

IL CAMPO ELETTROSTATICO IN PRESENZA DI CONDUTTORI NEL VUOTO

I **conduttori** sono materiali che presentano una struttura reticolare nella quale, sotto l'azione di campi elettrici esterni, si muovono un numero elevato di particelle sub-atomiche a carica negativa, denominate “**elettroni**”. In altri materiali, denominati **dielettrici o isolanti**, ogni elettrone risulta stabilmente vincolato ad un singolo atomo o ad una singola molecola.

Diremo che un **conduttore è in equilibrio elettrostatico** quando in esso non si riscontra alcun moto macroscopico di cariche. Perché ciò accada occorre che sulle cariche libere presenti nel corpo non agiscano forze di natura elettrica la cui media spaziale e temporale sia nulla in volumi e intervalli temporali piccoli su scala ingegneristica ma grandi su scala atomica (cioè se rapportati rispettivamente alle dimensioni spaziali atomiche e ai tipici periodi temporali delle rivoluzioni orbitali degli elettroni); in altre parole, se il campo elettrico **macroscopico** risulta nullo in tutti i punti interni al conduttore.

Si supponga che lo stato di riposo di un corpo conduttore sia perturbato posizionando al suo esterno in posizioni fissate un insieme di cariche elettriche, sorgenti del campo esterno \mathbf{E}_{est} .

A seguito di questo stimolo, si assisterà ad una ^{ρ} ridistribuzione delle cariche elettriche presenti nel corpo conduttore e alla conseguente generazione di un campo “di reazione” $\mathbf{E}_r(t)$ che sovrapposto a \mathbf{E}_{est} , darà origine al campo elettrico totale $\mathbf{E}(t)$:
$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_{est} + \mathbf{E}_r(t)$$

La situazione evolverà nel tempo, fino a quando, nell'istante t_f il campo $\mathbf{E}_r(t_f)$ non bilancerà esattamente \mathbf{E}_{est} in tutti i punti interni al conduttore. In queste condizioni, in ogni punto del dominio conduttore, risulterà:
$$\mathbf{E}(t_f) = \mathbf{E}_{est} + \mathbf{E}_r(t_f) = 0$$

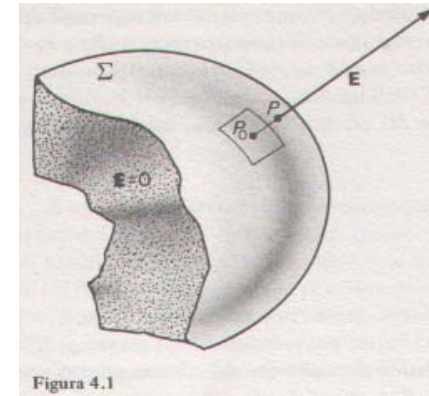
A partire dall'istante t_f , le cariche elettriche presenti nella regione conduttrice non saranno più soggette a forze elettriche e si stabilizzeranno nelle posizioni raggiunte, dando origine ad una nuova configurazione di equilibrio elettrostatico.

Si noti che, in base al teorema di Gauss, la condizione di campo elettrico nullo implica che anche la densità di carica libera debba azzerarsi in tutta la regione **interna** del conduttore : $\rho = 0$.

Si noti che sull'interfaccia tra il conduttore e il mezzo isolante che lo circonda il campo elettrico non è obbligato ad annullarsi e sollecita le cariche. Queste, tuttavia, almeno al di sotto di certi valori del campo elettrico non possono abbandonare il conduttore a causa dei vincoli atomici.

Pertanto, all'equilibrio, sulla superficie del conduttore viene ad addensarsi una carica elettrica a densità superficiale. Applicando ancora una volta il teorema di Gauss si perviene alla conclusione che all'esterno del conduttore, quale che sia la sua forma, la componente tangenziale del campo elettrico risulta nulla e quella normale pari a σ/ϵ_0 ; si ha cioè:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} E_n(P) = \frac{\sigma(P_0)}{\epsilon_0}$$



dove $\sigma(P_0)$ è la densità di carica superficiale σ nel generico punto P_0 del conduttore (vedi fig. 4.1).

Come detto, sulla superficie Σ la componente tangenziale di \mathbf{E} risulta nulla: infatti, il campo elettrico \mathbf{E} è nullo all'interno del conduttore e, per Gauss, anche in presenza di distribuzioni superficiali di carica, le sue componenti tangenziali di devono mantenersi continue nel passaggio dalla regione conduttrice a quella isolante. Se ne conclude che nelle regioni di spazio vuoto adiacenti alla superficie del conduttore il campo elettrico, in condizioni di equilibrio elettrostatico, risulta puramente normale alla superficie:

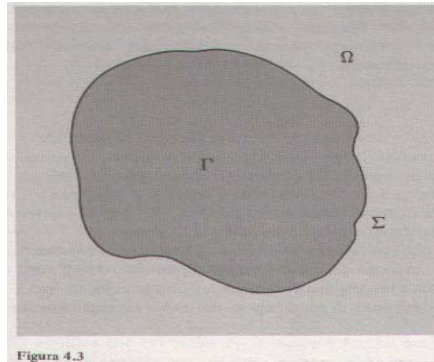
$$E_n = -\frac{\partial V}{\partial n}$$

Il valore totale della carica libera, Q , depositata sulla superficie del conduttore, risulta proporzionale al flusso di \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa Σ' che racchiuda interamente il dominio conduttore. :

$$Q = \iint_{\Sigma} \sigma dS = \epsilon_0 \iint_{\Sigma'} E_n dS$$

CALCOLO DEL CAMPO IN PRESENZA DI CONDUTTORI

Si consideri un conduttore sulla cui superficie Σ si distribuisca una carica Q con densità σ , variabile da punto a punto, in modo da produrre campo nullo in tutti i punti interni al conduttore. Indicate con Γ e Ω rispettivamente le regioni interne ed esterne al conduttore (fig. 4.3).

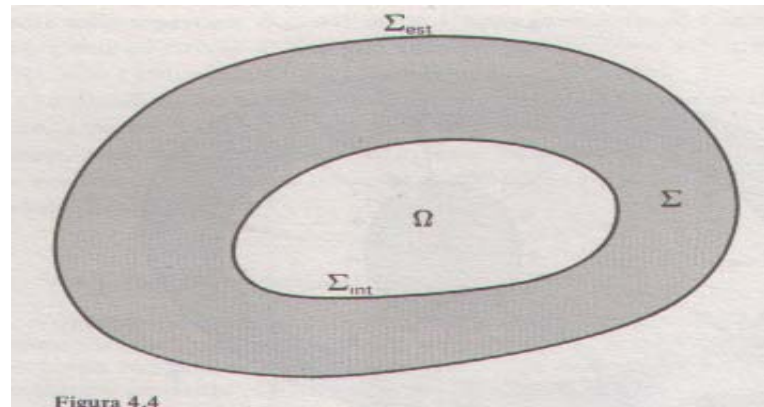


si constata che la funzione potenziale V :

1. è continua in tutti i punti di Ω (inclusi quelli appartenenti alla frontiera Σ) perché il potenziale deve mantenersi continuo anche in presenza di distribuzioni superficiali;
2. soddisfa in tutti i punti della regione Ω all'equazione di Laplace;
3. assume valore costante in tutti i punti di Γ e in particolare sulla superficie Σ ;
4. verifica la condizione:
$$-\iint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$
5. verifica la condizione:
$$\lim_{P \rightarrow \infty} V(P) = 0$$

CAMPO NEI CONDUTTORI CAVI

Consideriamo un conduttore dotato di una cavità interna (fig. 4.4) e di carica Q . Dimostriamo che la carica si localizza soltanto su Σ_{est} .



In tutti i punti interni alla regione Ω la funzione potenziale $V(P)$ soddisfa l'equazione di Laplace, per l'assenza di cariche all'interno della cavità :

$$\nabla^2 V = 0$$

D'altra parte, il potenziale V deve assumere valore costante V_0 in tutti i punti del conduttore e quindi anche sui punti di Σ_{int} .

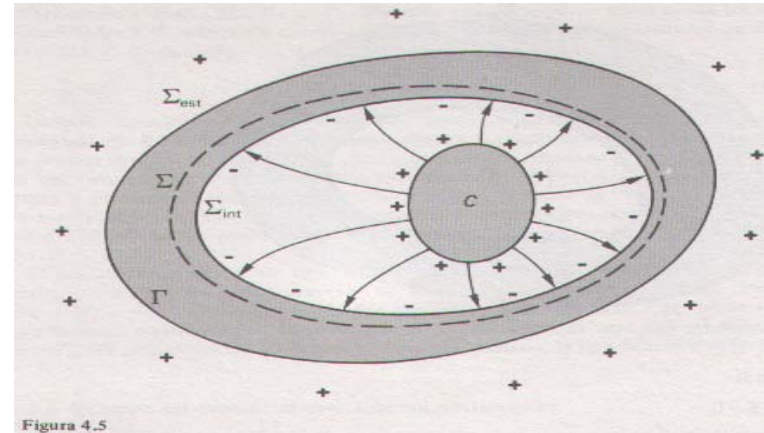
Si conclude pertanto che il potenziale $V(P)$ è continuo in $\Omega \cup \Sigma_{int}$, soddisfa l'eq. di Laplace in Ω e assume valore costante sui punti di Σ_{int} .

È questa la forma di un problema di Dirichlet interno corrispondente a un valore costante del potenziale sulla frontiera della regione Ω . Si verifica che la soluzione unica è $V(P)=V_0$ e quindi $\mathbf{E}=0$. In particolare, la componente normale di \mathbf{E} in tutti i punti di Σ_{int} risulta nulla, così come, la densità di carica superficiale σ su Σ_{int} . Pertanto, in queste condizioni, tutta la carica si distribuisce sulla superficie esterna Σ_{est} . Quanto detto può essere sintetizzato coll'asserto:

Un conduttore cavo si comporta come uno schermo elettrostatico nei confronti delle cariche esterne.

Si consideri, ora, un corpo C caricato positivamente ed allocato all'interno della cavità di un conduttore (fig.4.5) .

Si può constatare che nella cavità esiste un campo elettrico le cui linee vettoriali nascono nei punti di C dove sono posizionate le cariche e terminano sulle pareti interne della cavità.



La carica totale localizzata su Σ_{int} deve essere uguale e contraria alla carica totale presente sul corpo C . Infatti, all'equilibrio deve risultare nullo il flusso del campo elettrostatico attraverso la generica superficie Σ interamente inclusa nel materiale conduttore perché è nullo il campo in ogni suo punto. Conseguentemente, dal teorema di Gauss segue che la carica totale contenuta nella regione delimitata da Σ deve essere nulla.

Inoltre per il principio di conservazione della carica elettrica, il conduttore, inizialmente scarico, deve mantenersi tale anche a seguito dell'introduzione di C entro la cavità (per la legge della conservazione della carica). Ciò può verificarsi soltanto se sulla superficie Σ_{est} si localizza una carica uguale e opposta a quella che si localizza su Σ_{int} .

In altre parole, nei punti esterni ad un conduttore cavo si rileva un campo elettrico dovuto alla presenza di cariche elettriche posizionate in una sua cavità interna, ma tale campo non sarà influenzato dal modo in cui la carica è distribuita nella cavità: la distribuzione della carica sulla superficie esterna del conduttore non cambia quando si modifica la distribuzione della carica all'interno della cavità (ad esempio spostando il conduttore C).

In conclusione, lo schermo elettrostatico isola le cavità interne da influenze esterne e il mondo esterno dalle variazioni "locali" (cioè che non coinvolgono l'ambiente esterno) che avvengono all'interno delle cavità.

IL CAMPO ELETTROSTATICO IN PRESENZA DI DIELETTRICI

Macroscopicamente un dielettrico nello stato di riposo può essere rappresentato come un sistema continuo, con densità di carica nulla in ogni suo punto. Per i nostri scopi, un dielettrico può essere convenientemente modellato attraverso la sovrapposizione di due distribuzioni continue di carica, una positiva di densità ρ_+ ed una negativa di densità ρ_- . In assenza di campo elettrico esterno, per ogni volume elementare $\Delta\tau$ del dielettrico, le cariche totali di diverso segno si equivalgono esattamente e i baricentri delle due distribuzioni coincidono: $\rho_+ + \rho_- = 0$; $\rightarrow \rho_+ = -\rho_-$. Come conseguenza, carica globale e momento di dipolo in assenza di polarizzazione sono entrambi nulli.

Supponiamo ora di polarizzare il materiale: imponiamo, cioè, un piccolo spostamento relativo $\vec{\ell} = \vec{\ell}_+ - \vec{\ell}_-$ alle distribuzioni di cariche positive e negative. Tale spostamento determinerà la nascita di un momento di dipolo associato all'elemento di volume $\Delta\tau$:

$$\Delta\vec{p} = (\vec{\ell}_+ - \vec{\ell}_-) \rho_+ \Delta\tau = \rho_+ \vec{\ell} \Delta\tau \quad (1)$$

Il calcolo del campo elettrico macroscopico si effettua sovrapponendo i contributi del momento di dipolo di ogni elemento di volume al campo elettrico di fondo. Allo scopo introduciamo il vettore di polarizzazione \vec{P} , definito come momento di dipolo elettrico per unità di volume: $\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau}$

Combinando questa espressione con la (1), si ha: $\vec{P} = \rho_+ \vec{\ell}$

Il contributo dato dal materiale polarizzato al campo elettrico può quindi essere calcolato riferendosi a una distribuzione continua di momento di dipolo. In alternativa si può sostituire alla distribuzione di dipoli una densità di carica volumetrica equivalente (cioè che produce gli stessi effetti).

Queste cariche sono dette di polarizzazione per distinguerle da quelle libere considerate sinora.

Consideriamo una generica superficie Σ chiusa ed interna al dielettrico. Indichiamo con τ il volume in essa contenuto (fig. 5.4).

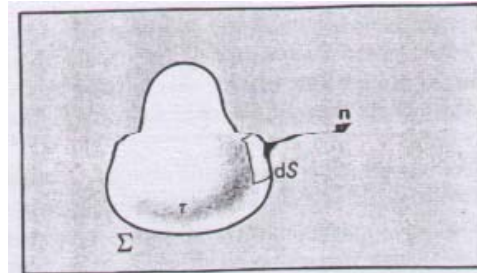


Figura 5.4

Sappiamo che quando il dielettrico non è polarizzato la superficie contiene carica globale nulla.

Quando il materiale è polarizzato, si può avere entro la stessa superficie Σ una carica Q_p non nulla. Definiamo carica di polarizzazione questo aumento di carica globale. Per il principio di conservazione della carica, tale aumento di carica è dato dalla carica totale entrata nel volume τ :

$$-\rho_+ \vec{\ell}_+ \cdot \vec{n} dS - \rho_- \vec{\ell}_- \cdot \vec{n} dS$$

$$\text{ma } \rho_- \vec{\ell}_- \cdot \vec{n} dS = -\rho_+ \vec{\ell}_- \cdot \vec{n} dS$$

da cui la carica totale che entra nel volumetto è pari a

$$dQ = -\rho_+ (\vec{\ell}_+ - \vec{\ell}_-) \cdot \vec{n} dS = -\rho_+ \vec{\ell} \cdot \vec{n} dS = -\vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

$$Q_p = -\oiint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS \quad (2)$$

Possiamo assumere che la carica di polarizzazione sia distribuita nel volume τ con densità volumica di carica di polarizzazione, ρ_p , per cui, in analogia a quanto fatto nel caso della carica libera, risulta:

$$Q_p = \iiint_{\tau} \rho_p d\tau \quad (3)$$

Confrontando la (2) e la (3) e osservando che le due espressioni devono fornire lo stesso valore di Q_p , applicando il teorema della divergenza risulta:

$$Q_p = -\oiint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS = -\iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{P} d\tau$$

$$-\iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{P} d\tau = \iiint_{\tau} \rho_p d\tau$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Consideriamo ora la generica frazione, S , della superficie che contorna il volume di dielettrico τ e lo separa dallo spazio vuoto esterno. Ricordando che nello spazio vuoto il vettore di polarizzazione è nullo, la carica di polarizzazione, σ_p , nello strato superficiale del dielettrico risulta pari a :

$$dQ_p = \vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

$$dQ_p = \sigma_p dS$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$$

Si noti che nelle espressioni precedenti, il mezzo 1 è il dielettrico, il mezzo 2 è lo spazio vuoto e la normale \vec{n} è orientata nel verso uscente dal dielettrico τ .

Tale relazione è generalizzabile al caso in cui vi sia una superficie di discontinuità S tra due dielettrici con differenti proprietà materiali (vedi fig 5.5).

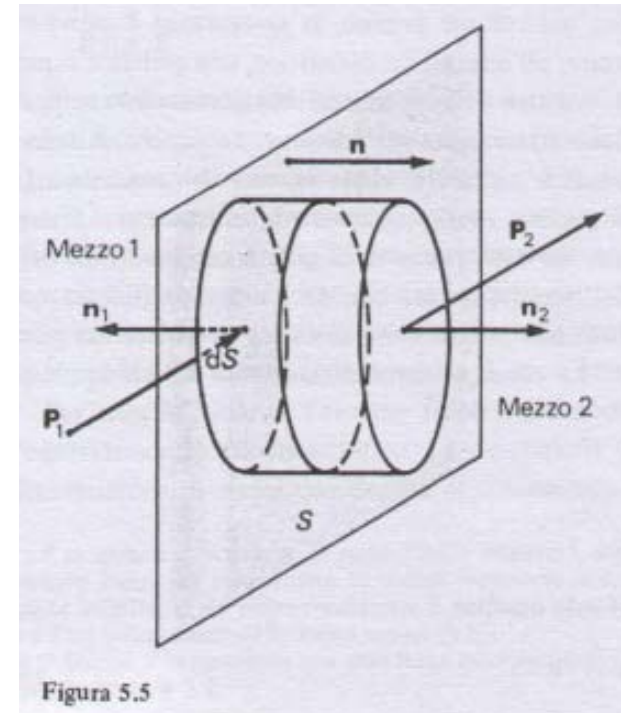


Figura 5.5

La carica di polarizzazione dQ_P contenuta in un volumetto uguaglia il flusso di \mathbf{P} entrante nel volumetto stesso. La carica di polarizzazione può essere distribuita con densità σ_P sulla superficie di discontinuità S e con densità ρ_{p1} e ρ_{p2} nel volume dei due mezzi. Pertanto entro il volumetto si può avere una carica superficiale $dQ_{PS}=\sigma_P dS$, sulla superficie dS , e una carica volumica $dQ_P=(\rho_{p1}+\rho_{p2})d\tau$ nel volumetto $d\tau$. Dato che il volumetto $d\tau$ si ottiene moltiplicando tre distanze infinitesime e la superficie elementare dS soltanto due, dQ_P risulta infinitesima di ordine superiore a dQ_{PS} e quindi trascurabile. Per lo stesso motivo, è trascurabile il flusso del vettore \mathbf{P} attraverso la superficie laterale del cilindro in figura rispetto al flusso attraverso le basi. Quest'ultimo risulta pari a

$$-\vec{P}_2 \cdot \vec{n}_2 dS - \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_1 dS = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} dS$$

E pertanto:

$$\sigma_P dS = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} dS$$

$$\sigma_P = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} = P_{n1} - P_{n2}$$

dove \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 sono i vettori di "polarizzazione" nei due materiali e $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$

Verifichiamo ora che le due descrizioni del dielettrico polarizzato sono compatibili. Ogni porzione di dielettrico possiede cariche di polarizzazione, distribuite sulla superficie con densità σ_P e nel volume τ con densità ρ_P ; pertanto, tenendo conto del teorema della divergenza, la carica globale di polarizzazione del frammento di dielettrico è sempre nulla :

$$Q_P = \oiint_{\Sigma} \sigma_P dS + \iiint_{\tau} \rho_P d\tau$$

$$Q_P = \oiint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS - \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{P} d\tau = 0$$

Riassumendo, le densità di carica ρ_P , σ_P si formano nel dielettrico a seguito della polarizzazione dovuta a spostamenti delle cariche microscopiche del materiale dalle rispettive posizioni di equilibrio. La densità di carica totale ρ (risp. σ) è somma di una densità di carica libera ρ_{lib} (risp. σ_{lib}) e una densità di carica di polarizzazione ρ_P (risp. σ_P):

$$\rho = \rho_{lib} + \rho_P \quad \sigma = \sigma_{lib} + \sigma_P$$

Il contributo dato al campo elettrico macroscopico da distribuzioni di polarizzazione note si ottiene come:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma_P dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho_P d\tau'$$

Invece il contributo dato al potenziale scalare da distribuzioni di polarizzazione note è dato da:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sigma_P dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_P d\tau'$$

IL TEOREMA DI GAUSS IN PRESENZA DI DIELETTICI

Riscriviamo il teorema di Gauss nella sua forma più generale, valida anche in presenza di mezzi polarizzati. In questo caso, oltre alle cariche libere, sono presenti anche cariche di polarizzazione:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{lib} + Q_P) \quad (1) \qquad \oiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{lib} - \frac{1}{\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS$$

Dalla espr. (2) $Q_P = -\oiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS$ e, dunque, risulta: $\oiint_{\Sigma} (\epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = Q_{lib}$

Pertanto il flusso del vettore $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ uscente da Σ uguaglia la carica libera totale contenuta entro Σ .

Definito il vettore spostamento elettrico come $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$ (4)

dalle formule precedenti si ricava l'espressione del teorema di Gauss in termini di \mathbf{D} :

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = Q_{lib}}$$

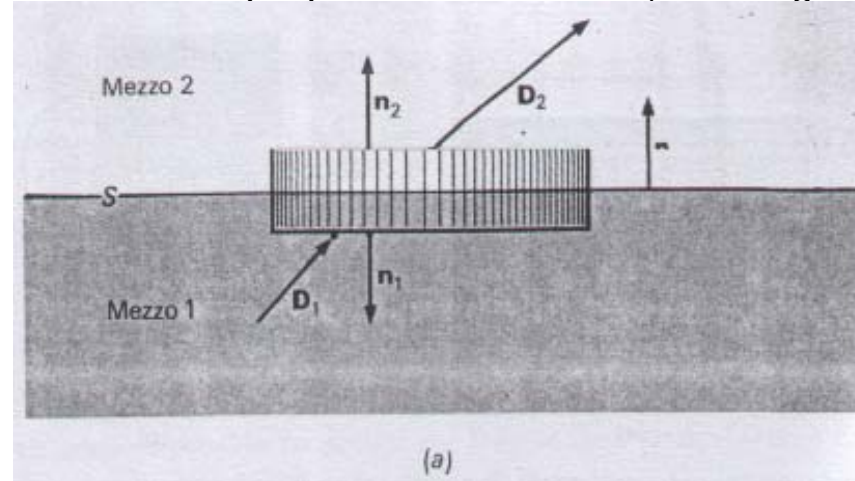
Come avveniva in assenza di polarizzazione, anche la (1) e la (2) possono essere espresse in

forma locale nel modo seguente: $\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{lib} + \rho_P) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_{lib}$

Tuttavia tra \mathbf{E} e \mathbf{D} vi è una fondamentale differenza: il campo elettrico \mathbf{E} è sempre irrotazionale, mentre il vettore spostamento elettrico \mathbf{D} generalmente è un campo rotazionale.

CONDIZIONI DI INTERFACCIA SULLE SUPERFICI DI SEPARAZIONE TRA DUE MEZZI

Si consideri una regione volumica di spessore infinitesimo a forma di moneta, collocata a cavallo di due regioni materiali 1 e 2 con differenti proprietà dielettriche (vedi la figura sottostante).



Immaginiamo che sulla superficie di discontinuità tra i materiali, internamente alla regione volumica, sia distribuita una carica libera con densità σ_{lib} e siano presenti delle densità di carica libera volumica ρ_{lib1} e ρ_{lib2} nei due mezzi. Poichè lo spessore della regione volumica che abbiamo definito è infinitesimo rispetto alle altre due dimensioni spaziali, la carica legata alla distribuzione volumica è trascurabile rispetto a quella allocata sulla superficie di discontinuità. Inoltre il flusso di \mathbf{D} attraverso la superficie laterale della regione moneta risulta trascurabile rispetto a quello attraverso le basi. Si ottiene così, dalla **(2)** :

$$\sigma_{lib} dS = \vec{\mathbf{D}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_1 \cdot dS + \vec{\mathbf{D}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 \cdot dS = (\vec{\mathbf{D}}_2 - \vec{\mathbf{D}}_1) \cdot \vec{\mathbf{n}} \cdot dS$$

e, dette D_{n2} e D_{n1} le componenti di \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 nella direzione della normale \mathbf{n} alla superficie di separazione:

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_{lib}$$

Se sulla superficie di separazione dei due mezzi vi è uno strato di carica libera, la componente normale di \mathbf{D} ha dunque una discontinuità pari alla densità superficiale di carica libera; se invece

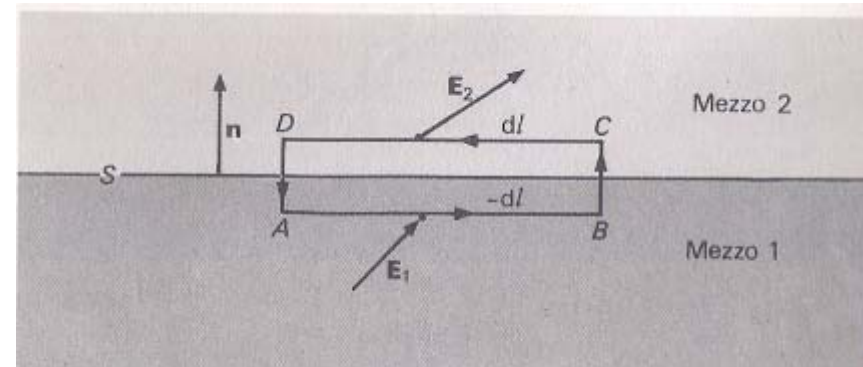
$\sigma_{\text{lib}} = 0$, risulta ovviamente $D_{n2} = D_{n1}$

Esaminiamo ora il comportamento del campo elettrico, \mathbf{E} . Sulla superficie di separazione dei due mezzi è presente uno strato di carica di polarizzazione con densità: $\sigma_P = P_{n1} - P_{n2}$

e deve dunque esservi una discontinuità di E_n tale che

$$\epsilon_0(E_{n2} - E_{n1}) = \sigma_P = P_{n1} - P_{n2}$$

Per quanto riguarda le componenti del campo elettrico \mathbf{E} tangenti alla superficie di separazione dei due mezzi, si faccia riferimento alla figura a lato ed in particolare alla curva chiusa ABCD di lunghezza totale infinitesima. Si assuma che i tratti AD e BC siano infinitesimi di ordine superiore rispetto agli altri due, AB e CD.



Poichè il campo elettrico è irrotazionale, la circuitazione del campo elettrico lungo la curva ABCD risulta nullo.

Inoltre, essendo i tratti della curva infinitesimi, è lecito assumere che il campo elettrico si mantenga costante lungo ciascuno di essi e, ancora, che il contributo alla circuitazione portato dai termini relativi ai tratti AD e BC, assunti infinitesimi rispetto agli altri, sia trascurabile.

Infine, poichè $dl_{cd} = dl_{AB}$ si deduce agevolmente che nel passaggio da un mezzo all'altro

le componenti tangenziali del campo elettrico

$$\vec{E}_2 \cdot \vec{dl} - \vec{E}_1 \cdot \vec{dl}_{AB} = 0 \rightarrow$$

devono mantenersi continue

$$E_{t2} dl_{CD} = E_{t1} dl_{AB} \rightarrow E_{t2} = E_{t1}$$

Dalla (4) si deduce che le componenti tangenziali di \mathbf{D} presentano una discontinuità uguale a quella del vettore \mathbf{P} :

$$D_{t2} - D_{t1} = P_{t2} - P_{t1}$$

Nei materiali lineari, il campo di polarizzazione risulta proporzionale al campo elettrico: $\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}}$

dove la costante di proporzionalità, χ , prende il nome di suscettività elettrica e dipende dal materiale. Sostituendo nella (4) e introducendo, per caratterizzare il materiale, la costante dielettrica relativa: $\varepsilon_r = (1 + \chi)$ e la costante dielettrica assoluta, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ si ottiene:

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \varepsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} (1 + \chi) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

Nel caso in cui i materiali 1 e 2 siano lineari e non vi sia carica libera sulla superficie di separazione, si ricava una relazione tra le direzioni dei vettori di campo nei due mezzi. Indicando con θ_1 e θ_2 gli angoli formati con la normale \mathbf{n} da \mathbf{E}_1 (fig. 5.12) ed \mathbf{E}_2 rispettivamente, e con ε_1 ed ε_2 le costanti dielettriche dei due mezzi, possiamo scrivere:

$$D_{n2} = D_{n1} \rightarrow \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \rightarrow \varepsilon_1 \frac{E_{n1}}{E_{t1}} = \varepsilon_2 \frac{E_{n2}}{E_{t2}}$$

dove: $tg \theta_1 = \frac{E_{t1}}{E_{n1}} \quad tg \theta_2 = \frac{E_{t2}}{E_{n2}}$

Dalle espressioni precedenti, si ricava:

$$\frac{tg \theta_1}{tg \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

Questa relazione esprime la cosiddetta legge di rifrazione delle linee di campo.

IL CONDENSATORE

Con il termine **CONDENSATORE** intendiamo un sistema fisico costituito da due conduttori (armature) affacciati reciprocamente e separati da un mezzo isolante, caricati in modo che la carica totale allocata su uno sia uguale e opposta a quella che si trova sull'altro.

Questo semplice dispositivo consente di creare intensi campi elettrostatici in regioni limitate dello spazio e di immagazzinare quindi notevoli quantitativi di energia elettrostatica.

Dette A e B le armature del conduttore e $+Q$ e $-Q$ le cariche totali su di esse presenti, per un'estesa classe di materiali isolanti, la differenza di potenziale tra le armature risulta proporzionale al valore di Q (*condensatore lineare*)

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C}$$

dove la costante C è la **capacità** del condensatore lineare e si misura in *Farad*.

Si definisce **rigidità dielettrica**, K_{die} , il valore del campo elettrico che provoca la rottura del materiale dielettrico sottoposto alla sollecitazione. E' un valore caratteristico legato al materiale.

Si definisce **tensione di breakdown** (o **tensione di rottura**), V_{bd} , la massima tensione a cui può essere sottoposto un condensatore prima che cominci ad essere attraversato da una forte corrente, normalmente distruggendosi. Il suo valore dipende dalle caratteristiche geometriche e dal materiale isolante utilizzato tra le armature.

ENERGIA DI UN SISTEMA ELETTROSTATICO

L'energia elettrostatica U associata a una carica distribuita sulla superficie S di un conduttore è:

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V dS$$

In un sistema di n conduttori carichi interagenti, denotata con S_i la superficie del i -mo conduttore, l'espressione precedente diviene:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \sigma_i V_i dS$$

V_i è costante sulle superfici di ciascun conduttore e può essere quindi portato fuori dal segno di integrale. Inoltre, la carica totale esistente sull' i -mo conduttore è esprimibile come:

$$q_i = \iint_{S_i} \sigma_i dS$$

Risulta perciò:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

Nel caso particolare di un condensatore (due sole armature con cariche uguali ed opposte), l'energia elettrostatica risulta:

$$U = \frac{1}{2} QV_1 - \frac{1}{2} QV_2 = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

La conoscenza dell'energia elettrostatica di un sistema di conduttori permette di calcolare le forze che tra essi si esercitano, utilizzando il principio di conservazione dell'energia.

Consideriamo dapprima il caso in cui il sistema sia isolato (cioè non ci sono scambi energetici col mondo esterno) e supponiamo che uno dei conduttori sia libero di compiere uno spostamento $d\mathbf{r}$ sotto l'azione delle forze elettriche dovute agli altri conduttori. Il lavoro compiuto dalle forze del campo è:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Poiché il sistema è isolato, questo lavoro è compiuto a spese dell'energia elettrostatica U posseduta dal sistema:

$$dL = -dU$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$$

Detta F_r la componente di \mathbf{F} nella direzione \mathbf{r} , risulta:

$$F_r = \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_q$$

ove l'indice "q" indica che la derivazione va eseguita mantenendo costanti le cariche (se il sistema è isolato, le cariche non possono abbandonare i conduttori!).

Si consideri ora il caso di un sistema di conduttori "non isolato" ed assumiamo che il potenziale dei conduttori presenti nel sistema non vari nel corso degli spostamenti). Il lavoro è compiuto non solo a spese dell'energia del sistema di conduttori, ma anche a spese delle sorgenti esterne. L'equazione di conservazione dell'energia assume ora la seguente forma:

$$dL + dU_v = dU_{est}$$

dove dU_{est} indica l'energia fornita dalle sorgenti esterne e dU_v la variazione dell'energia elettrostatica del sistema di conduttori con potenziali mantenuti costanti.

Omettendo le dimostrazioni, risultano valide le seguenti espressioni:

$$dU_{est} = \sum_{K=1}^n V_K dq_K$$
$$dU_v = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n V_K dq_K$$
$$dU_{est} = 2dU_v$$
$$dL = dU_v$$
$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = dU_v$$
$$F_r = \left[\frac{\partial U}{\partial r} \right]_v$$

Si noti che, in questo caso, metà dell'energia fornita dal sistema esterno serve per aumentare l'energia elettrostatica del sistema e l'altra metà è trasformata in lavoro, durante lo spostamento dei conduttori.

Si noti, inoltre, che le forze agenti su un sistema statico di conduttori dipendono sia dalla loro configurazione geometrica che dallo stato elettrico (potenziale e/o carica elettrica associata ai singoli conduttori, eventuali collegamenti con generatori esterni).

CONDENSATORE LINEARE PIANO

Dato un condensatore costituito da due armature piane parallele di area S , separate da un dielettrico di spessore d e costante dielettrica ε . Calcoliamo la capacità.

Se d è molto piccola rispetto alla dimensione delle armature (fig. 4.10) possiamo fare riferimento al caso di due armature piane indefinite parallele, poste a distanza d l'una dall'altra.

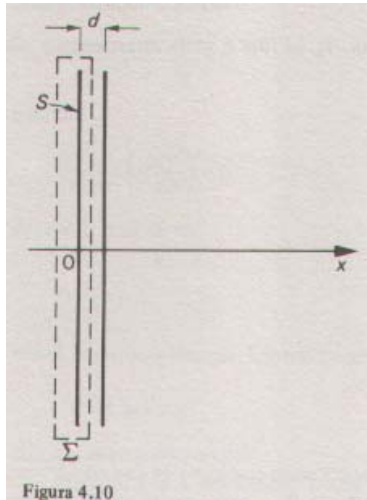


Figura 4.10

Indichiamo con x l'asse ortogonale ad esse. Il potenziale soddisfa all'equazione di Laplace e, per ragioni di simmetria, dipende solo dalla coordinata x :

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \Rightarrow V(x) = Ax + B \quad \text{per } x \in (0; d)$$

con A e B costanti di integrazione. Si conclude che la componente nella dir. x del campo elettrico $E_x = -dV/dx = \text{cost}$ per $x \in (0; d)$. Ponendo $V(x=0) = 0$ e $V(x=d) = \Delta V$

Applicando il teorema di Gauss alla superficie chiusa Σ definita in fig.4.10 risulta:

$$Q = \varepsilon \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = -\varepsilon \oiint_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

La derivata di V rispetto alla normale è nulla esternamente alle armature e sui piccoli tratti orizzontali di Σ . Pertanto, indicando con ΔV è la tensione applicata fra le armature:

$$Q = \varepsilon AS$$

$$\Delta V = Ad$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

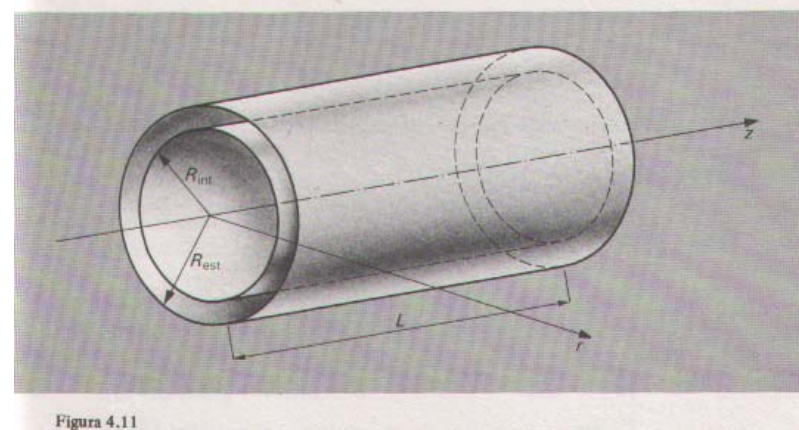
CONDENSATORE CILINDRICO

Consideriamo un condensatore le cui armature siano costituite da due cilindri conduttori coassiali a sezione circolare, di raggi R_{int} e R_{est} e il cui dielettrico abbia permittività pari ad ϵ . Assumiamo che la lunghezza del cilindro L sia molto maggiore di R_{est} e che tra le armature sia imposta la tensione ΔV

La funzione V , in un sistema di coordinate cilindriche, dipende soltanto da r .

L'equazione di Laplace assume la forma:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$



Per $r \neq 0$, si ha: $r \frac{dV}{dr} = k$ ed integrando una seconda volta $V = k \ln r + A$ (1)

I valori delle costanti di integrazione k ed A si trovano imponendo nella (1) le condizioni al contorno $V(R_{est}) = \Delta V$; $V(R_{int}) = 0$

$$0 = V(R_{int}) = k \ln R_{int} + A \quad \Rightarrow \quad A = -k \ln R_{int}$$

$$\Delta V = V(R_{est}) = k \ln R_{est} - k \ln R_{int} = k \ln R_{est} / R_{int} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\Delta V}{\ln R_{est} / R_{int}}$$

$$\text{ed infine: } V(r) = \Delta V \frac{\ln r / R_{int}}{\ln R_{est} / R_{int}}; \quad E(r) = -\frac{\Delta V}{\ln R_{est} / R_{int}} \frac{1}{r} \quad (2)$$

Dalla definizione di capacità del condensatore si ha:

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V}$$

dove Q_1 è la carica presente sulle armature. Si ha d'altra parte:

$$Q_1 = \iint_{\Sigma_{int}} \sigma dS$$

dove σ è la densità superficiale di carica esistente, ad esempio, sull'armatura interna Σ_{int} .

$$\sigma = -\varepsilon \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{\Sigma_{int}} \quad \text{e, ricordando la (1):} \quad \sigma = -\varepsilon \frac{k}{R_{int}}$$

Tenendo conto dell'uniformità di σ su Σ_{int} , si ottiene:

$$|Q_1| = 2\pi R_{int} L |k| \frac{\varepsilon}{R_{int}} = 2\pi |k| L \varepsilon; \quad \Delta V = V_{est} - V_{int} = k \ln \frac{R_{est}}{R_{int}}$$

$$C_1 = \frac{|Q_1|}{\Delta V} = \frac{2\pi |k| L \varepsilon}{|k| \ln \frac{R_{est}}{R_{int}}} = \frac{2\pi L \varepsilon}{\ln \frac{R_{est}}{R_{int}}}$$

La tensione di breakdown, V_{bd} , si calcola imponendo che nella (2) per $r=R_{int}$ il campo elettrico risulti pari alla rigidità dielettrica del materiale isolante utilizzato. Nel caso del vetro, $K_{diel}=25$ V/m.

Se $R_{int}=1$ mm e $R_{ext}=2$ mm:
$$V_{bd} = K_{diel} R_{int} \ln R_{est} / R_{int} = 17.3 \text{ [mV]}$$

CONDENSATORE SFERICO

Consideriamo un condensatore, il cui dielettrico abbia permittività pari ad ε e le cui armature siano costituite da due sfere conduttrici concentriche, di raggio R_{int} e R_{est} . L'equazione di Laplace in coordinate sferiche diventa:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{dV}{dr} = k \quad \text{con } r \neq 0 \text{ e } k \text{ costante}$$

L'integrale generale è:

$$V = -\frac{k}{r} + A \quad \text{con } A \text{ costante} \quad (1)$$

$$\sigma = -\varepsilon \left. \frac{dV}{dr} \right|_{R_{int}} = -\varepsilon \frac{k}{R_{int}^2}$$

$$|Q| = |\sigma| 4\pi R_{int}^2 = 4\pi\varepsilon |k|$$

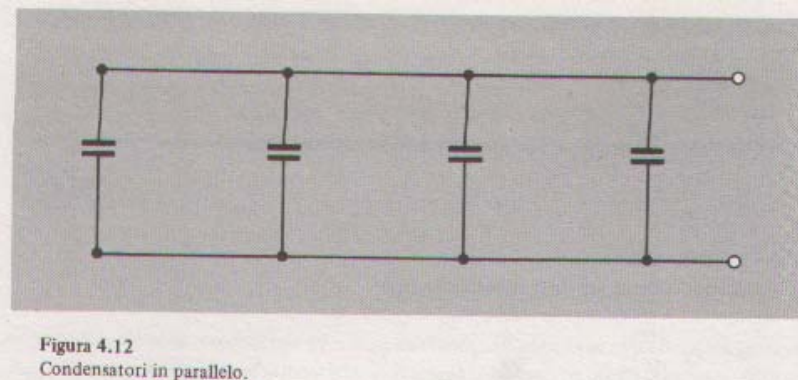
Dalla (1) discende:

$$\Delta V = V_{est} - V_{int} = -\frac{k}{R_{est}} + \frac{k}{R_{int}}$$

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_{int}} - \frac{1}{R_{est}}} = 4\pi\varepsilon \frac{R_{int} R_{est}}{R_{est} - R_{int}}$$

CONDENSATORI IN PARALLELO E IN SERIE

Consideriamo più condensatori connessi in parallelo (cioè le loro armature sono sottoposte alla stessa differenza di potenziale) (fig 4.12)



Il sistema di condensatori costituisce un unico condensatore di cui vogliamo determinare la capacità C in funzione della capacità C_1, C_2, \dots, C_n . Per definizione

$$C=Q/V$$

essendo Q la carica totale su un'armatura del condensatore risultante e V la differenza di potenziale tra le sue armature.

$$Q = \sum_{K=1}^n Q_K$$

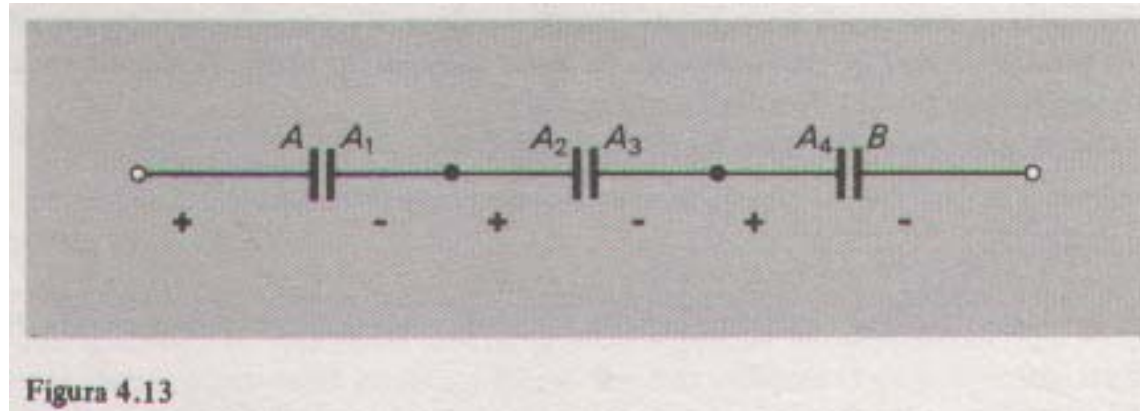
Essendo tutti i condensatori sottoposti alla stessa V , possiamo scrivere:

$$Q = \sum_{K=1}^n C_K V = V \sum_{K=1}^n C_K$$

$$C = \sum_{K=1}^n C_K$$

La capacità di un sistema di condensatori collegati in parallelo è la somma delle capacità dei singoli condensatori.

Consideriamo più condensatori, connessi in serie (vedi fig.4.13): l'insieme dei condensatori costituisce un unico condensatore, le cui armature sono quelle estreme della catena di condensatori. In questo caso, è la carica a essere uguale per tutte le C_k .



$$V = \sum_{K=1}^n V_k$$

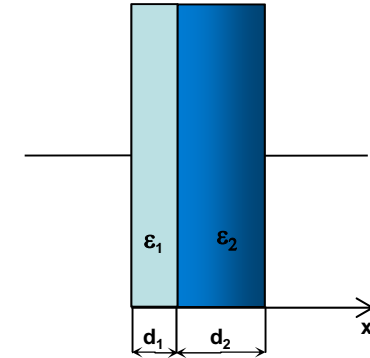
$$V = \sum_{K=1}^n \frac{Q}{C_K} = Q \sum_{K=1}^n \frac{1}{C_K}$$

$$C = \frac{1}{\sum_{K=1}^n \frac{1}{C_K}}$$

Dunque: il reciproco della capacità di un sistema di più condensatori in serie è la somma dei reciproci delle capacità dei singoli condensatori.

CONDENSATORE A DOPPIO DIELETTRICO

Si vuole calcolare la capacità del condensatore piano a due dielettrici ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$) riprodotto nella figura a lato. Si supponga che le armature giacciono nel piano zy e che le loro dimensioni lineari siano molto maggiori rispetto agli spessori d_1 e d_2 delle due regioni di dielettrico, Ω_1 ed Ω_2 . Sotto queste assunzioni è possibile trascurare gli effetti di bordo e assumere che le grandezze elettromagnetiche (potenziale elettrico, V , campo elettrico, \mathbf{E} , e campo spostamento elettrico, \mathbf{D}) dipendano solo dalla coordinata x .



A causa delle brusche variazioni delle proprietà costitutive dei dielettrici la componente del campo elettrico normale alle armature $E_x = -dV(x)/dx$ (che, per le proprietà di simmetria, coincide con l'intero campo) avrà una discontinuità in corrispondenza della superficie di interfaccia. Siccome il campo elettrico ha un salto, il potenziale elettrico V non è derivabile in corrispondenza della superficie di interfaccia. Pertanto per poter risolvere il sistema, occorre introdurre nei due domini (risp. 1 e 2), due diverse funzioni potenziale (risp. $V_1(x)$ e $V_2(x)$)

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 V_1(x) &= 0; & 0 \leq x \leq d_1; \\
 \nabla^2 V_2(x) &= 0; & d_1 \leq x \leq d_1 + d_2; \\
 \text{con le cond. al cont.} & & V_1(0) = V_0; \\
 & & V_2(d_1 + d_2) = 0; \\
 & & V_1(d_1) = V_2(d_1)
 \end{aligned}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{aligned}
 \frac{d^2 V_1(x)}{dx^2} &= 0 & 0 \leq x \leq d_1 \\
 \frac{d^2 V_2(x)}{dx^2} &= 0 & d_1 \leq x \leq d_1 + d_2
 \end{aligned}$$

ed accoppiarle imponendo le condizioni di interfaccia sulla superficie di separazione

$$-\epsilon_1 \left. \frac{dV_1(x)}{dx} \right|_{x=d_1} = -\epsilon_2 \left. \frac{dV_2(x)}{dx} \right|_{x=d_1}$$

Integrando le equazioni differenziali nei due domini ed imponendo le condizioni al contorno:

$$V_1(x) = Ax + B; \quad V_0 = V_1(0) = B; \quad B = V_0;$$

$$V_2(x) = Cx + D; \quad 0 = V_2(d_1 + d_2) = C(d_1 + d_2) + D; \quad D = -C(d_1 + d_2);$$

$$V_1(d_1) = Ad_1 + V_0 = -C d_2 = V_2(d_1);$$

e le condizioni di interfaccia:

$$-\varepsilon_1 \frac{dV_1(x)}{dx} \Big|_{x=d_1} = -\varepsilon_1 A = -\varepsilon_2 C = -\varepsilon_2 \frac{dV_2(x)}{dx} \Big|_{x=d_1}$$

$$Ad_1 + V_0 = -A d_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}; \rightarrow A = -\frac{V_0}{d_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + d_1}; \quad C = A \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{V_0}{d_2 + d_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}};$$

Ed infine: $V_1(x) = V_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 x}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2} \right); \quad E_1(x) = -\frac{V_0 \varepsilon_2}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2} \quad 0 \leq x \leq d_1$

$$V_2(x) = \frac{V_0 \varepsilon_1}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2} ((d_1 + d_2) - x); \quad E_2(x) = -\frac{V_0 \varepsilon_1}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2} \quad d_1 \leq x \leq d_1 + d_2$$

La densità di carica, σ , e la carica, Q , su ciascuna armatura, di area S_{arm} , valgono rispettivamente:

$$\sigma = -\varepsilon_1 \frac{dV_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} = -\varepsilon_1 A = \frac{V_0}{\frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1}}; \quad Q = \sigma S_{arm} = \frac{V_0 S_{arm}}{\frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1}}$$

Pertanto la capacità del condensatore piano a due dielettrici risulta pari a $C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{S_{arm}}{\frac{d_2}{\epsilon_2} + \frac{d_1}{\epsilon_1}}$

Si noti che si sarebbe potuti arrivare molto più facilmente alla stessa espressione notando che per simmetria la superficie $x=d_1$ è una superficie equipotenziale e quindi può essere sostituita con una lastra di conduttore elettrico (**principio di metallizzazione**).

Così facendo il condensatore piano a due dielettrici risulta equivalente alla serie di due condensatori piani ad un solo dielettrico di area S_{arm} , di spessore pari risp. a d_1 e d_2 , e costante dielettrica pari risp. a ϵ_1 e ϵ_2 .

Le loro capacità valgono singolarmente $C_1 = \epsilon_1 S_{arm}/d_1$ e $C_2 = \epsilon_2 S_{arm}/d_2$, mentre la serie dei due condensatori ha capacità che coincide con quella calcolata precedentemente:

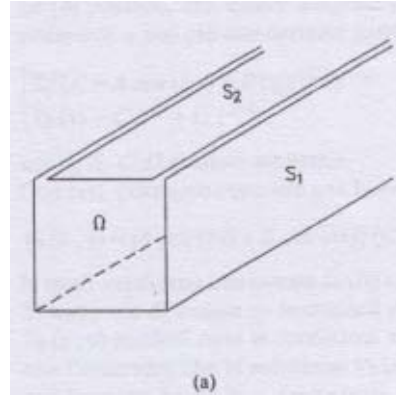
$$C_{serie} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{S_{arm}}{\frac{d_2}{\epsilon_2} + \frac{d_1}{\epsilon_1}}$$

Identificando rispettivamente con K_{diel1} e K_{diel2} la rigidità dielettrica dei due dielettrici, la tensione di breakdown, V_{bd} , è pari alla minore (in termini assoluti) delle due tensioni V_{bd1} e V_{bd2} calcolate a partire dalle espressioni del campo elettrico:

$$\begin{aligned} K_{diel1} &= \left| -\frac{V_{bd1}\epsilon_2}{d_2\epsilon_1 + d_1\epsilon_2} \right| & \Rightarrow & \quad |V_{bd1}| = \frac{K_{diel1}(d_2\epsilon_1 + d_1\epsilon_2)}{\epsilon_2} \\ K_{diel2} &= \left| -\frac{V_{bd2}\epsilon_1}{d_2\epsilon_1 + d_1\epsilon_2} \right| & \Rightarrow & \quad |V_{bd2}| = \frac{K_{diel2}(d_2\epsilon_1 + d_1\epsilon_2)}{\epsilon_1} \end{aligned} \Rightarrow |V_{bd}| = \min(|V_{bd1}|, |V_{bd2}|).$$

PROBLEMA DI ELETTROSTATICA: IL METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

In fig.(a) è rappresentato un sistema elettromagnetico costituito da una lunghissima “canaletta” conduttrice S_1 e da un “coperchio” anch’esso conduttore, S_2 , isolati elettricamente tra loro. Calcolare la distribuzione del potenziale nella regione Ω delimitata da S_1 e S_2 , quando S_1 sia tenuto a potenziale nullo e S_2 a potenziale V_0 .



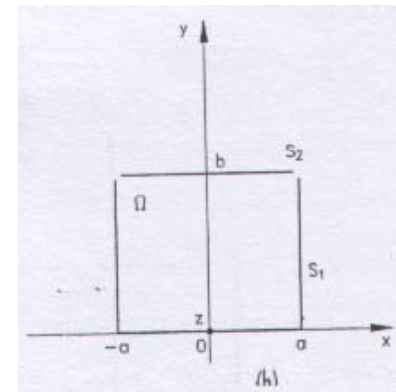
Soluzione

La funzione potenziale $V(x,y,z)$ deve essere indipendente dalla coordinata z (fig.(b)):

$$V(x,y,z) = V(x,y)$$

L'equazione di Laplace assume pertanto la forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{array}{l} -a < x < a \\ 0 < y < b \end{array} \quad (1)$$



Per l'unicità della soluzione occorrerà, inoltre, assegnare le condizioni al contorno per cui la funzione potenziale incognita dovrà assumere nei punti di S_1 e S_2 valore rispettivamente pari a zero e V_0 .

Cerchiamo una soluzione che sia del tipo “a variabili separate”: $V(x,y)=X(x)Y(y)$ **(2)**.

Consideriamo i valori che la $V(x,y)$ assume in corrispondenza di due ordinate y_1 e y_2 distinte, si ha:

$$V(x, y_1) = X(x)Y(y_1)$$

$$V(x, y_2) = X(x)Y(y_2)$$

dividendo membro a membro:

$$V(x, y_1) = \frac{Y(y_1)}{Y(y_2)} V(x, y_2)$$

Ciò significa che l'andamento in funzione di x del potenziale all'ordinata y_1 coincide, a meno del fattore costante $Y(y_1)/Y(y_2)$, con quello che si riscontra in corrispondenza dell'ordinata $y_1 \neq y_2$.

Sostituendo la (2) nella (1):

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0 \quad \text{per} \quad -a < x < a, \quad 0 < y < b$$

e dividendo per $V(x,y)$:

Dove l'ultima eguaglianza è giustificata dal fatto che il primo membro è funzione della sola variabile x e il secondo della sola variabile y : l'eguaglianza è possibile solo se ogni membro è pari alla costante da determinare, k^2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2 \\ -\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2 \end{array} \right. \quad \text{con } k^2 \text{ costante}$$

Denotate con A,B,C e D le costanti di integrazione i cui valori dipendono dalle condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \\ Y(y) = C e^{ky} + D e^{-ky} \end{array} \right.$$

$$V_0(x, y) = [A \sin(kx) + B \cos(kx)](C e^{ky} + D e^{-ky}) \quad (3)$$

Si tratta ora di vedere se le costanti A,B,C,D possono essere scelte in modo che la $V_0(x,y)$ soddisfi a tutte le condizioni al contorno del problema.

$V_0(x,y)$ deve risultare una funzione “pari” di x, cioè:

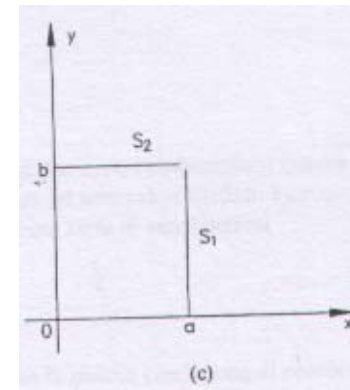
$$V(-x,y) = V(x,y)$$

Da questa condizione comporta che nei punti dell’asse y debba risultare:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Il dominio di integrazione dell’equazione di Laplace può ridursi a quello disegnato in fig.(c), con le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} V(x,0) = 0 & \text{per } 0 \leq x < a \\ \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 & \text{per } 0 < y < b \\ V(a, y) & \text{per } 0 < y < b \\ V(x, b) & \text{per } 0 \leq x < a \end{cases}$$



Cominciamo a imporre tali condizioni nella **(3)** .

La prima condizione comporta che

$$0 = V_0(x,0) = [A \sin(kx) + B \cos(kx)](C + D) \quad \text{per } 0 \leq x < a$$

Questa condizione è verificata se:

$$C+D=0$$

$$D=-C$$

La seconda condizione implica che:

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} = [kA \cos(kx) - kB \operatorname{sen}(kx)](Ce^{ky} - Ce^{-ky})$$
$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial x} \right|_{x=0} = kAC(e^{ky} - e^{-ky}) = 0 \quad \text{per } 0 < y < b$$

e può essere soddisfatta assumendo $A=0$.

La terza condizione:

$$0 = V(a, y) = BC \cos(ka)(e^{ky} - e^{-ky}) \quad \text{per } 0 < y < b$$

può essere verificata imponendo

$$\cos(ka) = 0$$

$$ka = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{a}$$

dove k prende il nome di “autovalore del problema”.

Le funzioni $V_0(x, y)$ che soddisfano le prime tre condizioni al contorno sono del tipo:

$$V_0(x, y) = V_n(x, y) = A_n^* \cos(k_n x) \operatorname{senh}(k_n y) \quad (4)$$

$$\text{con } A_n^* = 2BC \quad e \quad \operatorname{senh}(k_n y) = \frac{e^{k_n y} - e^{-k_n y}}{2}$$

Le funzioni $V_n(x, y)$ così ottenute prendono il nome di “autofunzioni del problema”.

Resta da imporre l'ultima condizione: $V(x, b) = V_0$ per $0 \leq x < a$

Sostituendo nella (4), si ha:

$$V_0 = A_n^* \cos(k_n x) \sinh(k_n b)$$

e si conclude che questa relazione non può essere verificata, quali che siano i valori di A_n^* e k_n .

Consideriamo una funzione che sia somma di due autofunzioni $V_r(x, y)$ e $V_s(x, y)$ corrispondenti a due autovalori distinti k_r e k_s :

$$V^*(x, y) = V_r(x, y) + V_s(x, y) = A_r^* \cos(k_r x) \sinh(k_r y) + A_s^* \cos(k_s x) \sinh(k_s y)$$

questa verifica l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V^* = \nabla^2 V_r + \nabla^2 V_s$$

$$\nabla^2 V_r = 0, \quad \nabla^2 V_s = 0$$

$V^*(x, y)$ verifica le prime tre condizioni al contorno, infatti:

$$V^*(x, 0) = V_r(x, 0) + V_s(x, 0) = 0 + 0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial V^*}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial V_r}{\partial x} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial V_s}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 + 0 = 0$$

$$V^*(a, y) = V_r(a, y) + V_s(a, y) = 0 + 0 = 0$$

Ci si chiede se un'opportuna serie di autofunzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos(k_n x) \sinh(k_n y)$$

possa soddisfare anche la quarta condizione al contorno.

Affinché tale condizione sia rispettata, deve essere:

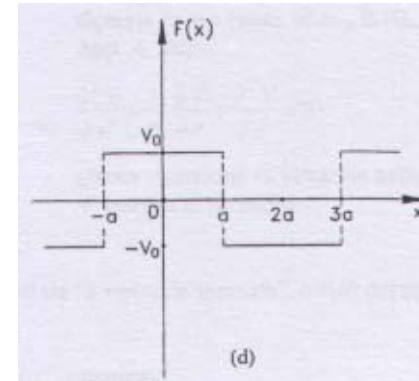
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos(k_n x) \sinh(k_n b) = V_0 \quad \text{per } 0 \leq x < a$$

e quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \cos(k_n x) = V_0 \quad (5)$$

avendo posto: $C_n^* = A_n^* \sinh(k_n b)$.

Consideriamo la funzione periodica $F(x)$ di periodo $4a$, rappresentata in fig.(d). $F(x)$ può essere sviluppata in una serie di Fourier di soli coseni (poiché è funzione "pari" di x), ottenendo:



$$F(x) = \frac{4}{\pi} V_0 \left[\cos(\Omega x) + \frac{1}{3} \cos(3\Omega x) + \frac{1}{5} \cos(5\Omega x) + \dots \right] = \frac{4}{\pi} V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)\Omega x] \quad \text{con } \Omega = \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a}$$

Ricordando $k_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{a} = (2n-1)\Omega$, la (5) diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \cos[(2n-1)\Omega x] = \frac{4}{\pi} V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)\Omega x]$$

Uguagliando le due serie, risulta:

$$C_n^* = \frac{4}{\pi} \frac{V_0}{2n-1} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_n^* = \frac{C_n^*}{\sinh(k_n b)} = \frac{C_n^*}{\sinh[(2n-1)\Omega b]}$$

Da quanto detto, la soluzione completa è

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos[(2n-1)\Omega x] \cdot \sinh[(2n-1)\Omega y]$$