato nel ferro, il quale costituisce, pertanto una sorta di circuito magnetico per le linee vettoriali del campo. Si osservi, in particolare, che mentre \mathbf{H} è nullo nel ferro, \mathbf{B} si mantiene ivi limitato.

La (6) può essere riscritta nella forma: $Ni \cong H_2 \delta = (\mathbf{B}_2 \delta \mathbf{S}) / \mu_0 \mathbf{S}$

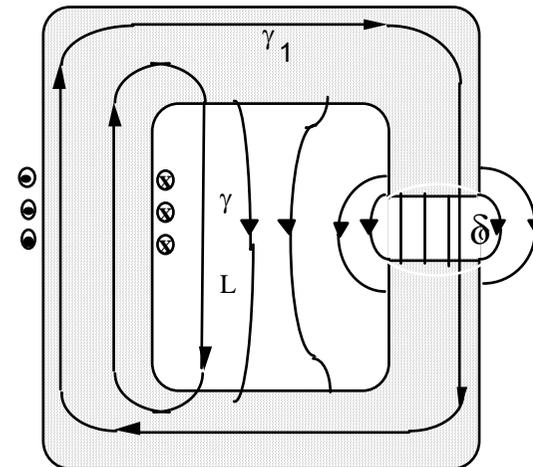


fig. 6

avendo indicato con S l'area della sezione retta del ferro nelle immediate vicinanze del traferro (si trascurano cioè le distorsioni al bordo del traferro). Osservando che risulta $B_2 S \cong \Phi$, avendo indicato con Φ il flusso del campo B esistente nella generica sezione del ferro, si ha infine:

$$Ni = \Phi \delta / (\mu_0 S)$$

Ponendo: $\mathfrak{R} = \delta / (\mu_0 S)$ si ha: $Ni \cong \mathfrak{R} \Phi$

La grandezza \mathfrak{R} rappresenta, come visto precedentemente, la riluttanza del tratto di circuito magnetico considerato, mentre il suo reciproco viene denominato permeanza. Si comprende a questo punto, come nelle situazioni del tipo descritto, le due leggi fondamentali della magnetostatica possono essere presentate in forma "circuitale", in cui le forze magneto-motrici Ni prendono il posto delle f.e.m., i flussi Φ prendono il posto delle correnti mentre le riluttanze \mathfrak{R} prendono il posto delle resistenze.

Alla luce di questa analogia la (7) viene spesso indicata come la legge di Ohm per i circuiti magnetici o anche come di legge di Hopkinson.

Per chiarire meglio l'analogia coi circuiti elettrici si può far riferimento allo schema mostrato in fig. 7. Il circuito magnetico di fig. 7a) può essere, in prima approssimazione, studiato considerando *la rete elettrica associata* di fig. 7b) in cui sono state stabilite le seguenti corrispondenze:

$$E \rightarrow Ni$$

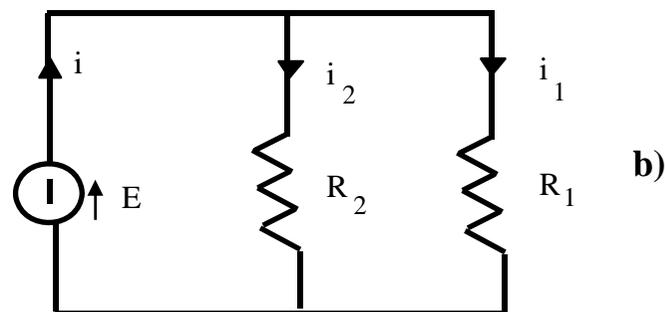
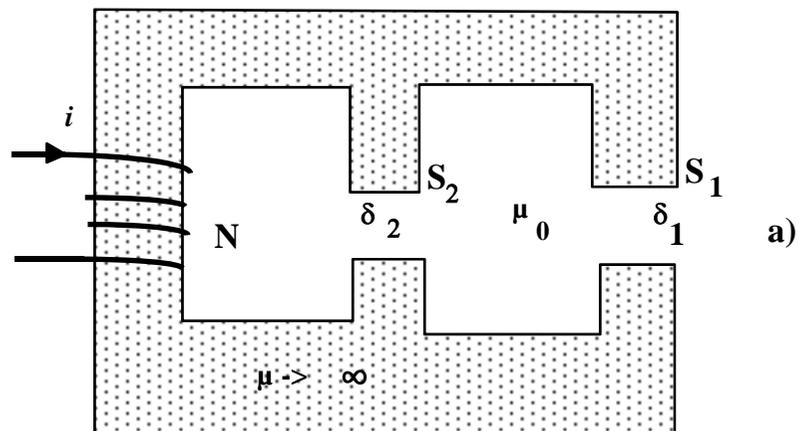
$$R_1 \rightarrow \mathfrak{R}_1 = d_1 / \mu_0 S_1 \quad R_2 \rightarrow \mathfrak{R}_2 = d_2 / \mu_0 S_2$$

$$i \rightarrow \Phi$$

$$i_1 \rightarrow \Phi_1$$

$$i_2 \rightarrow \Phi_2$$

avendo indicato rispettivamente con Φ il flusso che interessa la colonna sulla quale sono avvolte le Ni amperspire e Φ_1, Φ_2 i flussi nelle altre due *colonne* verticali.



Le considerazioni sviluppate in precedenza consentono in prima approssimazione di affrontare l'analisi dei circuiti magnetici tipici di alcune macchine elettriche quali i trasformatori.

Per meglio comprendere tale affermazione si può far riferimento allo schema di fig.8 in cui si suppone di conoscere la corrente $i_1(t)$ e si desidera, ad esempio valutare la corrente $i_2(t)$.

Dal punto di vista circuitale questo oggetto costituisce un sistema di due induttori accoppiati magneticamente (la cui caratteristica è data dal sistema di equazioni (8)) alimentato da un generatore FEM alla porta primaria e con un carico R_c alla porta secondaria.

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (8)$$

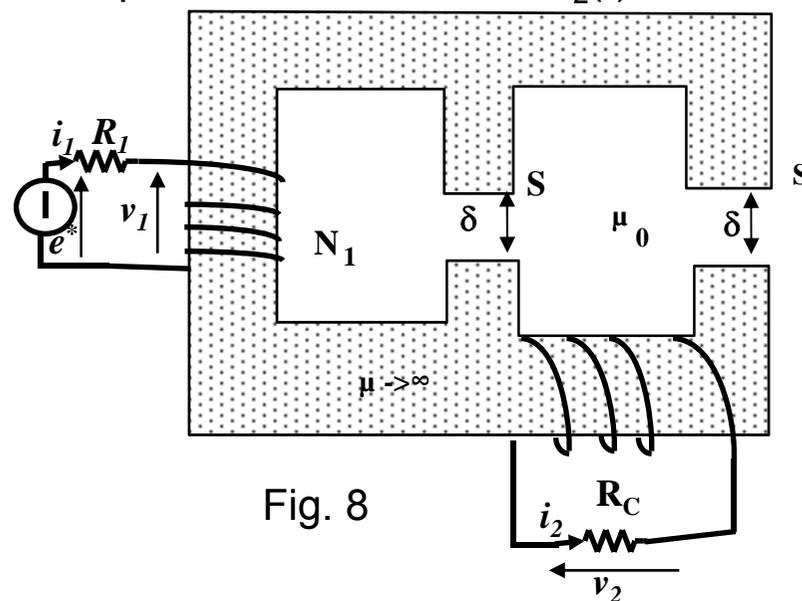
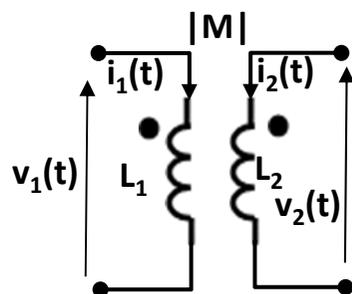


Fig. 8

Per poter risolvere tale sistema di tre equazioni nelle tre incognite v_1 , i_2 e v_2 occorrerà conoscere i coefficienti di auto e mutua induzione (L_1 , L_2 e M) del circuito magnetico. Questi possono essere agevolmente valutati, sulla base delle approssimazioni prima considerate, facendo riferimento al circuito elettrico associato, rappresentato in fig.9. In tale schema gli orientamenti dei generatori sono scelti in modo che essi erogino corrente positiva concorde con il flusso di autoinduzione dovuto all'avvolgimento corrispondente mentre le correnti i_1 ed i_2 dei generatori di f.m.m. sono scelte arbitrariamente.

Il coefficiente di autoinduzione L_1 è definito come: $L_1 = \Phi_{1TOT} / i_1$ dove Φ_{1TOT} rappresenta il flusso di autoinduzione totale concatenato con la corrente i_1 : questo sarà dato, nelle approssimazioni considerate, dal flusso medio concatenato con una spira, Φ_1 , per il numero N_1 delle spire primarie ($\Phi_{1TOT} = N_1 \Phi_1$). Per calcolare tale coefficiente facciamo riferimento allo schema di fig.10, nel quale, notiamo, è stato "spento" il generatore $N_2 i_2$. Il flusso Φ_1 sarà calcolabile come: $\Phi_1 = N_1 i_1 / (\mathcal{R} / 2)$, dove $\mathcal{R} / 2$ rappresenta la riluttanza equivalente vista dal generatore e pari al parallelo delle due resistenze $\mathcal{R} = \delta / \mu_0 S$.

Il coefficiente L_1 vale: $L_1 = \Phi_{1TOT} / i_1 = N_1 \Phi_1 / i_1 = 2N_1^2 / \mathcal{R}$

Esaminiamo ora come effettuare il calcolo del coefficiente di mutua induzione $M = M_{12} = M_{21}$. Per definizione avremo: $M_{21} = \Phi_{21TOT} / i_1$

Nel caso in esame, potremo ancora riferirci allo schema di fig.10;

si tratterà di valutare il flusso concatenato con l'avvolgimento secondario (quando questo è aperto), dovuto alle amperspire primarie. Osserviamo che in questo caso il coefficiente di mutua induzione risulta positivo, in quanto il campo magnetico primario risulta equiverso alla normale associata al circuito secondario, orientata congruentemente con il verso di riferimento assegnato a tale circuito.

Si avrà: $\Phi_{21} = N_1 i_1 / \mathcal{R}$ e quindi $M_{21} = \Phi_{21TOT} / i_1 = N_2 \Phi_{21} / i_1 = N_2 N_1 / \mathcal{R}$

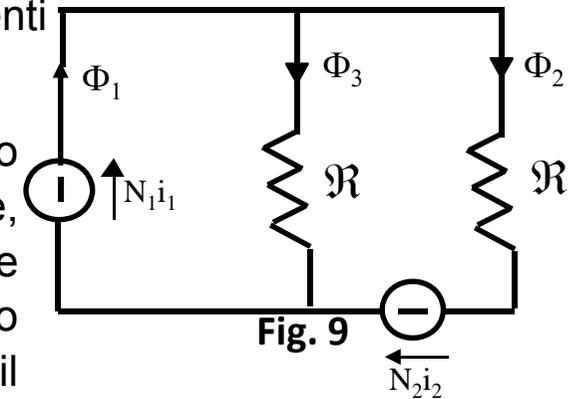


Fig. 9

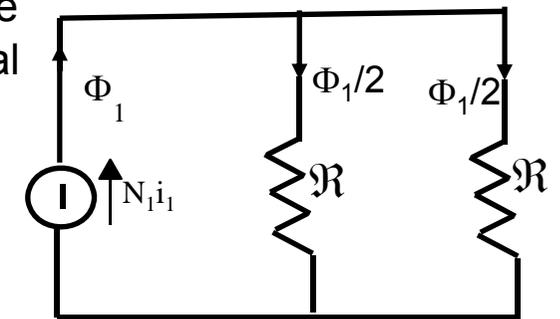


Fig. 10

In maniera analoga (fig.11) si procede per il calcolo del coefficiente di autoinduzione secondario L_2 .

Sulla base dello schema e dei calcoli precedenti ci si convince agevolmente che in questo schema l'accoppiamento risulta non perfetto ($L_1 L_2 \neq M^2$).

Una volta calcolati i parametri del doppio bipolo costituito dai due induttori accoppiati si risolve la rete elettrica a lato, nella quale al primario e al secondario sono stati reinseriti il generatore reale di tensione e il carico presenti nel circuito originario.

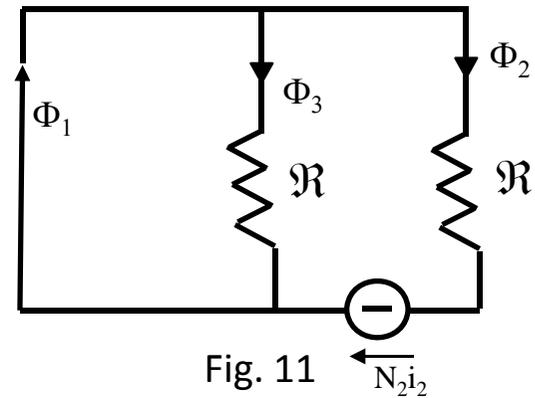


Fig. 11

