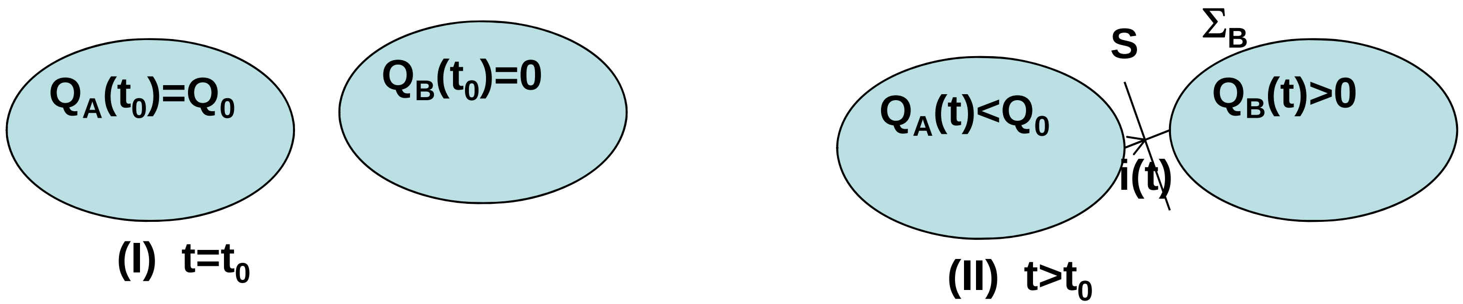
Corrente elettrica e conservazione della carica



Si considerino due corpi conduttori isolati in equilibrio elettrostatico (Fig. I). Si assuma che all'istante t_0 sul primo conduttore si trovi la carica libera positiva $Q_A(t_0)=Q_0$ e il secondo sia scarico. All'istante t_0, si turbi l'equilibrio elettrostatico collegando elettricamente A e B mediante un filo conduttore(fig. II). Si assisterà ad un flusso di carica elettrica da A verso B attraverso il filo di collegamento fino a raggiungere una nuova configurazione di equilibrio. Si noti che tale flusso, cui si dà il nome di **corrente elettrica**, interessa contemporaneamente tutti i punti del filo. Poiché nel sistema non sono stati introdotti generatori, **nel sistema chiuso costituito dai due conduttori e dal filo la carica elettrica totale si deve necessariamente conservare** (principio di conservazione della carica elettrica). In termini matematici, deve risultare per ogni t :

$$Q_A(t)+Q_B(t)=Q_0; \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ_B}{dt}=-\frac{dQ_A}{dt}; \quad \forall t$$

dove il significato fisico della seconda relazione è che, istante per istante, B si carica a spese di A.

Si consideri ancora la fig.(II) e, in particolare la generica sezione S del filo. Si immagini di misurare con un cronometro l'andamento temporale della quantità di carica elettrica, q(t), che è passata attraverso S dal momento in cui i corpi A e B sono stati collegati elettricamente ($t=t_0$) fino al momento in cui, raggiunto un nuovo equilibrio elettrostatico la funzione q(t) rimane costante ($t=t_{fin}$). E' possibile definire ora una nuova grandezza fisica, **l'intensità di corrente elettrica**, pari a:

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt} \quad \forall t$$

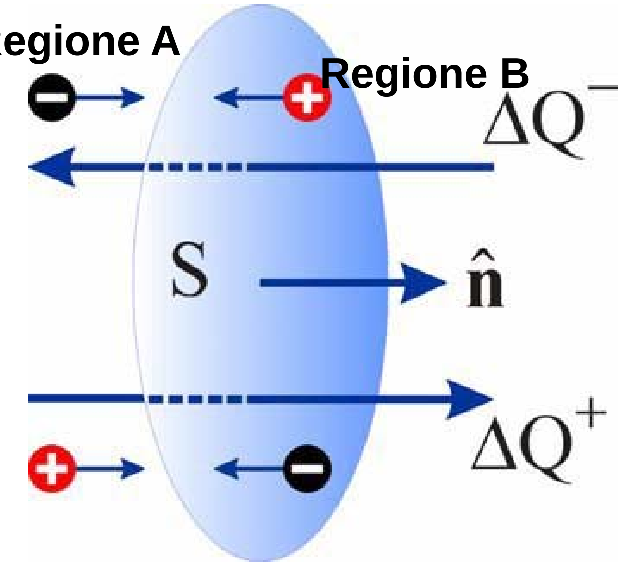
le cui dimensioni sono quelle di una carica diviso un tempo. Nel S.I. a questa unità si dà il nome di Ampere e corrisponde ad un passaggio di una carica positiva di un Coulomb al secondo attraverso S nel verso indicato in figura.

Abbiamo visto che in natura esistono cariche di due diverse qualità: positive e negative.

Cosa succede se la sezione S viene attraversata nella direzione individuata in figura (da A verso B) da cariche di segno negativo? Cosa succede se S viene attraversata da cariche che viaggiano con verso opposto?

Con riferimento alla figura a lato $q(t) = \Delta Q^{+}(t) + \Delta Q^{-}(t)$, dove

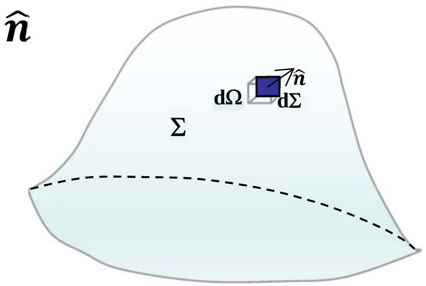
- ΔQ^{+} è pari alla somma delle cariche positive che si muovono nella direzione di riferimento, $\hat{\mathbf{n}}$, e delle cariche negative che si muovono in senso opposto.
- ΔQ^{-} è pari alla somma delle cariche negative che si muovono nella direzione di riferimento, $\hat{\mathbf{n}}$, e delle cariche positive che si muovono in senso opposto.



Il campo di corrente

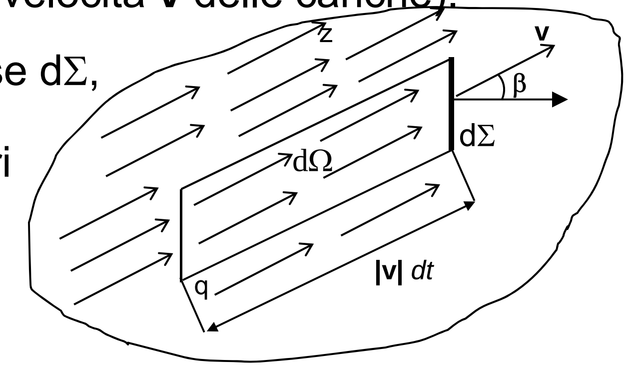
Si consideri una regione dello spazio Ω all'interno della quale vi siano cariche in movimento (assumiamo per semplicità che siano tutte positive e di valore pari alla carica elementare *q*) e, in questa regione, la generica superficie Σ (vedi fig. a lato) di normale $\hat{\boldsymbol{n}}$

Si indichi con $d\Sigma$ una generica superficie elementare di Σ sufficientemente piccola da poter assumere che il versore $\hat{\boldsymbol{n}}$, normale al suo punto centrale, sia con buona approssimazione normale a qualunque punto di $d\Sigma$ (o, equivalentemente, che si possa assumere che $d\Sigma$ sia una superficie piana).



Si assuma che nella regione elementare $d\Omega$, avente $d\Sigma$ quale intersezione con Σ, sia presente una distribuzione <u>uniforme</u> di cariche libere a densità volumica, N(t), e in moto, pure uniforme, con velocità **v(t)** (cioè N(t) e **v(t)** hanno lo stesso valore in ogni punto di $d\Omega$) **.**

Si fissi, infine, un intervallo di tempo elementare, *dt*, tale per cui il moto delle cariche sia uniforme temporalmente (deve essere sufficientemente piccolo da è poter assumere che nel tempo dt non vari in maniera apprezzabile né la densità N né la velocità **v** delle cariche).



Precisiamo ora che il volume elementare dΩ è il cilindretto di base dΣ, costruito avendo assunto come generatrice il lato **v***dt*

La carica netta che attraversa la superficie dΣ nel tempo *d*t è pari alla carica racchiusa in dΩ:

$$dQ = q\, N\, d\Sigma\, \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v}\, dt = \mathbf{q\, N\, d\Sigma\ \ v}\ dt\ \mathbf{\cos\beta}$$

La carica netta che *nell'unità di tempo* taglia la superficie dΣ, secondo l'orientamento scelto, corrisponde proprio all'intensità di corrente elettrica (o, più sinteticamente, alla corrente elettrica) che interessa la superficie elementare dΣ:

$$di = dQ/dt = q\, N\, d\Sigma\ \ v \cos\beta$$

Per trovare la corrente elettrica che interessa l'intera superficie S occorre effettuare un integrale superficiale:

$$i = \iint_{\Sigma} q\ N\ \mathbf{v}\ \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Definendo il campo di corrente come **J**=Nq**v**, la relazione precedente diventa:

$$i = \iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

In generale N e **v** non presentano uniformità né temporale né spaziale nel dominio **Ω,** e, pertanto, il valore della densità di corrente sarà funzione delle coordinate spaziali e del tempo: **J**(**x**,t).

Il principio di conservazione della carica

Si consideri una regione spaziale Ω, delimitata dalla superficie chiusa Σ e si assuma che all'interno della regione sia presente una carica libera con densità volumica ρ.

La carica libera totale presente nella regione è pari a: $Q = \iiint_{\Omega} \rho d\tau$

Se nell'intervallo temporale Δt c'è un flusso di carica ΔQ uscente dalla superficie Σ, è intuitivo comprendere che nello stesso intervallo di tempo, la quantità di carica libera presente nella regione Ω diminuirà di una quantità analoga. Ricordando che, se la regione Ω non cambia nel tempo, è possibile portare sotto integrale la derivata temporale, si perviene alla seguente relazione:

$$i(t) = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \frac{dQ_{out,\Sigma}}{dt} = -\frac{dQ_{\Omega}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\tau$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\tau = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \rightarrow \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Applicando il teorema della divergenza al primo membro si ottiene: $\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{J} d\tau = -\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$

Poiché l'equazione integrale vale per ogni volume Ω, le funzioni integrande devono essere uguali. La relazione così ricavata è chiamata equazione di continuità, ed esprime il principio di conservazione della carica in forma locale:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

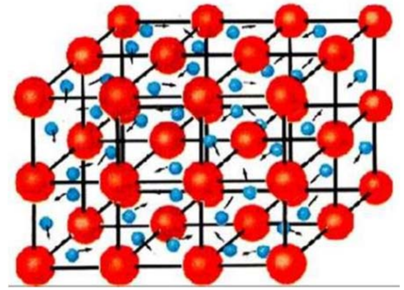
Come detto, un campo viene definito stazionario se il suo valore risulta indipendente dal tempo in ogni punto del dominio spaziale. Una corrente elettrica sarà definita stazionaria se in ogni punto del mezzo in cui essa scorre risultano stazionarie la densità di carica e la densità di corrente:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

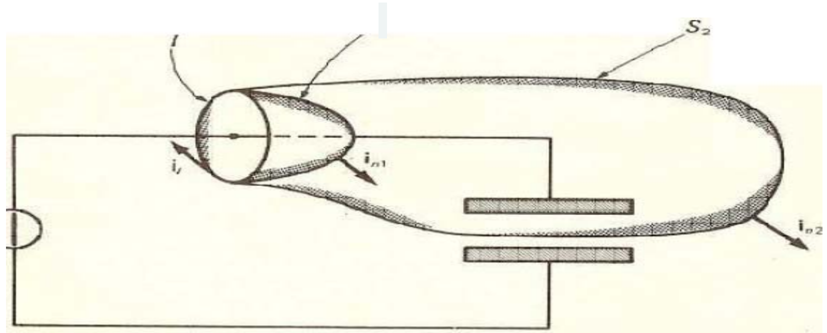
CORRENTI DI CONDUZIONE, CONVEZIONE E SPOSTAMENTO

Le correnti non sono tutte eguali. E' possibile, in maniera schematica, distinguere vari tipi di corrente, alcuni associati ad un moto di carica interno alla materia, altri a moti macroscopici delle masse che fungono da supporto alle cariche elettriche, un ultimo tipo, infine, proposto per la prima volta da Maxwell, che prescinde addirittura dalla presenza di massa e di cariche elettriche:

- **Correnti di conduzione.** Sono associate ai flussi dei portatori elementari di carica elettrica
  - moto di elettroni (nei materiali "conduttori" e "semi-conduttori");
  - moto di lacune (nei materiali "semi-conduttori").

  I materiali conduttori sono caratterizzati tipicamente da una struttura reticolare nella quale gli elettroni orbitanti sugli strati più esterni degli atomi possono circolare liberamente (Vedi figura a lato). In assenza di campi elettrici macroscopici, il moto degli elettroni è puramente casuale; in presenza di un campo elettrico macroscopico, alla componente casuale si sovrappone una componente di velocità orientata nella direzione del campo elettrico (velocità di deriva o drift)
- **Correnti di convezione**. Sono correnti nelle quali si spostano i supporti delle cariche elettriche.
  - il movimento degli ioni nelle "soluzioni elettrolitiche" e nei gas sotto l'azione di forze fluidodinamiche (ad esempio la pressione).
  - Il moto meccanico di masse sulle quali è deposta una carica elettrica netta (ad esempio, un nastro trasportatore sulla cui superficie sono state collocate delle cariche elettriche)
- **Correnti di spostamento.** Sono state introdotte da Maxwell per giustificare il passaggio della corrente attraverso i materiali isolanti o lo spazio libero. Sono dovute alle variazioni temporali del campo elettrico e, quindi, la loro presenza è esclusa in condizioni stazionarie



LA LEGGE DI OHM

Nella sezione dedicata all'elettrostatica si è detto che, nello spazio libero, una carica elettrica si muove sotto l'azione di campi elettrici esterni (cioè di campi elettrici prodotti da altre cariche; in maniera più specifica, nel calcolo della forza su una carica va escluso il contributo dell'auto-campo)

Questa affermazione è ancora vera all'interno dei mezzi materiali, seppure occorra fare delle precisazioni.

Nei materiali, a differenza di quanto avviene nel vuoto, sono presenti delle forze di attrito che si oppongono, in misura maggiore (materiali isolanti) o minore (materiali conduttori), al moto delle cariche. L'attitudine del materiale ad essere attraversato da una corrente elettrica viene descritta sinteticamente da un parametro quantitativo caratteristico del materiale che va sotto il nome di conducibilità elettrica, si rappresenta col simbolo σ e, nel S.I., si misura in Siemens/m [Ω^{-1} m^{-1}]. In alternativa, si può utilizzare il suo reciproco che va sotto il nome di resistività elettrica, viene rappresentata con il simbolo η (oppure, in altri testi, con ρ) e si misura in Ohm*m [Ω m].

La relazione costitutiva locale che lega il campo elettrico al campo di corrente va sotto il nome di legge di Ohm locale:

$$\mathbf{E}=\rho\mathbf{J} \text{ oppure } \mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$$

Il valore della resistività elettrica dipende generalmente dalla temperatura di lavoro

$$\rho = \rho_0[1 + a(T - T_0)]$$

dove ρ_0 è la resistività misurata alla temperatura di riferimento T_0 =20°C è mentre a è una costante che dipende dal materiale.

RESISTIVITA' E COEFF. DI TEMP. PER ALCUNI MATERIALI

Conduttore	Resistività ρ20 [mm2·Ω/m]	Conduttività χ20=1/ρ20 [m/mm2·Ω]	Coefficienti di temperatura α20 [1/K]
Alluminio	0,0287	34,84	3,8 · 10-3
Ottone. CuZn 40	≤ 0,067	≥ 15	2 · 10-3
Costantana	0,5	2	3 · 10-4
Rame	0,0175	57,14	3,95 · 10-3
Oro	0,023	43,5	3,8 · 10-3
Filo di ferrro	0,1 to 0,15	10 to 6,7	4,5 · 10-3
Piombo	0,208	4,81	3,9 · 10-3
Magnesio	0,043	23,26	4,1 · 10-3
Manganese	0,43	2,33	4 · 10-6
Mercurio	0,941	1,06	9,2 · 10-4
Ni Cr 8020	1	1	2,5 · 10-4
Nichel	0,43	2,33	2,3 · 10-4
Argento	0,016	62,5	3,8 · 10-4
Zinco	0,06	16,7	4,2 · 10-4
Tungsteno	0,0525		
Platino	0,106		

IL MODELLO DELL'ELETTROCINEMATICA IN REGIME STAZIONARIO

Si consideri una regione limitata, omogenea, conduttrice, passiva Ω di conducibilità elettrica σ.

Si assuma che la regione Ω sia delimitata dalla frontiera Σ ed interessata da un campo elettrico stazionario **E**.

Abbiamo visto in precedenza che, per il principio di conservazione della carica, in regime stazionario il campo di corrente deve essere solenoidale. Inoltre nello studio del modello elettrostatico abbiamo notato che in regime stazionario il campo elettrico risulta conservativo (cioè irrotazionale). Se a queste equazioni si aggiunge la legge di Ohm ed opportune condizioni al contorno, si ottiene il modello locale dell'elettro-cinematica stazionaria, dove V è la funzione potenziale scalare incognita.

$$\begin{cases} \nabla \mathrm{x} \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = \mathbf{0} \text{ +cond. al cont.} \\ \mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \boldsymbol{V} \\ \nabla^{2} \boldsymbol{V} = \mathbf{0} \\ + \text{cond. al cont.} \end{cases}$$

La frontiera di Ω può essere sostanzialmente distinta in tre parti:

1) Su una parte del contorno, Σ_E, viene assegnato il valore della componente tangenziale del campo elettrico.

2) Un'altra parte del contorno, Σ_J, separa Ω da materiali isolanti e, pertanto, non può essere attraversata da corrente elettrica (questa condizione viene soddisfatta matematicamente imponendo che si annulli la componente normale del campo di corrente $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ su Σ_J.

3) Infine, vi può essere una parte del contorno, Σ_{IF}, a contatto che separa Ω da una seconda regione conduttrice. In questo caso occorrerà imporre le condizioni di interfaccia in modo simile a quanto fatto in elettrostatica:

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{J}_2} - \overrightarrow{\mathbf{J}_1}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{E}_2} - \overrightarrow{\mathbf{E}_1}\right) \mathrm{x}\, \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale a Σ_{IF}

Come si applicano le condizioni al contorno e di interfaccia se si usa come incognita il potenziale scalare?

Su Σ_E si impone direttamente il valore del potenziale (morsetti di alimentazione) e dunque le condizioni al contorno sono di tipo Dirichlet.

Su Σ_J si impone che la derivata del potenziale nella direzione normale alla frontiera sia nulla $\mathbf{J_n} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ =-$\boldsymbol{\sigma}\partial V/\partial n$=0 e dunque le condizioni al contorno sono di tipo Neumann. Si ricorda che per l'unicità della soluzione su almeno un punto della frontiera deve essere imposto il valore del potenziale, ovvero usata una condizione al contorno di Dirichlet.

Sulla superficie di interfaccia, Σ_{IF}, si deve imporre che tra i conduttori 1 e 2 si mantengano continui:

a) Il potenziale scalare $V_1=V_2$

b) la componente normale del campo di corrente $\mathbf{J_{n1}}=-\boldsymbol{\sigma_1}\partial V/\partial n=-\boldsymbol{\sigma_2}\partial V/\partial n=\mathbf{J_{n2}}$.

POTENZA E DENSITA' DI POTENZA ELETTRICA DISSIPATA PER EFFETTO JOULE

La potenza elettrica dissipata a causa del passaggio di corrente (effetto Joule) nella regione <u>conduttrice</u>, <u>passiva</u> Ω di conducibilità elettrica σ si esprime in watt [W] ed è pari a:

$$P_{JOU,\Omega} = \iiint_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\Omega = \iiint_{\Omega} \sigma \mathrm{E}^{\mathbf{2}} d\Omega = \iiint_{\Omega} \rho \mathrm{J}^2 d\Omega$$

La densità di potenza elettrica dissipata per effetto Joule nel generico punto P della regione <u>conduttrice</u>, <u>passiva</u> Ω di conducibilità elettrica σ si esprime in watt/m^3 ed è pari a:

$$w_{JOU}(\mathbf{P}) = \mathbf{J}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{P}) = \sigma \mathrm{E}^{\mathbf{2}}(\mathbf{P}) = \rho \mathrm{J}^2(\mathbf{P})$$

RESISTENZA DEL CONDUTTORE CILINDRICO PERCORSO DA CORRENTE LONGITUDINALE

Sia dato un conduttore cilindrico C, omogeneo, avente sezione di forma generica e resistività η. Le due estremità (parallele e normali all'asse) siano collegate a due elettrodi piani S_1 e S_2 (di resistività trascurabile rispetto a η) ai quali sia applicata una differenza di potenziale. Assunto un sistema di coordinate cartesiane con asse z coincidente con l'asse del conduttore, la funzione potenziale V risulta indipendente da x e y. In ogni punto di C si ha allora

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

L'integrale generale di questa equazione è: V=Az+B, con A e B costanti arbitrarie.

Il campo elettrico **E** risulta dunque uniforme e diretto secondo z; in modulo

$$E = \left|\frac{dV}{dz}\right| = |A|$$

di conseguenza la densità di corrente **J** è anch'essa uniforme e diretta secondo z, e inoltre

$$J = \frac{E}{\rho} = \frac{A}{\rho}$$

La corrente I che percorre il conduttore è pari a $I = JS = \frac{A}{\rho} S$

dove S indica l'area della sezione normale del conduttore. La differenza di potenziale ai capi del conduttore è data da:

$$\Delta V = |V_1 - V_2| = AL$$

dove L è la lunghezza di C. La <u>resistenza dei conduttori filiformi</u> è pari a: $\boxed{R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{AL}{A\frac{S}{\rho}} = \rho\frac{L}{S}}$

La potenza elettrica dissipata risulta pari a: P=$R\,I^2$

RESISTENZA DI UN CONDUTTORE CILINDRICO CAVO PERCORSO DA CORRENTE RADIALE

Consideriamo un conduttore cilindrico cavo (fig. 6.11), a sezione circolare, di raggio interno R_{int} ed esterno R_{est} , dotato di resistività η.

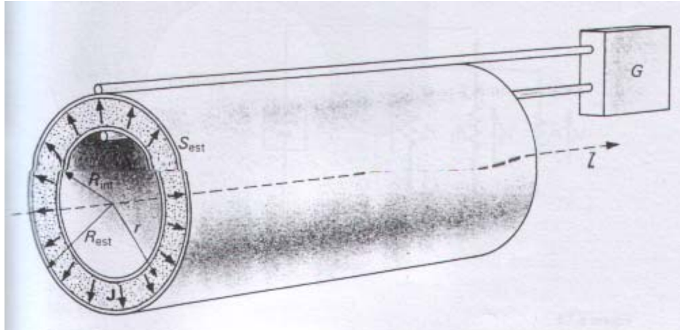


Figura 6.11

Supponiamo che la superficie interna S_{int} e quella esterna S_{est} siano costituite da due elettrodi tra cui vi sia una differenza di potenziale V. V dipende soltanto dalla coordinata radiale r.

L'equazione di Laplace è:

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=0$$

$$posto\ g(r)=\frac{dV}{dr}\Rightarrow\frac{dg(r)}{dr}+\frac{1}{r}g(r)=0\rightarrow\frac{dg(r)}{g(r)}=-\frac{dr}{r}\rightarrow\ln g(r)=-\ln(r)+\ln(A)$$

$$\rightarrow\ln(g(r))+\ln(r)-\ln(A)=0\rightarrow\ln(rg(r)/A)=0\rightarrow rg(r)/A=1\rightarrow g(r)=\frac{dV}{dr}=\frac{A}{r}$$

$$V=A\cdot\ln r+B$$

$$E_r=\left|\frac{dV}{dr}\right|=\frac{|A|}{r}$$

Il campo elettrico, diretto radialmente, ha modulo E_r pari a:

$$J_r=\frac{1}{\rho}E_r=\frac{1}{\rho}\frac{|A|}{r}$$

La corrente totale che attraversa una qualunque superficie cilindrica di raggio r, coassiale con le superfici S_{int} e S_{est}, e la differenza di potenziale, risultano:

$$I = 2\pi r L J = 2\pi r L \frac{1}{\eta}\frac{|A|}{r} = \frac{1}{\eta} 2\pi L |A|$$

$$V = |A| \ln \frac{R_{est}}{R_{\text{int}}}$$

La resistenza del conduttore è:

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{|A| \ln \frac{R_{est}}{R_{\text{int}}}}{1/\eta \cdot 2\pi L |A|} = \eta \frac{\ln \frac{R_{est}}{R_{\text{int}}}}{2\pi L}}$$

La potenza elettrica dissipata risulta pari a: $P = R\, I^2$